MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

GH. BUZDUGAN
A. BELEȘ
C. MITESCU
R. VOINEA
A. PETRE
M. BLUMENFELD
I. CONSTANTINESCU

CULEGERE DE PROBLEME DIN REZISTENȚA MATERIALELOR

EDIȚIA A VII-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI

Redactor: Alexandru Nicolae
Tehnoredactor: Petre Nazâru

Prefață

Culegerea de probleme din rezistența materialelor, în a VII-a ediție, este în mare măsură rezultatul experienței didactice a Catedrei de rezistența materialelor de la Institutul politehnic din București.

Împărțită în 20 de capitole, lucrarea acoperă toată problematica rezistenței materialelor, în forma ei actuală, cuprinzînd mai ales probleme cu caracter general și cu specific de construcții de mașini.

Față de precedenta, această ediție, are unele modificări: cuprinde cîteva probleme noi de complexitate mai mare, constituind teme de sinteză ale mai multor capitole; de asemenea textul este pus de acord cu ultimele modificări ale Standardelor de Stat din domeniul rezistenței materialelor, construcției de mașini și construcțiilor civile.

AUTORII

CUPRINSUL

	Prefața	3
Cap. 1.	**Întindere și compresiune**	5
Cap. 2.	**Momente de inerție ale suprafețelor plane**	54
Cap. 3.	**Diagrame de eforturi în bare drepte**	72
Cap. 4.	**Eforturi unitare în barele drepte solicitate la încovoiere**	93
Cap. 5.	**Deformațiile barelor drepte solicitate la încovoiere**	124
Cap. 6.	**Răsucire**	172
Cap. 7.	**Teoria generală a eforturilor unitare și a deformațiilor specifice**	193
Cap. 8.	**Solicitări compuse**	217
Cap. 9.	**Bare curbe**	250
Cap. 10.	**Calculul deplasărilor prin metode energetice**	281
Cap. 11.	**Sisteme static nedeterminate**	318
Cap. 12.	**Stabilitatea echilibrului elastic al barelor drepte**	363
Cap. 13.	**Solicitări dinamice**	380
Cap. 14.	**Vibrații în sisteme elastice**	420
Cap. 15.	**Solicitări variabile în timp**	448
Cap. 16.	**Plăci plane**	473
Cap. 17.	**Învelișuri de rotație cu pereți subțiri**	499
Cap. 18.	**Încovoierea și răsucirea profilelor subțiri**	520
Cap. 19.	**Solicitări în stadiul plastic**	546
Cap. 20.	**Tuburi cu pereți groși**	565
	Anexe	579
	Bibliografie	600

CAPITOLUL 1

ÎNTINDERE ȘI COMPRESIUNE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Formulele de dimensionare și de verificare ale unei bare prismatice solicitate la întindere sau la compresiune, precum și ale unui fir solicitat la întindere sînt:

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a}, \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_{ef}}, \tag{1.2}$$

$$N_{cap} = A_{ef} \cdot \sigma_a. \tag{1.3}$$

2. Deformația axială a unei bare solicitate la întindere sau la compresiune este:

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EA}. \tag{1.4}$$

3. Energia sau lucrul mecanic de deformație la întindere sau compresiune este:

— energia specifică (pe unitatea de volum):

$$L_1 = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2}; \tag{1.5}$$

— energia elementară:

$$\mathrm{d}L = L_1\,\mathrm{d}V = L_1 A\,\mathrm{d}x = \frac{N^2\mathrm{d}x}{2EA}; \tag{1.6}$$

— energia totală:

$$L = \int_V \mathrm{d}L = \int \frac{N^2\mathrm{d}x}{2EA}. \tag{1.7}$$

4. Dacă se ține seama și de greutatea proprie a materialului din care este confecționată bara prismatică, formulele (1.1), (1.2), (1.4) devin:

— pentru verificare:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \gamma l; \tag{1.8}$$

— pentru dimensionare:

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a - \gamma l}; \tag{1.9}$$

— pentru calculul deformaţiei:

$$\Delta l = \frac{\left(N + \frac{G}{2}\right) l}{EA} = \frac{\left(N + \frac{\gamma A l}{2}\right) l}{EA}. \tag{1.10}$$

5. Într-o bară formată din două materiale ce apar în orice secţiune cu ariile A_1 şi A_2 şi care se consideră solidarizate astfel încît să se deformeze în mod egal, eforturile unitare se distribuie conform relaţiilor:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2}, \quad \sigma_2 = \frac{N}{A_2 + \frac{E_1}{E_2} A_1}. \tag{1.11}$$

6. Efortul unitar produs într-o bară omogenă prismatică, supusă unei variaţii de temperatură $\Delta t = t_1 - t_0$, în cazul cînd alungirea sau scurtarea este împiedicată, are expresia:

$$\sigma = E\alpha\,(t_1 - t_0), \tag{1.12}$$

α fiind coeficientul de dilatare termică liniară.

7. Cînd o bară este slăbită prin găuri, crestături etc., se disting:
— o secţiune netă A_n, la care s-a ţinut seama de slăbiri;
— o secţiune brută A_b, la care nu s-a ţinut seama de reducerile de secţiune.

8. Problemele static nedeterminate pot fi rezolvate prin *metoda rezistenţelor admisibile* sau prin *metoda capacităţii portante*. În ultima metodă se admite că într-o serie din barele unui sistem static nedeterminat se atinge starea limită (de exemplu, limita de curgere), în timp ce restul de bare sînt solicitate elastic. Metoda este ilustrată prin exemplele din problemele: 1,59; 1.60; 1.61.

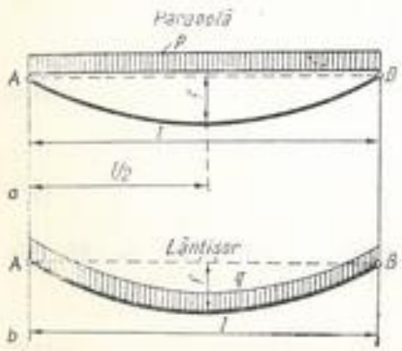


Fig. 1

9. *Firele* sînt *corpuri elastice* care au una din dimensiuni foarte mare faţă de celelalte două, deosebindu-se de bare prin aceea că *nu preiau decît eforturi de întindere*.

Calculul firelor se poate face în două ipoteze:

Ipoteza I. Se consideră greutatea proprie q a firului uniform repartizată pe proiecţia orizontală a acestuia. În acest caz, firul ia forma unei parabole (Fig. 1, *a*).

Ipoteza II. Se consideră greutatea proprie q a firului uniform repartizată pe lungimea firului (aşa cum este în realitate). În acest caz, firul ia forma unui lănţişor (Fig. 1,*b*).

În cazurile practice, pentru deschideri pînă la 500 m, prima ipoteză de calcul dă valori foarte apropiate de realitate, fiind mai comodă din punctul de vedere al calculului.

10. În cele ce urmează se dă numai prima metodă de calcul, pentru fire cu reazeme la acelaşi nivel. Se notează cu p sarcina pe unitatea de lungime din proiecţia orizontală a firului. Ecuaţia parabolei este:

$$y = \frac{px^2}{2H}. \tag{1.13}$$

Originea axelor de coordonate este în punctul cel mai de jos al parabolei. H este proiecţia orizontală a forţei de întindere în fir; pentru sarcini verticale, ea este constantă.

Săgeata maximă are loc pentru $x = \frac{l}{2}$ (Fig. 1,*a*). Valoarea săgeţii maxime este:

$$f = \frac{pl^2}{8H}. \tag{1.14}$$

Proiecţia orizontală a forţei de întindere în fir, în funcţie de săgeata maximă este:

$$H = \frac{pl^2}{8f}. \tag{1.15}$$

Lungimea s a firului întins este dată de relaţia:

$$s = l + \int_0^{\frac{l}{2}} y'^2\,dx = l + \frac{p^2 l^3}{24H^2}, \tag{1.16}$$

în care l este distanţa dintre reazemele firului (deschiderea) aşezate la acelaşi nivel.

Diferenţa dintre lungimea firului şi deschiderea sa este:

$$s - l = \frac{8}{3}\frac{f^2}{l} = \frac{p^2 l^3}{24H^2}. \tag{1.17}$$

Firul se deformează sub acţiunea greutăţii proprii. Diferenţa δ dintre lungimea s_0 a firului înainte de montare şi deschiderea l, pentru ca săgeata să fie egală cu f, rezultă din ecuaţia:

$$f^3 - \frac{3l}{8}\delta f - \frac{3\gamma l^4}{64E} = 0, \tag{1.18}$$

de unde:

$$\delta = \frac{f^2 - \frac{3\gamma l^4}{64E}}{\frac{3}{8} lf}, \tag{1.19}$$

în care γ este greutatea specifică a materialului firului.

11. În practică este necesar să se determine forţa de întindere din momentul montajului astfel ca în condiţiile cele mai grele din timpul iernii să nu se depăşească rezistenţa admisibilă a materialului firului. Se notează:

p_1 — sarcina care acţionează asupra firului în momentul montajului;
p_0 — sarcina care acţionează asupra firului în timpul iernii;
l_1 — lungimea firului în momentul montajului;
l_0 — lungimea firului în timpul iernii;
t_1 — temperatura firului în momentul montajului;
t_0 — temperatura firului în timpul iernii;
α — coeficientul de dilatare termică liniară a materialului firului;
H_1 — proiecţia pe orizontală a forţei de întindere în momentul montajului;
H_0 — proiecţia pe orizontală a forţei de întindere în timpul iernii.

Forţa de întindere din momentul montajului se determină din ecuaţia:

$$\frac{l^2}{24}\left(\frac{p_1^2}{H_1^2} - \frac{p_0^2}{H_0^2}\right) = \alpha\,(t_1 - t_0) + \frac{H_1 - H_0}{EA}. \tag{1.20}$$

Această ecuaţie se mai poate scrie şi sub forma:

$$H_1^3 + \left[\frac{EAp_0^2 l^2}{24H_0^2} + EA\alpha\,(t_1 - t_0) - H_0\right]H_1^2 - \frac{EAp_1^2 l^2}{24} = 0. \tag{1.21}$$

Mărimea H_1 se citeşte pe un *dinamometru*. Dacă pe şantier nu se găseşte acest aparat de măsură, calculul se poate face în funcţie de săgeţi. Notînd cu:

f_1 — săgeata firului în momentul montajului;
f_0 — săgeata firului în timpul iernii,

se obţine ecuaţia:

$$\frac{8}{3l}\left(f_1^2 - f_0^2\right) = l\alpha(t_1 - t_0) + \frac{p_1 l^2}{8f_1 EA} - \frac{p_0 l^2}{8f_0 EA}, \tag{1.22}$$

care se poate scrie şi sub forma:

$$f_1^3 + \left[\frac{3p_0 l^4}{64EAf_0} - f_0^2 - \frac{3}{8}\,\alpha l^2(t_1 - t_0)\right]f_1 - \frac{3p_1 l^2}{64EA} = 0, \tag{1.23}$$

sau:

$$f_1^3 - \frac{3}{8}\left[\frac{1}{24}\,\frac{\gamma^2 l^2}{\sigma_1^2} + \alpha\,(t_1 - t_0) - \frac{\sigma_1}{E}\right]l^2 f_1 - \frac{3}{64}\,\frac{\gamma l^4}{E} = 0, \tag{1.24}$$

în care σ_1 este efortul unitar normal în fir la montaj.

Ecuaţiile (1.21), (1.24) se rezolvă prin încercări. În relaţiile de mai sus p_1 este greutatea proprie a firului măsurată în daN/cm sau daN/m.

Pentru p_0 se prevăd două situaţii critice în care se face calculul:
— la temperatura de $-30°C$, luînd $p_0 = p_1$;
— la temperatura $t_0 = -5°C$, luînd ca sarcină p_0 greutatea proprie a firului plus efectul poleiului şi al vîntului, pentru care se dau indicaţii mai departe.

12. Dacă firul cu săgeată iniţială f_0 suportă o suprasarcină dată de polei sau o altă suprasarcină uniform distribuită, săgeata totală f_2 se determină cu ajutorul ecuaţiei:

$$f_2^3 + \left[\frac{3}{64}\,\frac{p_0 l^4}{EAf_0} - f_0^2\right]f_2 - \frac{3}{64}\,\frac{(p_0 + p_s)l^4}{EA} = 0; \tag{1.25}$$

f_0 este săgeata firului înainte de încărcarea cu suprasarcină;
p_s — greutatea suprasarcinii (pe unitatea de lungime);
A — secţiunea firului fără suprasarcină.

Suprasarcina dată de polei poate fi calculată empiric:

$$p_s = 0{,}18\sqrt{d}. \tag{1.26}$$

Cînd formula se aplică la conductori monofilari, d reprezintă diametrul firului, în mm, rezultatul fiind dat în daN/m, iar în cazul cablurilor alcătuite din mănunchiuri de fire:

$$d = 1{,}3\sqrt{A}, \tag{1.27}$$

în care A este secţiunea totală a firelor în mm².

Pentru ambele verificări (la $-30°C$ şi $-5°C$) trebuie să rezulte un coeficient de siguranţă faţă de rezistenţa de rupere de cel puţin 2 pentru conductori funie şi 2,5 pentru conductori masivi.

Se vor lua deci:

$$\sigma_a \leqslant \frac{\sigma_r}{2}, \text{ respectiv: } \sigma_a \leqslant \frac{\sigma_r}{2{,}5}.$$

Formulele de mai sus, fiind omogene, sînt valabile în orice sistem de unităţi. Se pot lua de exemplu: A în mm², E în daN/mm², l în m, p_1 şi p_0 în daN/m.

B. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine lungirea totală a unei bare de oţel, lungă de 2 m, solicitată la întindere, cînd se produce în ea un efort unitar $\sigma = 1\,200$ daN/cm².

Rezolvare. Se aplică formula (1.4):

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{\sigma l}{E} = \frac{1\,200 \cdot 200}{2{,}1 \cdot 10^6} = 0{,}114 \text{ cm}.$$

2. Un fir lung de 30 m este solicitat la întindere cu o forţă de 420 daN şi se lungeşte cu 24 mm. Dacă secţiunea este de 25 mm², să se determine modulul de elasticitate al materialului.

Rezolvare.
Din formula (1.4) rezultă:

$$E = \frac{Nl}{A \cdot \Delta l} = \frac{420 \cdot 3\,000}{0{,}25 \cdot 2{,}4} = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2.$$

1.3. Să se găsească forţa de întindere pe care o poate suporta o bară de oţel cu diametrul $d = 5$ cm, dacă $\sigma_a = 1\,200$ daN/cm². Să se determine, în acest caz, deformaţia, dacă lungimea barei este $l = 1$ m.
Rezolvare.
Se aplică formula (1.3):

$$N_{cap} = \sigma_a A_{ef} = 1\,200 \cdot \frac{\pi \cdot 5^2}{4} = 23\,556 \text{ daN}.$$

Deformaţia corespunzătoare acestei forţe se găseşte utilizînd formula (1.4):

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{\sigma l}{E} = \frac{1\,200 \cdot 100}{2{,}1 \cdot 10^6} = 0{,}0571 \text{ cm}.$$

1.4. Să se determine forţa de întindere exercitată asupra unei bare cilindrice de oţel cu diametrul de 25 mm, cînd se produce o alungire $\varepsilon = 0{,}7 \cdot 10^{-3}$.
Rezolvare. $\sigma_{ef} = E\varepsilon = 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 0{,}7 \cdot 10^{-3} = 1\,470$ daN/cm²,

$$N = \sigma_{ef} A_{ef} = 1\,470 \cdot \frac{\pi \cdot 2{,}5^2}{4} = 7217 \text{ daN}.$$

1.5. Ce coeficient de siguranţă efectiv are o bară de oţel în care se produce un efort unitar $\sigma_{ef} = 600$ daN/cm², materialul fiind OL 37?
Rezolvare. OL37 are rezistenţa de rupere:

$$\sigma_r = 37 \text{ daN/mm}^2 = 3\,700 \text{ daN/cm}^2.$$

Coeficientul de siguranţă efectiv este:

$$c = \frac{\sigma_r}{\sigma_{ef}} = \frac{3\,700}{600} = 6{,}17.$$

1.6. O bară de oţel, cu secţiunea constantă şi lungimea $l = 600$ mm, se lungeşte, sub acţiunea unei forţe, cu 0,6 mm. Să se calculeze această forţă, ştiind că volumul barei este de 360 cm³.
Rezolvare. $\Delta l = \frac{Nl}{AE} = \frac{Nl^2}{AlE} = \frac{Nl^2}{VE}$,

$$N = \frac{VE \cdot \Delta l}{l^2} = \frac{360 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 0{,}06}{3\,600} = 12\,600 \text{ daN}.$$

1.7. O bară din OL 37, avînd diametrul de 7 mm, este solicitată la întindere. Se cere:
a) să se calculeze forţa N necesară pentru a produce o alungire de 0,017 %;

b) să se arate care este, în acest caz, coeficientul de siguranţă efectiv;
c) care este forţa necesară pentru a produce ruperea barei?
Rezolvare. $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA}$,

$$N = \varepsilon EA = \frac{0{,}017}{100} \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}7^2}{4} = 137 \text{ daN},$$

$$\sigma_{ef} = E\varepsilon = 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot \frac{0{,}017}{100} = 357 \text{ da N/cm}^2,$$

$$c = \frac{\sigma_r}{\sigma_{ef}} = \frac{3\,700}{357} = 10{,}3,$$

$$N_r = \sigma_r A_{ef} = 3\,700 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}7^2}{4} = 1\,420 \text{ daN}.$$

1.8. Capacul cilindrului unui motor este fixat prin $n = 6$ buloane. Diametrul interior al cilindrului este $D = 250$ mm, iar presiunea maximă în cilindru $p_{max} = 20$ daN/cm². Să se calculeze diametrul buloanelor, luînd $\sigma_a = 600$ da N/cm².
Rezolvare. Suprafaţa fundului cilindrului A are valoarea:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 25^2}{4} = 490 \text{ cm}^2.$$

Forţa maximă care apasă pe capac este:

$$N = A \cdot p_{max} = 490 \cdot 20 = 9\,800 \text{ daN}.$$

Secţiunea totală necesară pentru buloane este:

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} = \frac{9\,800}{600} = 16{,}3 \text{ cm}^2.$$

Secţiunea necesară a unui bulon:

$$A_{1\,nec} = \frac{A_{nec}}{n} = \frac{16{,}3}{6} = 2{,}72 \text{ cm}^2.$$

Corespunde un bulon M24 cu secţiunea efectivă:

$$A_{ef} = 3{,}089 \text{ cm}^2.$$

1.9. Cum trebuie făcută reţeţarea grinzii din figura 1.9 dacă $a = 35$ cm, reacţiunea $V = 60$ kN, profilul I 30 şi zidul are rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 7$ daN/cm² ?

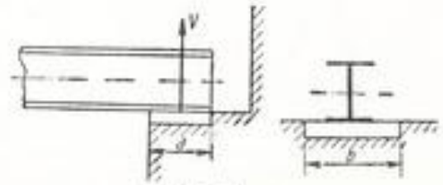


Fig. 1.9.

Rezolvare. Suprafaţa de rezemare necesară este:

$$A_{nec} = \frac{V}{\sigma_a} = \frac{6\,000}{7} = a \cdot b; \quad b = \frac{A_{nec}}{a} = \frac{6\,000}{7 \cdot 35} = 24{,}5 \text{ cm}.$$

Lăţimea profilului I 30 fiind de 12,5 cm (anexa 10), este necesară o placă de reazem între profil şi zid care să aibă lăţimea $b = 24{,}5$ cm.

1.10. Un cablu de oţel suportă o sarcină de întindere $N = 42$ kN. Din cîte fire cu diametrul de 1 mm trebuie să fie făcut, dacă se ia $\sigma_a = 1\,500$ daN/cm²?

Rezolvare. d fiind diametrul unui fir şi n numărul de fire:

$$N = \frac{\pi d^2}{4}\sigma_a \cdot n; \quad n = \frac{N}{\frac{\pi d^2}{4}\sigma_a} = \frac{4\,200}{\frac{9 \cdot 0{,}1^2}{4} \cdot 1\,500} = 356 \text{ fire}.$$

Se alege un cablu standardizat cu şase toroane de cîte 61 fire, după STAS 1353-66.

1.11. La bara de oţel din figura 1.11 se dau: $l_1 = 0{,}6$ m; $l_2 = 0{,}4$ m; $l_3 = 0{,}5$ m; $l_4 = 0{,}5$ m; $A_1 = 3$ cm²; $A_2 = 5$ cm².

Se cere:

a) Să se verifice bara, ştiind că $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm²;

b) Să se calculeze deformaţia totală a barei.

Rezolvare. a) Pentru determinarea secţiunii periculoase se trasează diagrama forţelor axiale (Fig. 1.11).

$$N_{ab} = +20 \text{ kN}; \; N_{bd} = 20 - 50 = -30 \text{ kN},$$

$$N_{de} = 20 - 50 + 60 = +30 \text{ kN}.$$

Verificarea se face în porţiunea bc a barei, deoarece efortul axial este maxim, iar aria secţiunii, minimă:

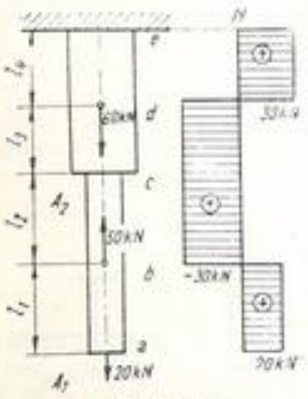


Fig. 1.11

$$\sigma_{bc} = \frac{N_{bc}}{A_1} = -\frac{3\,000}{3} = -1\,000 \text{ daN/cm}^2;$$

$$|\sigma_{bc}| < \sigma_a.$$

b) Calculul deformaţiei trebuie făcut pe porţiuni, deoarece relaţia (1.4) este valabilă numai pentru o bară de secţiune constantă, solicitată de un efort constant în lungul ei:

$$\Delta_{ab} = \frac{N_{ab} \cdot l_1}{EA_1} = \frac{2\,000 \cdot 60}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 3} = 0{,}019 \text{ cm},$$

$$\Delta_{bc} = \frac{N_{bd} \cdot l_2}{EA_1} = -\frac{3\,000 \cdot 40}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 3} = -0{,}019 \text{ cm},$$

$$\Delta_{cd} = \frac{N_{bd} \cdot l_3}{EA_2} = -\frac{3\,000 \cdot 50}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 5} = -0{,}0143 \text{ cm},$$

$$\Delta_{de} = \frac{N_{de} \cdot l_4}{EA_2} = \frac{3\,000 \cdot 50}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 5} = 0{,}0143 \text{ cm}.$$

Deformaţia totală este suma:

$$\Delta l = 0{,}019 - 0{,}019 - 0{,}0143 + 0{,}0143 = 0.$$

Capătul inferior al barei nu se deplasează.

1.12. Să se verifice efortul unitar produs în diagonala unei grinzi cu zăbrele ca în figura 1.12 compusă din două corniere LL 75 × 100 × 7 (anexa 8), prinsă de guseu cu trei nituri de diametru 23 mm, ştiind că $N = 300$ kN.

Rezolvare. Secţiunea periculoasă este în dreptul primei găuri de nit:

$$A_b = 11{,}9 \cdot 2 = 23{,}8 \text{ cm}^2;$$

$$A_n = 23{,}8 - 0{,}7 \cdot 2{,}3 \cdot 2 = 20{,}58 \text{ cm}^2;$$

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_n} = \frac{30\,000}{20{,}58} = 1\,457 \text{ daN/cm}^2.$$

1.13. Secţiunea unei tije de piston, slăbită prin pană, are forma din figura 1.13. Să se dimensioneze tija pentru o forţă $N = 100$ kN, luînd $\sigma_a = 800$ daN/cm².

Rezolvare.

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} = \frac{10\,000}{800} = 12{,}5 \text{ cm}^2; \quad A_n = \frac{\pi d^2}{4} - d\frac{d}{4} = 12{,}5;$$

$$d^2 = \frac{4 \cdot 12{,}5}{2{,}14} = 23{,}4 \text{ cm}^2;$$

$$d = 4{,}83 \text{ cm}; \quad \text{se alege: } d = 50 \text{ mm}.$$

1.14. Să se verifice la întindere o piesă de oţel avînd forma şi dimensiunile din figura 1.14, dacă $P = 5\,000$ daN. Se va neglija efectul de concentrare al găurilor şi al variaţiei de secţiune. Cotele sînt date în milimetri.

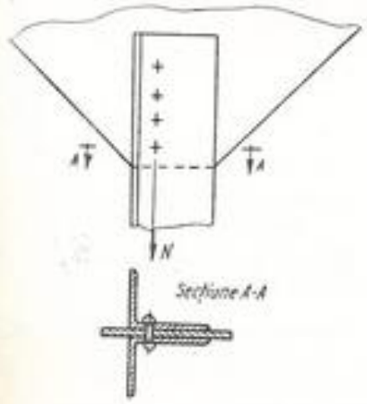


Fig. 1.12

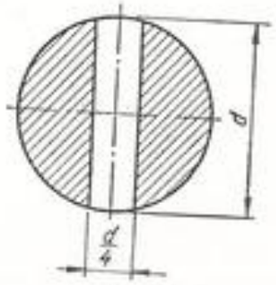


Fig. 1.13

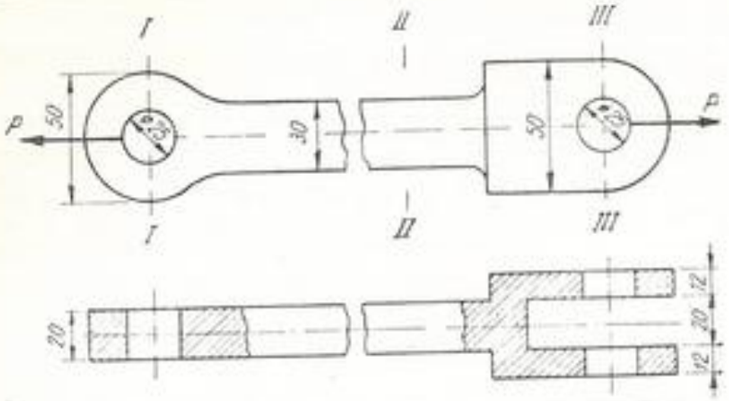


Fig. 1.14

Rezolvare. Se face verificarea în secţiunile *I, II, III.*

$$\sigma_I = \frac{5\,000}{(5 - 2{,}5) \cdot 2} = 1\,000 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_{II} = \frac{5\,000}{3 \cdot 2} = 833 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{III} = \frac{5\,000}{2(5 - 2{,}5) \cdot 1{,}2} = 833 \text{ daN/cm}^2.$$

Secţiunea *I* este cea mai solicitată.

1.15. Un ochi de macara, cu forma şi dimensiunile principale indicate în figura 1.15, este încărcat cu sarcina $Q = 500$ kN. Să se dimensioneze eclisele E care formează braţele AB şi AC ale ochiului de macara, luînd $\sigma_a = 800$ daN/cm².

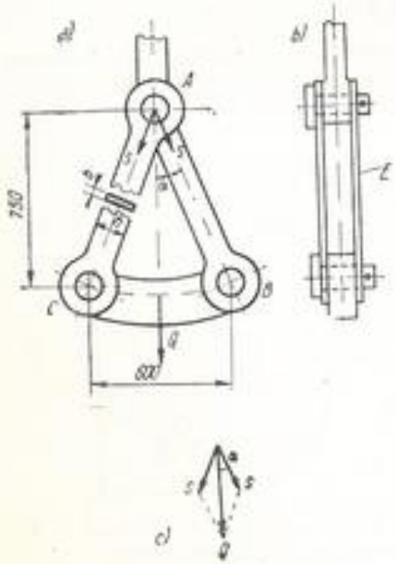


Fig. 1.15

Rezolvare. Conform figurii 1.15:

$$Q = 2S \cos \alpha; \ \text{tg}\, \alpha = \frac{300}{750} = 0{,}4;$$

$$\alpha = 21°48'; \ \cos \alpha = 0{,}9285;$$

$$S = \frac{Q}{2 \cos \alpha} = \frac{500}{2 \cdot 0{,}9285} = 269 \text{ kN}.$$

Braţul AB este format din două eclise de secţiune totală $2\,bh$.

$$A_{nec} = \frac{S}{\sigma_a} = \frac{26\,900}{800} = 33{,}6 \text{ cm}^2;$$

$$A_{nec} = 2\,bh = 33{,}6 \text{ cm}^2;$$

$$bh = \frac{33{,}6}{2} = 16{,}8 \text{ cm}^2.$$

Pentru determinarea dimensiunilor b şi h se alege ca raport între ele $h = 4b$.

$$bh = b \cdot 4b = 4\,b^2 = 16{,}8;$$

$$b = \sqrt{\frac{16{,}8}{4}} = 2{,}05 \text{ cm}; \quad h = 4b = 8{,}20 \text{ cm}.$$

Se rotunjesc dimensiunile la milimetri întregi:

$$b = 21 \text{ mm}; \ h = 82 \text{ mm}.$$

$$A_{ef} = 2bh = 2 \cdot 2{,}1 \cdot 8{,}2 = 34{,}4 \text{ cm}^2;$$

$$\sigma_{ef} = \frac{S}{A_{ef}} = \frac{26\,900}{34{,}4} = 782 \text{ daN/cm}^2.$$

1.16. O bară de oţel de lungime $l = 1$ m, cu o secţiune circulară, de diametru $D = 40$ mm, este subţiată pe o lungime $l_1 = 20$ cm la diametrul $d = 20$mm. Ştiind că $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm², se cere: *a)* să se determine efortul axial de întindere capabil; *b)* să se calculeze energia de deformaţie acumulată de bară; *c)* ce procent din energia totală de deformaţie se acumulează în porţiunea de bară subţiată?

Rezolvare. a) Ariile secţiunilor transversale:

$$A_1 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 4^2}{4} = 12{,}56 \text{ cm}^2; \quad A_2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 2^2}{4} = 3{,}14 \text{ cm}^2.$$

Secţiunea minimă ($A_2 = 3{,}14$ cm²) determină efortul axial de întindere capabil:

$$N_{cap} = A_2 \cdot \sigma_a = 3{,}14 \cdot 1\,400 = 4\,400 \text{ daN}.$$

b) Energia de deformaţie acumulată de bară se calculează cu formula (1.7):

$$L = \frac{1}{2} \int \frac{N^2 dx}{EA} = \frac{1}{2} \frac{N^2(l - l_1)}{EA_1} + \frac{1}{2} \frac{N^2 l_1}{EA_2}.$$

Se obţine:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\,400^2 \cdot 80}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 12{,}56} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\,400^2 \cdot 20}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 3{,}14} = 29{,}3 + 29{,}3 = 58{,}6 \text{ daN} \cdot \text{cm}.$$

c) Energia de deformaţie acumulată de porţiunea subţiată a barei reprezintă:

$$\frac{29{,}3}{58{,}6} \cdot 100 = 50\% \text{ din energia totală.}$$

Deşi porţiunea subţiată reprezintă numai a 5-a parte din lungimea barei, ea acumulează jumătate din energia totală de deformare a barei.

1.17. Să se dimensioneze din OL 60 tija pistonului unei maşini cu abur cu dublu efect, ştiind că diametrul pistonului este $D = 500$ mm, iar presiunea maximă în cilindru $p = 14$ daN/cm². Nu se va ţine seama de flambaj.

Rezolvare. Maşina fiind cu dublu efect, tija este solicitată alternativ la întindere şi la compresiune.

Se alege din anexa 19 pentru OL60, $\sigma_a = 500$ daN/cm².

Forţa maximă în tijă:

$$N = \frac{\pi D^2}{4} p = \frac{\pi \cdot 50^2}{4} \cdot 14 = 27\,500 \text{ daN}.$$

Secţiunea tijei pistonului:

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} = \frac{27\,500}{500} = 55 \text{ cm}^2.$$

Diametrul tijei d rezultă din relaţia $\pi d^2/4 = 55$ cm².

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 55}{\pi}} = 8{,}37 \text{ cm}.$$

Se ia dimensiunea rotunjită $d = 8{,}5$ cm.

1.18. Să se dimensioneze tirantul AB din figura 1.18 făcut din oţel pătrat, dacă se ia $\sigma_a = 1\,000$ daN/cm².

Rezolvare. Din ecuaţia de proiecţii pe orizontală, în nodul A se obţine:

$$T \sin 30° = F,$$

$$T = \frac{F}{\sin 30°} = \frac{2\,000}{\frac{1}{2}} = 4\,000 \text{ daN}.$$

Secţiunea necesară a tirantului este:

$$A_{nec} = \frac{T}{\sigma_a} = \frac{4\,000}{1\,000} = 4 \text{ cm}^2; \; a^2 = 4 \text{ cm}^2; \quad a = 2 \text{ cm}.$$

1.19. Două bare de oţel identice AB şi CB cu lungimea $l = 4{,}50$ m, articulate în punctele A, B, C (Fig. 1.19) sînt solicitate de forţa verticală

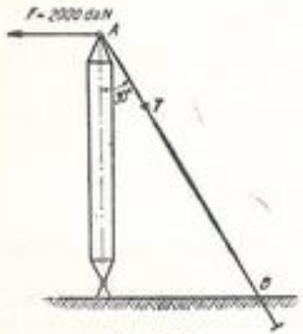


Fig. 1.18

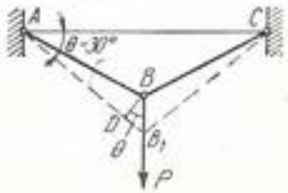


Fig. 1.19

$P = 3\,500$ daN. Se cere să se dimensioneze barele cu $\sigma_a = 1\,000$ daN/cm² şi să se determine deplasarea pe verticală a punctului B.

Rezolvare. Fie N efortul într-o bară:

$$2N \sin 30° = P; \quad N = \frac{P}{2 \sin 30°} = P = 3\,500 \text{ daN};$$

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} = \frac{3\,500}{1\,000} = 3{,}5 \text{ cm}^2.$$

Datorită forţei P, punctul B ajunge în B_1:

$$\overline{DB_1} = \Delta\overline{AB} = \frac{Nl}{EA} = \frac{3\,500 \cdot 450}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 3{,}5} = 0{,}214 \text{ cm};$$

$$\sphericalangle DBB_1 = \theta = 30°; \quad \overline{BB_1} = \frac{\overline{B_1D}}{\sin \theta} = \frac{0{,}214}{\sin 30°} = 0{,}428 \text{ cm}.$$

1.20. Sistemul din figura 1.20, format din două bare de oţel: AB cu secţiunea $A_1 = 2$ cm² şi lungimea $l_1 = 5$ m şi CB cu secţiunea $A_2 = 1$ cm² şi lungimea $l_2 = 8{,}66$ m, articulate în A, B şi C, este solicitat de forţa $P = 2\,000$ daN. Să se verifice barele şi să se calculeze deplasarea pe verticală şi pe orizontală a punctului B.

Rezolvare. N_1 şi N_2 sînt eforturile în cele două bare. Din ecuaţiile de proiecţii:

$$N_1 \cos 30° + N_2 \cos 60° = P,$$

$$N_1 \sin 30° - N_2 \sin 60° = 0,$$

rezultă:

$$N_1 = P \cos 30° = 2\,000 \cdot 0{,}866 = 1\,730 \text{ daN},$$

$$N_2 = P \sin 30° = 2\,000 \cdot 0{,}5 = 1\,000 \text{ daN}.$$

Eforturile unitare în cele două bare sînt:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{1\,730}{2} = 865 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{1\,000}{1} = 1\,000 \text{ daN/cm}^2.$$

Barele se vor deforma cu Δl_1, respectiv Δl_2.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{A_1 E} = \frac{1\,730 \cdot 500}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 2} = 0{,}206 \text{ cm},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{A_2 E} = \frac{1\,000 \cdot 866}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 1} = 0{,}413 \text{ cm}.$$

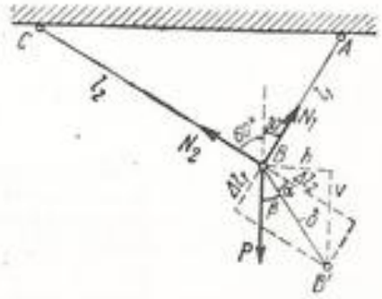


Fig. 1.20

Fig. 1.21

Deplasarea totală $\overline{BB'} = \delta$:

$$\delta = \sqrt{\Delta l_1^2 + \Delta l_2^2} = \sqrt{0{,}206^2 + 0{,}413^2} = 0{,}462 \text{ cm},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{0{,}206}{0{,}413} = 0{,}5; \quad \alpha = 26°30';$$

$$\beta = 60° - \alpha = 60° - 26°30' = 33°30'.$$

Deplasările pe orizontală şi pe verticală:

$$h = \delta \sin 33°30' = 0{,}462 \cdot 0{,}551 = 0{,}255 \text{ cm},$$

$$v = \delta \cos 33°30' = 0{,}462 \cdot 0{,}833 = 0{,}385 \text{ cm}.$$

1.21. Să se determine deformaţia totală a unei bare de oţel, cu diametrul de 30 mm, supusă sistemului de forţe din figura 1.21, în care $P_1 = 5\,000$ daN, $P_2 = 2\,400$ daN, $l = 900$ mm.

Rezolvare.

$$\Delta l = \frac{P_1 l}{AE} - \frac{P_2 \frac{l}{3}}{AE} = \frac{l}{AE}\left(P_1 - \frac{P_2}{3}\right) = \frac{90\left(5\,000 - \frac{2\,400}{3}\right)}{7{,}06 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6} = 0{,}0255 \text{ cm}$$

S-a presupus că toată bara este întinsă cu P_1, iar treimea mijlocie, comprimată cu P_2. La acelaşi rezultat se ajunge, dacă se consideră că treimile de la capete sînt întinse cu P_1, iar cea mijlocie cu $P_1 - P_2$.

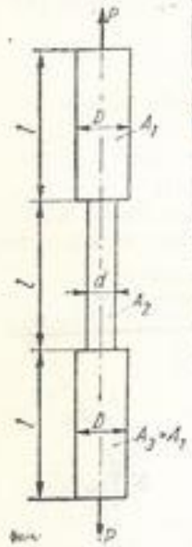


Fig. 1.22

1.22. Să se calculeze lungirea barei din figura 1.22, întinsă cu o forţă $P = 20$ kN, dacă: $l = 5$ m; $d = 1{,}5$ cm; $D = 2{,}5$ cm şi $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm².

Rezolvare.

$$\Delta l_1 = \frac{Pl}{A_1 E} = \frac{2\,000 \cdot 500}{4{,}91 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6} = 0{,}097 \text{ cm},$$

$$\Delta l_2 = \frac{Pl}{A_2 E} = \frac{2\,000 \cdot 500}{1{,}77 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6} = 0{,}269 \text{ cm},$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_1 = 0{,}097 \text{ cm},$$

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{3} \Delta l_i = 0{,}463 \text{ cm}.$$

1.23. Grinda rigidă BD din figura 1.23 este susţinută în poziţie orizontală prin două fire de oţel: AB de lungime a şi CD de lungime b. Dacă A_1 este secţiunea firului AB, se cere secţiunea A_2 a firului CD, astfel încît în urma deformaţiilor cauzate de forţa P, grinda BD să rămînă în poziţie orizontală. Aplicaţie numerică: $a = 10$ m, $b = 20$ m, $A_1 = 3$ cm².

Rezolvare. Din ecuaţiile de echilibru:

$$T_B + T_D = P; \quad T_D l - \frac{3}{4} Pl = 0;$$

rezultă:

$$T_D = \frac{3}{4} P; \quad T_B = \frac{P}{4}.$$

Pentru ca bara BD să rămînă orizontală, trebuie ca lungirile celor două fire să fie egale.

$$\frac{P}{4} a \cdot \frac{1}{EA_1} = \frac{3P}{4} b \cdot \frac{1}{EA_2};$$

$$\frac{a}{A_1} = \frac{3b}{A_2}; \quad A_2 = \frac{3b}{a} A_1.$$

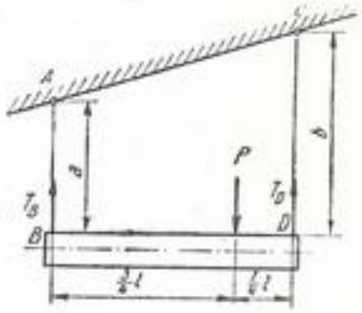


Fig. 1.23

Aplicaţie numerică:

$$A_2 = 3 \cdot \frac{20}{10} \cdot 3 = 18 \text{ cm}^2.$$

1.24. Un profil I 40, lung de 15 m, este aşezat orizontal pe sol, (avînd coeficientul de frecare $\mu = 0{,}45$) şi este tras de la o extremitate cu forţa N (Fig. 1.24).

Se cere: *a)* Să se determine valoarea limită a forţei N pînă la care profilul nu se mişcă.

b) Să se calculeze deformaţia datorită acestei forţe.

c) Să se determine variaţia eforturilor unitare în lungul piesei.

Rezolvare. a). Datorită greutăţii profilului, solul dezvoltă reacţiuni uniform repartizate, $p = 92{,}6$ daN/m (anexa 10). La o tendinţă de mişcare acestea produc o serie de forţe de frecare. Pe o lungime dx, forţa de frecare elementară este $dF = \mu p . dx$, unde $p . dx$ este reacţiunea solului. Forţa totală este:

$$N = \int_0^l dF = \int_0^l \mu p \, dx = \mu p \int_0^l dx = \mu p l = 0{,}45 \cdot 92{,}6 \cdot 15 = 625 \text{ daN}.$$

b) Lungirea unui element infinit mic dx este:

$$\Delta dx = \varepsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx,$$

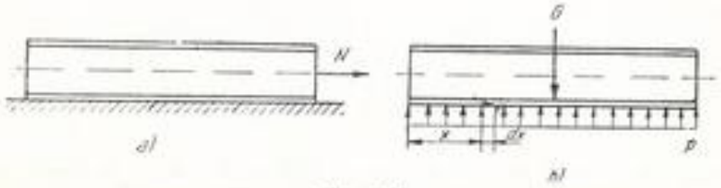


Fig. 1.24

σ_x fiind efortul unitar într-o secţiune la distanţa x de capăt. Forţa axială, efortul unitar şi deformaţia în secţiunea x, sînt:

$$N_x = \mu p x; \quad \sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{\mu p x}{A}; \quad \Delta dx = \frac{\mu p x}{AE} dx;$$

Deformaţia totală este

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dx = \int_0^l \frac{\mu p x}{AE} dx = \frac{\mu p l^2}{2AE} = \frac{Nl}{2AE} = \frac{625 \cdot 1\,500}{2 \cdot 118 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6} = 0{,}0019 \text{ cm}.$$

c) Efortul unitar variază liniar cu x, fiind zero cînd $x = 0$ şi avînd valoarea maximă pentru $x = l$:

$$\sigma_{max} = \frac{\mu p l}{A} = \frac{N}{A} = \frac{625}{118} = 5{,}30 \text{ daN/cm}^2.$$

1.25. Să se calculeze lungirea unui trunchi de con suspendat vertical, ca în figura 1.25 şi solicitat la întindere cu o forţă P. Se va neglija greutatea proprie.

Rezolvare. $\Delta dx = \varepsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx$,

$$\sigma_x = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}}; \quad \Delta dx = \frac{P}{E\frac{\pi d^2}{4}} dx,$$

$$\Delta l = \int_0^h \Delta dx = \frac{4P}{E\pi}\frac{dx}{d^2} = \frac{4P}{E\pi}\int_0^h \frac{dx}{d^2}.$$

Diametrul d la distanţa x este:

$$d = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{h} x.$$

Se obţine:

$$\Delta l = \frac{4P}{E\pi}\int_0^h \frac{dx}{\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{h} x\right)^2} = \frac{4P}{E\pi} \cdot \frac{h}{d_2 - d_1}\left|\frac{-1}{d_1 + \frac{d_2 - d_1}{h} x}\right|_0^h = \frac{4Ph}{\pi d_1 d_2 E}.$$

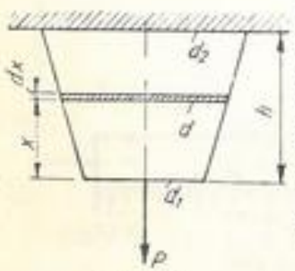


Fig. 1.25

1.26. Să se determine, în funcţie de adîncimea x, legea de variaţie a eforturilor unitare de compresiune în pila unui pod, sub acţiunea greutăţii proprii. Dimensiunile pilei sînt arătate în figura 1.26, cotele fiind date în metri. Greutatea specifică a materialului din care este alcătuită pila (beton simplu) este $\gamma = 22$ kN/m³.

Rezolvare. La adîncimea x, dimensiunile secţiunii orizontale sînt:

$$b = 4 + 2 \cdot 0{,}2x = 4 + 0{,}4x = 4(1 + 0{,}1\,x),$$
$$h = 2 + 2 \cdot 0{,}1x = 2 + 0{,}2x = 2(1 + 0{,}1\,x).$$

Aria secţiunii orizontale este:

$$A = bh = 8\,(1 + 0{,}1\,x)^2.$$

Volumul deasupra acestei secţiuni este:

$$V = 4 \cdot 2x + 2 \cdot \left[\frac{0{,}1x^2}{2} \cdot 4\right] + 2 \cdot \left[\frac{0{,}2x^2}{2} \cdot 2\right] +$$
$$+ 4 \cdot \left[\frac{1}{3}\,0{,}1x \cdot 0{,}2x \cdot x\right] = 8x + 0{,}8x^2 + \frac{0{,}08}{3}x^3.$$

Efortul unitar în secţiunea de la adîncimea x este:

$$\sigma = \frac{22\left(8x + 0{,}8x^2 + \frac{0{,}08}{3}x^3\right)}{8(1 + 0{,}1x)^2} =$$
$$= 7{,}33\,\frac{3x + 0{,}3x^2 + 0{,}01x^3}{(1 + 0{,}1x)^2}.$$

Derivînd în raport cu x, se obţine:

$$\frac{d\sigma}{dx} = 0{,}00733\,\frac{3\,000 + 300x + 30x^2 - x^3}{(1 + 0{,}1x)^3}.$$

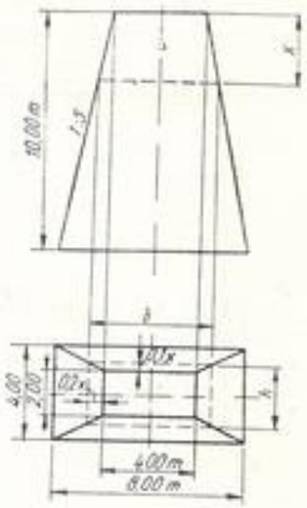


Fig. 1.26

Derivata este pozitivă pentru $0 < x < 39{,}5$ m. Eforturile unitare σ cresc pe toată înălţimea pilei. Efortul unitar maxim are loc la nivelul fundaţiei, pentru $x = 10$ m

$$\sigma_{max} = 128 \text{ kN/m}^2 = 1{,}28 \text{ daN/cm}^2.$$

1.27. Să se determine efortul unitar şi deformaţiile într-o tijă de oţel verticală de lungime $l = 100$ m şi diametru $d = 2$ cm, întinsă de o forţă $P = 20$ kN, ţinînd seama de greutatea proprie. Se dă $\gamma = 7{,}8$ daN/dm³.

Rezolvare. Se aplică formula (1.8):

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \gamma l = \frac{2\,000}{\frac{\pi \cdot 2^2}{4}} + \frac{7{,}8}{1\,000} \cdot 10\,000 = 714 \text{ daN/cm}^2.$$

Deformaţia se obţine din formula (1.10):

$$\Delta l = \frac{\left(P + \frac{Al\gamma}{2}\right)l}{EA} = \frac{\left(2\,000 + \frac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 10\,000 \cdot \frac{7{,}8}{1\,000}\right)10\,000}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 3{,}14} = 3{,}22 \text{ cm}.$$

1.28. Să se dimensioneze o tijă de oţel, lungă de 100 m, cu secţiune circulară, care trebuie să suporte un efort de întindere pulsant, de valoare

maximă $Q = 100$ kN, ţinînd seamă şi de greutatea proprie. Se dă greutate specifică $\gamma = 7{,}8$ daN/dm³.

Rezolvare. Pentru efort pulsant, se alege rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 600$ daN/cm² (anexa 19). Se aplică formula (1.9):

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_a - \gamma l} = \frac{10\,000}{600 - \frac{7{,}8}{1\,000} \cdot 10\,000} = 19{,}2 \text{ cm}^2,$$

$$\frac{\pi d^2}{4} = 19{,}2 \text{ cm}^2; \quad d = 4{,}94 \text{ cm}.$$

Se rotunjeşte diametrul la $d = 50$ mm.

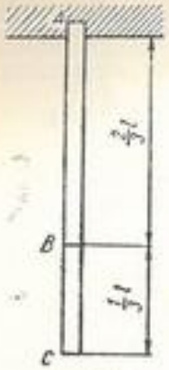


Fig. 1.29

1.29. O tijă de oţel de lungime $l = 200$ m este suspendată ca în figura 1.29. Să se găsească deplasarea punctului B, aflat la $l/3$ de la capătul de jos.

Rezolvare. Deplasarea punctului B va fi:

$$\Delta_{AB} = \frac{\gamma\left(\frac{2l}{3}\right)^2}{2E} + \frac{\left(\gamma \frac{l}{3} A\right) \cdot \frac{2l}{3}}{EA} = \frac{4\gamma l^2}{9E},$$

$$\Delta_{AB} = \frac{4 \cdot \frac{7{,}8}{1\,000} \cdot 20\,000^2}{9 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6} = 0{,}66 \text{ cm}.$$

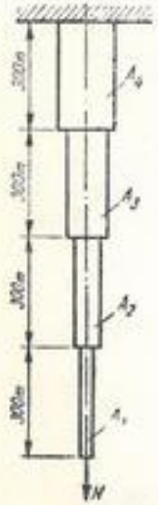


Fig. 1.30

1.30. Să se determine secţiunile unei tije de oţel (Fig. 1.30) lungă de 1 200 m, compusă din patru porţiuni care înlocuiesc bara de egală rezistenţă, supusă unei sarcini de întindere $N = 25$ kN, precum şi lungirea sa totală. Se dă $\sigma_a = 700$ daN/cm² şi $\gamma = 7{,}8$ daN/dm³.

Rezolvare. Aplicînd formula (1.9), se găseşte:

$$A_{1nec} = \frac{N}{\sigma_a - \gamma l_1} = \frac{2\,500}{700 - 7{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 30\,000} = 5{,}37 \text{ cm}^2,$$

$$A_{2nec} = \frac{N + A_1 \gamma l_1}{\sigma_a - \gamma l_2} = \frac{2\,500 + 1\,250}{466} = 8{,}05 \text{ cm}^2,$$

$$A_{3nec} = \frac{3\,750 + 1\,880}{466} = 12{,}05 \text{ cm}^2,$$

$$A_{4nec} = \frac{5\,630 + 2\,820}{466} = 18{,}13 \text{ cm}^2.$$

Din formula (1.10):

$$\Delta l_1 = \frac{1}{E}\left(\frac{N}{A} + \frac{\gamma l_1}{2}\right) l_1 =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^4}{2{,}1 \cdot 10^6}\left[\frac{2\,500}{5{,}37} + \frac{7{,}8 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 3 \cdot 10^4\right] = 8{,}33 \text{ cm}.$$

$$\Delta l_2 = \frac{3 \cdot 10^4}{2{,}1 \cdot 10^6}\left[\frac{3\,750}{8{,}05} + \frac{7{,}8 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 3 \cdot 10^4\right] = 8{,}33 \text{ cm},$$

$$\Delta l_3 = \frac{3 \cdot 10^4}{2{,}1 \cdot 10^6}\left[\frac{5\,630}{12{,}05} + \frac{7{,}8 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 3 \cdot 10^4\right] = 8{,}33 \text{ cm},$$

$$\Delta l_4 = \frac{3 \cdot 10^4}{2{,}1 \cdot 10^6}\left[\frac{8\,450}{18{,}13} + \frac{7{,}8 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 3 \cdot 10^4\right] = 8{,}33 \text{ cm},$$

$$\Delta l = \Sigma \Delta l_i = 4 \cdot 8{,}33 = 33{,}32 \text{ cm}.$$

Deformaţiile celor patru porţiuni de bară sînt egale, deoarece pentru fiecare din ele σ, ε şi l au aceeaşi valoare.

1.31. Care este înălţimea maximă pe care o poate avea un zid de cărămidă, astfel încît sub greutatea proprie să nu se depăşească rezistenţa sa admisibilă? Se dau: $\sigma_a = 10$ daN/cm²; $\gamma = 1\,600$ daN/m³.

Rezolvare. Efortul unitar maxim se produce în secţiunea cea mai de jos a zidului.

Dacă h este înălţimea necunoscută a zidului, d grosimea lui, γ greutatea specifică, σ_a rezistenţa admisibilă, pentru un zid de lungime l rezultă:

$$\sigma_a = \frac{G}{A} = \frac{hdl\gamma}{dl} = h\gamma,$$

$$h = \frac{\sigma_a}{\gamma} = \frac{10}{\frac{1{,}6}{1\,000}} = 6\,250 \text{ cm} = 62{,}5 \text{ m}.$$

Observaţie. Din motive constructive, zidăria de cărămidă nu se face, în practică, de o înălţime atît de mare.

1.32. Un stîlp prismatic de zidărie, construit ca în figura 1.32, este solicitat la compresiune cu forţa $P = 270$ kN. Înălţimea stîlpului este $l = 12$ m. Dacă se dă $\gamma = 1\,600$ daN/m³ şi $\sigma_a = 10$ daN/cm² se cere să se determine volumul stîlpului şi să se compare cu un stîlp solicitat identic în secţiunea periculoasă, dar de secţiune constantă.

Rezolvare. Se aplică formula (1.9):

$$A_{1nec} = \frac{P}{\sigma_a - \gamma \frac{l}{2}} = \frac{27\,000}{10 - 1\,600 \cdot 10^{-4} \cdot 600} \approx 3\,000 \text{ cm}^2,$$

$$V_1 = 0{,}3 \cdot 6 = 1{,}800 \text{ m}^3; \; G_1 = 1{,}800 \cdot 1\,600 = 2\,880 \text{ daN},$$

$$A_{2nec} = \frac{P + G_1}{\sigma_a - \gamma \frac{l}{2}} = \frac{27\,000 + 2\,880}{10 - 1\,600 \cdot 10^{-4} \cdot 600} = 3\,310 \text{ cm}^2,$$

$$V_2 = 0{,}331 \cdot 6 = 1{,}986 \text{ m}^3; \quad G_2 = 1{,}986 \cdot 1\,600 = 3\,180 \text{ daN},$$

$$V = 1{,}800 + 1{,}986 = 3{,}786 \text{ m}^3.$$

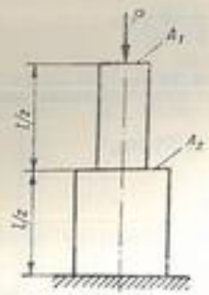


Fig. 1.32

În cazul stîlpului de secţiune constantă:

$$V = \frac{Pl}{\sigma_a - \gamma l} = \frac{27\,000 \cdot 12}{100\,000 - 1\,600 \cdot 12} = 4{,}000 \text{ m}^3.$$

Această soluţie este neeconomică, deoarece cere cu 5% mai multă zidărie.

1.33. Un stîlp de fontă A, cu secţiunea inelară, este încărcat cu o forţă axială $N = 250$ kN şi se sprijină ca în figura 1.33. Între cele două diametre există relaţia $d = 0{,}8\ D$. La baza stîlpului se află o placă de fontă B, cu baza un pătrat de latură a, care are rolul de a mări suprafaţa prin care fonta apasă pe beton, pentru a nu se depăşi rezistenţa admisibilă a betonului. La rîndul său, fundaţia de beton C are o secţiune mai mare, un pătrat de latură b, spre a nu se depăşi rezistenţa admisibilă a terenului. Se cere să se dimensioneze secţiunea stîlpului, suprafaţa bazei plăcii B şi secţiunea fundaţiei C, ţinînd seamă şi de greutatea proprie. Se dau: $h = 5$ m, $c = a/2$, $e = b/2$,

$$\sigma_{a\ fontă} = 700 \text{ daN/cm}^2,\ \sigma_{a\ beton} = 45 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{a\ teren} = 3 \text{ daN/cm}^2,\ \gamma_{fontă} = 7{,}25 \text{ daN/dm}^3,$$

$$\gamma_{beton} = 2\,200 \text{ daN/m}^3.$$

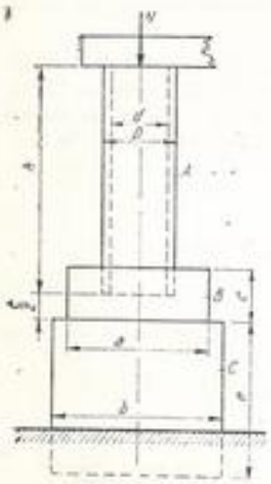


Fig. 1.33

Rezolvare. Se dimensionează stîlpul de fontă:

$$A'_{nec} = \frac{N}{\sigma_a - \gamma_{fontă}\, h} = \frac{25\,000}{700 - \frac{7{,}25}{1\,000} \cdot 500} = 35{,}9 \text{ cm}^2.$$

Influenţa greutăţii proprii este neglijabilă.

$$A' = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}\left[D^2 - (0{,}8\,D)^2\right] = 35{,}9 \text{ cm}^2.$$

Se obţine:

$$D = 11{,}3 \text{ cm}$$

sau, cu valori rotunjite:

$$D = 11{,}5 \text{ cm};\quad d = 0{,}8\ D = 9{,}2 \text{ cm}.$$

Greutatea stîlpului este:

$$G_A = \left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}\right)\gamma h =$$

$$= \left(\frac{\pi \cdot 11{,}5^2}{4} - \frac{\pi \cdot 9{,}2^2}{4}\right)\frac{7{,}25}{1\,000} \cdot 500 = 136 \text{ daN}.$$

Placa de fontă se dimensionează aproximînd greutatea ei la $G_B = 50$ daN; rezultă:

$$A''_{nec} = \frac{N + G_A + G_B}{\sigma_{a\ beton}} = \frac{25\,000 + 136 + 50}{45} = 560 \text{ cm}^2;$$

$$a^2 = 560 \text{ cm}^2;\qquad a = 23{,}7 \text{ cm}.$$

Se ia:

$$a = 24 \text{ cm};\quad c = \frac{a}{2} = 12 \text{ cm}.$$

Greutatea reală a plăcii B este:

$$G_B = a^2 c \gamma_{fontă} = 24^2 \cdot 12 \cdot \frac{7{,}25}{1\,000} = 50 \text{ daN},$$

ceea ce corespunde cu aproximaţia făcută.

Pentru secţiunea fundaţiei de beton, ţinînd seama de greutatea proprie, rezultă:

$$A'''_{nec} = \frac{N}{\sigma_a - \gamma l} = \frac{P + G_A + G_B}{\sigma_a - \gamma_{beton}\, l} = \frac{25\,000 + 136 + 50}{3 - 2{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{b}{2}} = b^2,$$

de unde:

$$1{,}1 \cdot 10^{-3} b^3 - 3b^2 + 25\,186 = 0.$$

Prin încercări rezultă $b = 93$ cm sau aproximînd:

$$b = 95 \text{ cm};\qquad c = 48 \text{ cm}.$$

$$G_C = 0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}48 \cdot 2\,200 = 955 \text{ daN}.$$

$$\sigma_{af} = \frac{N + G_A + G_B + G_C}{b^2} = \frac{25\,000 + 136 + 50 + 955}{95^2} = 2{,}9 \text{ daN/cm}^2 < 3 \text{ daN/cm}^2.$$

1.34. Un cablu de cupru, cu inima de oţel, este solicitat la întindere cu o forţă $N = 1\,800$ daN. Secţiunea necesară de cupru este de 1,256 cm², realizată prin 10 fire cu diametrul de 4 mm. Să se determine secţiunea inimii de oţel, luînd $\sigma_{a\ OL} = 1\,200$ daN/cm², şi să se verifice efortul unitar efectiv în firele de cupru. Se dau $E_{OL} = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm² şi $E_{Cu} = 1{,}15 \cdot 10^6$ da N/cm².

Rezolvare. Se aplică relaţia (1.11) sub forma:

$$A_{OL} = \frac{N}{\sigma_{a\ OL}} - A_{Cu}\frac{E_{Cu}}{E_{OL}} = \frac{1\,800}{1\,200} - 1{,}256 \cdot \frac{1{,}15 \cdot 10^6}{2{,}1 \cdot 10^6} = 0{,}82 \text{ cm}^2,$$

$$\sigma_{Cu} = \frac{N}{A_{Cu} + A_{OL}\frac{E_{OL}}{E_{Cu}}} = \frac{1\,800}{1{,}256 + 0{,}82 \cdot \frac{2{,}1 \cdot 10^6}{1{,}15 \cdot 10^6}} = 653 \text{ daN/cm}^2.$$

1.35. Un stîlp de beton armat, de înălţime $l = 5$ m, este supus unei forţe de compresiune $N = 400$ kN. Să se dimensioneze stîlpul prin metoda rezistentelor admisibile şi să se determine eforturile unitare din beton şi

oţel (fier) dacă se dau $A_f/A_b = 0{,}01$; $E_f/E_b = 15$; $\sigma_b = 40$ daN/cm². Să se calculeze scurtarea stîlpului Δl, sub acţiunea sarcinii.

Rezolvare. Pentru ca betonul şi oţelul să lucreze solidar, trebuie ca materialele să aibă deformaţii egale:

$$\Delta l = \frac{N_f l}{A_f E_f} = \frac{N_b l}{A_b E_b},$$

$$\frac{N_f}{A_f E_f} = \frac{N_b}{A_b E_b} = \frac{N_f + N_b}{A_f E_f + A_b E_b} = \frac{N}{A_f E_f + E_b A_b},$$

$$N_b = \frac{N}{1 + \frac{A_f E_f}{A_b E_b}}.$$

Se notează: $\varphi = A_f/A_b$ şi $n = E_f/E_b$,

$$N_b = \frac{N}{1 + \varphi n}; \quad \sigma_b = \frac{N_b}{A_b} = \frac{N}{(1 + \varphi n) A_b},$$

$$A_b = \frac{N}{(1 + \varphi n)\sigma_b}.$$

La fel:

$$N_f = \frac{N}{1 + \frac{E_b A_b}{E_f A_f}}; \quad \sigma_f = \frac{N_f}{A_f} = \frac{N}{\left(1 + \frac{1}{\varphi n}\right) A_f}.$$

În cazul aplicaţiei numerice:

$$A_b = \frac{N}{(1 + \varphi n)\sigma_b} = \frac{40\,000}{(1 + 0{,}01 \cdot 15)40} = 870 \text{ cm}^2.$$

Din motive constructive, se alege:

$$A_b = 30 \cdot 30 = 900 \text{ cm}^2; \quad A_f = 0{,}01 \cdot 900 = 9 \text{ cm}^2.$$

Se iau patru bare de oţel, cu diametrul $d = 18$ mm:

$$A_f = 10{,}18 \text{ cm}^2.$$

Verificarea eforturilor unitare:

$$\sigma_b = \frac{N}{\left(1 + \frac{A_f}{A_b} \cdot \frac{E_f}{E_b}\right) A_b} = \frac{40\,000}{\left(1 + \frac{10{,}18}{900} \cdot 15\right) 900} = 38 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_f = \frac{N}{\left(1 + \frac{A_b}{A_f} \cdot \frac{E_b}{E_f}\right) A_f} = \frac{40\,000}{\left(1 + \frac{900}{10{,}18} \cdot \frac{1}{15}\right) 10{,}18} = 570 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\Delta l = \frac{\sigma_b l}{E_b} = \frac{38 \cdot 500}{140\,000} = 0{,}136 \text{ cm}.$$

1.36. Un stîlp metalic, avînd secţiunea transversală alcătuită din două profile ⋃ 20, suportă o forţă axială de compresiune $P_1 = 600$ kN. În această situaţie, stîlpul este betonat. Noua secţiune transversală este un pătrat cu latura de 30 cm.

Se cere să se determine forţa axială maximă pe care o poate suporta stîlpul. Ce forţă ar fi suportat el, dacă nu ar fi fost betonat? Dar dacă ar fi fost betonat înainte de a se fi aplicat sarcina P_1?.

Rezolvare. Secţiunea transversală a stîlpului metalic are aria $A_{OL} = 2 \cdot 32{,}2 = 64{,}4$ cm². Aria secţiunii de beton[1] va fi $A_b = 30 \cdot 30 = 900$ cm². Sub acţiunea forţei P_1, stîlpul metalic se comportă ca o bară omogenă, iar pentru surplus ca o bară neomogenă.

Efortul unitar în stîlpul metalic, cînd acţionează forţa P_1 este:

$$\sigma_1 = \frac{60\,000}{64{,}4} = 932 \text{ daN/cm}^2.$$

Presupunînd rezistenţa admisibilă a oţelului $\sigma_{OL} = 1\,200$ daN/cm² şi rezistenţa admisibilă a betonului $\sigma_b = 40$ daN/cm², rezultă că sporul de forţă axială poate fi considerat că se aplică unei bare neomogene, avînd rezistenţa admisibilă în oţel de: $\sigma'_{OL} = 1\,200 - 932 = 268$ daN/cm² şi în beton de 40 daN/cm².

Considerînd $E_{OL} = 2\,100\,000$ daN/cm² şi $E_b = 140\,000$ daN/cm², se aplică formulele (1.11) sub forma:

$$\sigma'_{OL} = \frac{\Delta P'}{A_{OL} + \frac{E_b}{E_{OL}} A_b}, \quad \sigma_b = \frac{\Delta P''}{A_b + \frac{E_{OL}}{E_b} A_{OL}}.$$

S-au notat cu $\Delta P'$ şi $\Delta P''$ sporurile de sarcină preluate de stîlpul de beton armat în ipoteza că eforturile unitare din armătură, respectiv din beton, ating rezistenţele admisibile σ'_{OL}, respectiv σ_b. Sporul de sarcină va fi cea mai mică dintre valorile $\Delta P'$ şi $\Delta P''$.

Cu datele numerice rezultă:

$$\Delta P' = 268 \cdot \left[64{,}4 + \frac{140\,000}{2\,100\,000} \cdot 900\right] = 33\,300 \text{ daN} = 333 \text{ kN},$$

$$\Delta P'' = 40 \cdot \left[900 + \frac{2\,100\,000}{140\,000} \cdot 64{,}4\right] = 74\,700 \text{ daN} = 747 \text{ kN}.$$

Sarcina totală pe care o poate suporta stîlpul este:

$$P = P_1 + \Delta P' = 600 + 333 = 933 \text{ kN}.$$

Dacă nu ar fi fost betonat, stîlpul ar fi suportat o sarcină totală:

$$P_0 = A_{OL}\sigma_{OL} = 64{,}4 \cdot 1\,200 = 77\,300 \text{ daN} = 773 \text{ kN}.$$

[1] Nu se scade aria secţiunii de oţel înglobat în beton.

Dacă ar fi fost betonat înainte de a se fi aplicat sarcina P_1, stîlpul s-ar fi comportat de la început ca o bară neomogenă. Aplicînd formula (1.11) sub forma:

$$\sigma_{OL} = \frac{P_0'}{A_{OL} + \frac{E_b}{E_{OL}} A_b},$$

rezultă:

$$P_0' = 1\,200 \cdot \left[64{,}4 + \frac{140\,000}{2\,100\,000} \cdot 900\right] = 149\,500 \text{ daN} = 1495 \text{ kN}.$$

Aplicînd a doua formulă (1.11) sub forma:

$$\sigma_b = \frac{P_0''}{A_b + \frac{E_{OL}}{E_b} A_{OL}},$$

se obţine:

$$P_0'' = 40\left[900 + \frac{2\,100\,000}{140\,000} \cdot 64{,}4\right] = 74\,700 \text{ daN} = 747 \text{ kN}.$$

Sarcina pe care o poate suporta stîlpul este cea mai mică dintre valorile P_0' şi P_0'', adică 747 kN.

1.37. Dacă bara din figura 1,37, *a*, articulată la ambele capete, este de secţiune constantă, se cere:

a) să se calculeze reacţiunile din articulaţii;
b) să se construiască diagrama forţelor axiale;
c) să se dimensioneze bara din oţel, cu secţiunea inelară, avînd $d = 0{,}8\ D$ şi $\sigma_a = 800$ daN/cm²;
d) să se calculeze deplasarea punctului de aplicaţie al forţei N.

Rezolvare. a) $H_1 + H_2 = N$.

Ţinînd seama că deformaţia totală a barei este nulă, rezultă:

$$\frac{H_1 a}{EA} - \frac{H_2 b}{EA} = 0,$$

$$H_1 + H_2 = N; \quad H_1 a - H_2 b = 0,$$

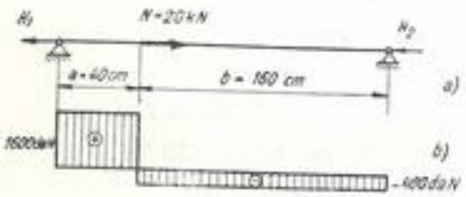


Fig. 1.37

$$H_1 = N\frac{b}{a+b}; \quad H_2 = N\frac{a}{a+b}.$$

Numeric, se obţine:

$$H_1 = 1\,600 \text{ daN};$$

$$H_2 = 400 \text{ daN}.$$

b) Diagrama de forţe axiale este reprezentată în figura 1,37, *b*.

c) $A_{nec} = \frac{H_1}{\sigma_a} = \frac{1\,600}{800\ \frac{daN}{cm^2}} = 2 \text{ cm}^2; \quad \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 2.$

Înlocuind $d = 0{,}8\ D$, se obţine:

$$D = 2{,}66 \text{ cm}; \quad d = 0{,}8 \cdot D = 0{,}8 \,.\, 2{,}66 = 2{,}12 \text{ cm}.$$

Se rotunjesc dimensiunile la: $D = 27$ mm; $d = 21$ mm.

d) $\Delta a = \frac{H_1 a}{EA} = \frac{1\,600 \cdot 40}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 2{,}7^2}{4} - \frac{\pi \cdot 2{,}1^2}{4}\right)} = 0{,}0135 \text{ cm}.$

1.38. O bară încastrată la ambele capete este solicitată prin forţele P_1 şi P_2, ca în figura 1.38. Să se determine reacţiunile R_1 şi R_2.

Aplicaţie numerică: $P_1 = 1\,000$ daN; $P_2 = 1\,800$ daN; $a = 100$ mm; $b = 150$ mm; $c = 200$ mm.

Rezolvare: Se aplică principiul suprapunerii efectelor.

Forţa P_1 produce reacţiunile R_1' şi R_2'.

$$R_1' = P_1\frac{b+c}{a+b+c}; \quad R_2' = P_1\frac{a}{a+b+c}.$$

Forţa P_2 produce reacţiunile:

$$R_1'' = P_2\frac{c}{a+b+c}; \quad R_2'' = P_2 \cdot \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Reacţiunile rezultante se obţin prin însumare:

$$R_1 = R_1' + R_1'' = \frac{1}{a+b+c}\,[P_1(b+c) + P_2 c],$$

$$R_2 = R_2' + R_2'' = \frac{1}{a+b+c}\,[P_1 a + P_2(a+b)].$$

Cu valorile numerice rezultă:

$$R_1 = \frac{1}{100 + 150 + 200}\,[1\,000(150 + 200) + 1\,800 \cdot 200] = 1\,578 \text{ daN},$$

$$R_2 = \frac{1}{100 + 150 + 200}\,[1\,000 \,.\, 100 + 1\,800(100 + 150)] = 1\,222 \text{ daN}.$$

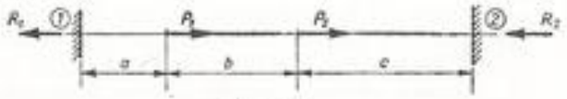


Fig. 1.38

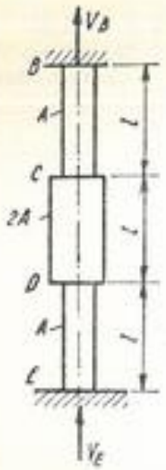


Fig. 1.39

Problema se putea rezolva direct, scriind că deformaţia totală a barei este nulă:

$$\frac{R_1 a}{EA} + \frac{(R_1 - P_1)b}{EA} + \frac{(R_1 - P_1 - P_2)c}{EA} = 0.$$

Această ecuaţie, împreună cu cea de proiecţii $R_1 - P_1 - P_2 + R_2 = 0$, dă aceleaşi soluţii ale problemei.

Problema se poate generaliza pentru un număr oarecare de forţe.

1.39. O bară de secţiune variabilă (Fig. 1.39) formată din trei porţiuni de lungimi egale l, avînd secţiunea A pe porţiunile BC şi DE şi $2A$ pe porţiunea CD, este rezemată în capetele B şi E. Să se afle cele două reacţiuni V_B şi V_E date de greutatea proprie a barei, γ fiind greutatea specifică a materialului.

Rezolvare.

$$V_B + V_E = Al\gamma + 2Al\gamma + Al\gamma = 4Al\gamma.$$

Dacă nu ar exista reazemul E, bara s-ar lungi cu:

$$\Delta' = \Delta_{BC} + \Delta_{CD} + \Delta_{DE}.$$

$$\Delta_{DE} = \frac{\gamma l^2}{2E}; \quad \Delta_{CD} = \frac{\gamma l^2}{2E} + \frac{(Al\gamma)l}{2EA} = \frac{\gamma l^2}{E},$$

$$\Delta_{BC} = \frac{\gamma l^2}{2E} + \frac{(Al\gamma + 2Al\gamma)l}{EA} = \frac{7\gamma l^2}{2E},$$

$$\Delta' = \frac{\gamma l^2}{2E} + \frac{\gamma l^2}{E} + \frac{7\gamma l^2}{2E} = \frac{5\gamma l^2}{E}.$$

Reacţiunea V_E produce o deformaţie de sens contrar:

$$\Delta'' = \frac{V_E l}{EA} + \frac{V_E l}{2EA} + \frac{V_E l}{EA} = \frac{5V_E l}{2EA}.$$

Deformaţiile Δ' şi Δ'' sînt egale:

$$\frac{5\gamma l^2}{E} = \frac{5V_E l}{2EA}; \quad V_E = 2Al\gamma; \quad V_B = 4Al\gamma - V_E = 2Al\gamma.$$

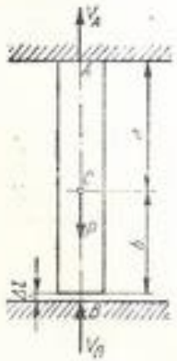


Fig. 1.40

1.40. O bară de oţel, de secţiune $A = 50$ cm², este solicitată de o forţă P, ca în figura 1.40. Ştiind că între capătul de jos al barei şi reazemul B este un spaţiu $\Delta l = 1$ mm, să se găsească la ce valoare a forţei P, capătul barei atinge rezeamul de jos. Să se determine reacţiunile în A şi B, atunci cînd forţa atinge valoarea $P' = 60\,000$ daN şi să se găsească eforturile unitare în bară. Se dau: $a = 250$ cm; $b = 200$ cm.

Rezolvare. a) Porţiunea AC este întinsă, iar porţiunea BC nu este solicitată, dacă se neglijează greutatea proprie a barei:

$$\Delta l = \frac{Pa}{EA},$$

$$P = \frac{EA\Delta l}{a} = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 0{,}1}{250} = 42\,000 \text{ daN},$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{42\,000}{50} = 840 \text{ daN/cm}^2.$$

b) Deoarece $P' > P$, capătul de jos al barei atinge reazemul B, deci problema devine static nedeterminată. Ecuaţia de proiecţii dă:

$$V_A + V_B = P'.$$

Suma deformaţiei porţiunii a (datorită forţei V_A) şi a porţiunii b (datorită forţei $V_A - P'$) trebuie să fie egală cu spaţiul Δl, reazemul B fiind fix:

$$\frac{V_A \cdot a}{EA} + \frac{(V_A - P')b}{EA} = \Delta l; \quad V_A = \frac{P'b + \Delta l \cdot EA}{a + b} = \frac{P'b + Pa}{a + b};$$

$$V_B = P' - V_A = \frac{(P' - P)a}{a + b}.$$

Cu datele numerice:

$$V_A = \frac{60\,000 \cdot 200 + 42\,000 \cdot 250}{200 + 250} = 50\,000 \text{ daN},$$

$$V_B = \frac{(60\,000 - 42000) \cdot 250}{200 + 250} = 10\,000 \text{ daN};$$

$$\sigma_{AC} = \frac{V_A}{A} = \frac{50\,000}{50} = 1\,000 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{CB} = \frac{-V_B}{A} = -\frac{10\,000}{50} = -200 \text{ daN/cm}^2.$$

1.41. Pentru bara din figura 1.41 să se calculeze deplasarea secţiunii 3—3. Să se calculeze energia de deformaţie, acumulată de bară. Aplicaţie numerică pentru: $P = 2\,000$ daN;

$E = 2 \cdot 10^6$ daN/cm²; $A_1 = 3$ cm²; $A_2 = 1{,}5$ cm²;

$a = 20$ cm.

Rezolvare. $V_2 = V_1 + P$,

$$\frac{V_1 a}{EA_1} + \frac{(V_1 - P)2a}{EA_2} + \frac{(V_1 - P)a}{EA_1} +$$

$$+ \frac{(V_1 + 2P)a}{EA_2} + \frac{(V_1 + P)a}{EA_1} = 0,$$

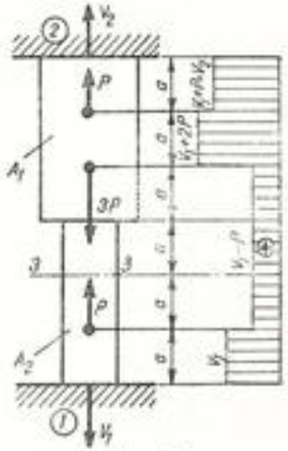


Fig. 1.41

$$V_1 = \frac{2P\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right)}{3\left(\frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_1}\right)}, \qquad V_2 = \frac{P\left(\frac{5}{A_2} + \frac{1}{A_1}\right)}{3\left(\frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_1}\right)}.$$

Cu datele numerice:

$$V_1 = \frac{2 \cdot 2\,000\left(\frac{1}{1,5} - \frac{1}{3}\right)}{3\left(\frac{1}{1,5} + \frac{1}{3}\right)} = 444 \text{ daN}, \qquad V_2 = \frac{2\,000\left(\frac{5}{1,5} + \frac{1}{3}\right)}{3\left(\frac{1}{1,5} + \frac{1}{3}\right)} = 2\,444 \text{ daN}.$$

Deplasarea secţiunii 3—3 va fi:

$$\delta_3 = \frac{(2.444 - 2000)\,20}{2 \cdot 10^6 \cdot 1,5} = 7,41 \cdot 10^{-3} \text{ cm}.$$

Energia de deformaţie:

$$L = \frac{V_1^2 a}{2EA_2} + \frac{(V_1 - P)^2 2a}{2EA_2} + \frac{(V_1 - P)^2 a}{2EA_1} + \frac{(V_1 + 2P)^2 a}{2EA_1} + \frac{(V_1 + P)^2 a}{2EA_1} =$$

$$= \frac{a}{2EA_2}\left[V_1^2 + 2(V_1 - P)^2\right] + \frac{a}{2EA_1}\left[(V_1 - P)^2 + (V_1 + 2P)^2 + (V_1 + P)^2\right].$$

Cu datele numerice:

$$L = \frac{20}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1,5}\left[444^2 + 2 \cdot 1556^2\right] + \frac{20}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3}\left[1556^2 + 4\,444^2 + 2\,444^2\right] = 63,75 \text{ daN cm}.$$

1.42. Un bulon de oţel M24 strînge o ţeavă de aluminiu ca în figura 1.42. Piuliţa este înşurubată pînă cînd rondeaua atinge ţeava, după care se mai strînge piuliţa cu încă un sfert de tură. Se cere să se calculeze efortul unitar produs în bulon şi în ţeavă, ştiind că pasul filetului este $p = 0,75$ mm şi $E_{Al} = 0,7 \cdot 10^6$ daN/cm².

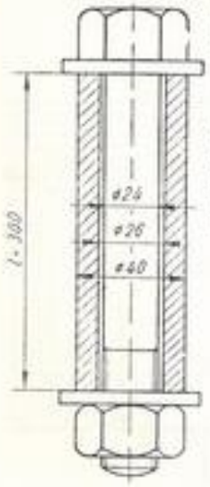


Fig. 1.42

Rezolvare. Prin strîngerea piuliţei, bulonul se lungeşte, iar ţeava se comprimă. Suma deformaţiilor celor două piese reprezintă deplasarea de un sfert de pas a piuliţei. Notînd cu N forţa care apare prin strîngere, se poate scrie relaţia:

$$\frac{Nl}{E_{Al}A_{Al}} + \frac{Nl}{E_{OL}A_{OL}} = \frac{p}{4}, \qquad N = \frac{p}{4l} \cdot \frac{E_{OL}A_{OL}}{1 + \frac{E_{OL}A_{OL}}{E_{Al}A_{Al}}},$$

$$N = \frac{0,075}{4 \cdot 30} \cdot \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 4,52}{1 + \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 4,52}{0,7 \cdot 10^6 \cdot 7,25}} = 2\,066 \text{ daN},$$

$$\sigma_{OL} = \frac{N}{A_{OL}} = \frac{2\,066}{4,52} = 457 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{Al} = \frac{N}{A_{Al}} = \frac{2\,066}{7,25} = 285 \text{ daN/cm}^2.$$

1.43. Să se calculeze eforturile unitare în barele sistemului din figura 1.43, grinda orizontală fiind presupusă rigidă.

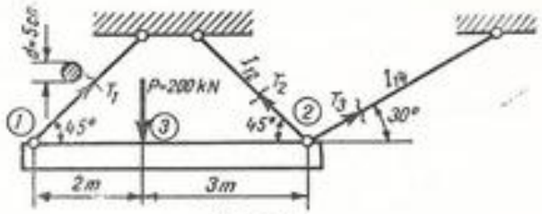


Fig. 1.43

Rezolvare. Ecuaţiile de echilibru ale grinzii *1-2-3* sînt:

— ecuaţia de proiecţii pe verticală

$$T_1 \cos 45° + T_2 \cos 45° + T_3 \cos 60° = P;$$

— ecuaţia de proiecţii pe orizontală

$$T_1 \cos 45° - T_2 \cos 45° + T_3 \cos 30° = 0;$$

— ecuaţia de momente în raport cu 2

$$5T_1 \cos 45° - 3P = 0.$$

Se obţine:

$$T_1 = \frac{3\sqrt{2}}{5} P = \frac{3\sqrt{2}}{5} 20\,000 = 17\,000 \text{ daN};$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot P}{5\sqrt{2}}\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right) = \frac{2 \cdot 20\,000}{5\sqrt{2}}\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right) = 13\,400 \text{ daN};$$

$$T_3 = -\frac{2P}{5(1 + \sqrt{3})} = -\frac{2 \cdot 20\,000}{5(1 + \sqrt{3})} = -2\,940 \text{ daN}.$$

Eforturile unitare sînt:

$$\sigma_1 = \frac{17\,000}{19,63} = 866 \text{ daN/cm}^2; \qquad \sigma_2 = \frac{13\,400}{14,2} = 944 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_3 = -\frac{2\,940}{18,3} = -160 \text{ daN/cm}^2.$$

1.44. Să se calculeze pentru sistemul din figura 1.44 deplasările pe verticală ale punctelor *2* şi *6*, barele *1—3* şi *2—4* fiind considerate rigide.

Rezolvare. Echilibrul barei *2—4* arată că în bara verticală *1—2* acţionează o forţă verticală $P/2$. Echilibrul barei *1—3* duce la concluzia că rezultanta forţelor din barele înclinate *5—7* şi *5—8* este o forţă verticală P, aplicată în punctul 5.

Barele *7—5*, *8—5* sînt solicitate de cîte o forţă de întindere egală cu $\frac{P}{2\cos\varphi}$.

Lungirile barelor *7—5*, *8—5* sînt egale cu:

$$\frac{P}{2\cos\varphi} \cdot \frac{l}{\cos\varphi} \cdot \frac{1}{EA} = \frac{Pl}{2EA\cos^3\varphi}.$$

Deplasările pe verticală ale punctelor *5*, *1*, *2* şi *6* sînt:

$$\delta_5 = \frac{Pl}{2EA\cos^3\varphi}; \qquad \delta_1 = \frac{Pl}{EA\cos^3\varphi};$$

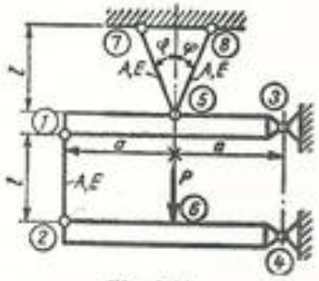


Fig. 1.44

$$\delta_2 = \frac{Pl}{EA\cos^3\varphi} + \frac{Pl}{2EA} = \frac{Pl}{EA}\left(\frac{1}{\cos^3\varphi} + 1\right); \qquad \delta_6 = \frac{Pl}{2EA}\left(\frac{1}{\cos^3\varphi} + 1\right).$$

1.45. Să se calculeze eforturile unitare în barele sistemului din figura 1.45.

Rezolvare. Echilibrul nodului S dă:

$$T_1\cos 45^\circ = T_1\frac{\sqrt{2}}{2} = P; \quad T_2 = T_1\cos 45^\circ = T_1\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$T_1 = \frac{2P}{\sqrt{2}} = P\sqrt{2} = 7\,050 \text{ daN}; \quad T_2 = \frac{2P}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = P = 5\,000 \text{ daN};$$

$$\sigma_1 = -\frac{7\,050}{24} = -294 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = -\frac{5\,000}{18{,}3} = -273 \text{ daN/cm}^2.$$

1.46. Două bare AB şi BC identice, cu secţiunea A şi cu lungimea $AB = BC = l$, aşezate în prelungire şi orizontal, ca în figura 1.46, sînt articulate în punctul B. Să se dimensioneze barele de oţel cu $\sigma_a = 1\,000$ daN/cm², dacă în punctul B se aplică o forţă verticală $P = 1\,000$ daN.

Rezolvare. Se studiază deformaţia datorită forţei P. Ecuaţia de proiecţii pe verticală pentru forţele din punctul B' este:

$$2T\sin\varepsilon = P; \quad \sin\varepsilon = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}}.$$

Notînd cu Δl lungirea barei AB, se poate scrie:

$$\overline{AB'} = l + \Delta l = l + \frac{Tl}{EA} = l + \frac{\sigma l}{E} = l\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right),$$

$$\overline{BB'} = \sqrt{\overline{AB'}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{l^2\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right)^2 - l^2} = \frac{l}{E}\sqrt{\sigma(2E + \sigma)},$$

$$\sin\varepsilon = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} = \frac{\frac{l}{E}\sqrt{\sigma(2E+\sigma)}}{l\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right)} = \frac{\sqrt{\sigma(2E+\sigma)}}{E + \sigma},$$

$$2T\frac{\sqrt{\sigma(2E+\sigma)}}{E+\sigma} = P; \quad \frac{2\sigma\sqrt{\sigma(2E+\sigma)}}{E+\sigma}A = P; \quad A_{nec} = \frac{P(E+\sigma_a)}{2\sigma_a\sqrt{\sigma_a(2E+\sigma_a)}}.$$

σ_a fiind neglijabil pe lîngă E, se poate obţine o relaţie simplificată:

$$A_{nec} = \frac{PE}{2\sigma_a\sqrt{2\sigma_a E}} = \frac{P\sqrt{E}}{2{,}82\sigma_a\sqrt{\sigma_a}}.$$

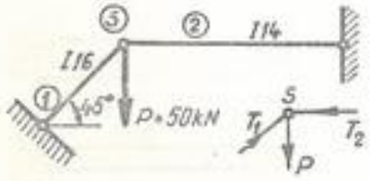


Fig. 1.45

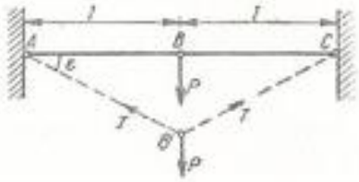


Fig. 1.46

În cazul aplicaţiei numerice, rezultă:

$$A_{nec} = \frac{1\,000\sqrt{2{,}1\cdot 10^6}}{2{,}82\cdot 1\,000\cdot\sqrt{1\,000}} = 16{,}25 \text{ cm}^2,$$

$$d = \sqrt{\frac{4\cdot 16{,}25}{\pi}} = 4{,}45 \text{ cm}; \quad d \approx 45 \text{ mm}.$$

1.47. O greutate $P = 100$ kN este legată de o bară rigidă şi suspendată prin trei fire de oţel cu lungimile egale şi secţiunile $A_1 = 5$ cm², $A_2 = 8$ cm² şi $A_3 = 3$ cm², aşezate ca în figura 1.47. Să se afle eforturile în fire.

Rezolvare.

$$T_1 + T_2 + T_3 = P, \tag{1}$$

$$T_1 a = T_3 a; \quad T_1 = T_3. \tag{2}$$

Lungirile celor trei fire:

$$\Delta l_1 = \frac{T_1 l}{A_1 E}; \quad \Delta l_2 = \frac{T_2 l}{A_2 E}; \quad \Delta l_3 = \frac{T_3 l}{A_3 E}, \tag{3), (4), (5}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + a\,\mathrm{tg}\,\alpha; \quad \Delta l_3 = \Delta l_1 + 2a\,\mathrm{tg}\,\alpha, \tag{6), (7}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{a},$$

apoi, înlocuind, rezultă:

$$\Delta l_3 = \Delta l_1 + 2a\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{a} \text{ sau } \Delta l_3 - 2\Delta l_2 + \Delta l_1 = 0, \tag{8}$$

$$\frac{T_3 l}{A_3 E} - \frac{2T_2 l}{A_2 E} + \frac{T_1 l}{A_1 E} = 0, \qquad \frac{T_3}{3} - \frac{T_2}{4} + \frac{T_1}{5} = 0. \tag{9}$$

Din ecuaţiile (1), (2) şi (9) rezultă:

$$T_1 = T_3 = 0{,}242\ P = 24{,}2 \text{ kN}; \quad T_2 = 0{,}516\ P = 51{,}6 \text{ kN}. \tag{10}$$

1.48. O grindă rigidă AB, avînd greutatea G, este suspendată de tavan cu ajutorul a trei bare de oţel cu secţiuni egale. La montaj se constată că barele laterale au lungimea $l_1 = 2{,}5$ m, iar bara din mijloc, din cauza unei erori de execuţie, este mai scurtă cu $\Delta l = 2{,}5$ mm. Bara se montează totuşi forţat. Să se găsească efortul unitar produs în cele trei bare, dacă se dau $G = 3\,000$ daN şi $A = 4$ cm². Să se compare valorile obţinute cu eforturile unitare care ar lua naştere dacă cele trei bare ar avea aceeaşi lungime (Fig. 1.48).

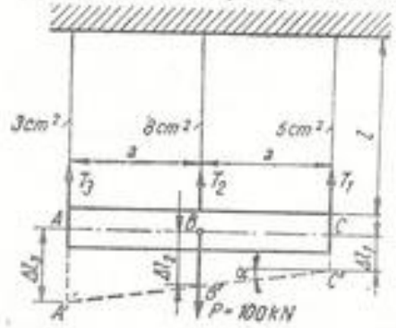


Fig. 1.47

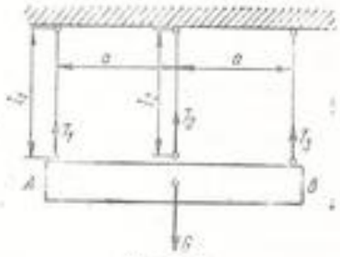


Fig. 1.48

Rezolvare.

$$T_1 = T_3, \tag{1}$$

$$2T_1 + T_2 = G. \tag{2}$$

După deformarea barelor, grinda AB rămîne tot orizontală, deci lungimile celor trei bare deformate trebuie să fie egale. Notînd cu Δl_1 deformaţia barelor laterale şi cu Δl_2 pe a celei mijlocii, se poate scrie:

$$l_1 + \Delta l_1 = l_2 + \Delta l_2,$$

$$\frac{T_2 l_2}{EA} - \frac{T_1 l_1}{EA} = \Delta l, \tag{3}$$

$$\text{unde } \Delta l = l_1 - l_2.$$

Din ecuaţiile (2) şi (3) se obţine, cu simplificarea $l \approx l_2 \approx l$:

$$T_1 = \frac{Gl - \Delta l \cdot EA}{3l} = \frac{G}{3} - \frac{\Delta l \cdot EA}{3l}, \tag{4}$$

$$T_2 = \frac{Gl + 2\Delta l \cdot EA}{3l} = \frac{G}{3} + \frac{2\Delta l \cdot EA}{3l}, \tag{5}$$

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{A} = \frac{G}{3A} - \frac{\Delta l \cdot E}{3l}, \tag{6}$$

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{A} = \frac{G}{3A} + \frac{2\Delta l \cdot E}{3l}. \tag{7}$$

Cu datele numerice se obţine:

$$\sigma_1 = \frac{3\,000}{3 \cdot 4} - \frac{0{,}25 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6}{3 \cdot 250} = -450 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{3\,000}{3 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 0{,}25 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6}{3 \cdot 250} = 1\,650 \text{ daN/cm}^2.$$

Barele exterioare sînt comprimate, iar cea din mijloc, intinsă.
Cînd barele sînt executate corect, $l_1 = l_2$, deci $\Delta l = 0$.
Din formulele (6) şi (7) rezultă:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{G}{3A} = \frac{3\,000}{3 \cdot 4} = 250 \text{ daN/cm}^2.$$

1.49. Grinda AC din figura 1.49, *a*, articulată în punctul C, este susţinută prin două fire EB şi EA, ambele avînd aceeaşi secţiune şi fiind din acelaşi material. Să se determine efortul în cele două fire, dacă grinda suportă în punctul D o greutate P; se va considera grinda AC indeformabilă.

Rezolvare. Izolînd grinda AC, apar ca forţe necunoscute: două componente ale reacţiunii din articulaţia C şi două forţe T_1 şi T_2 în firele EA şi EB. Din ecuaţia de momente faţă de punctul C rezultă:

$$aT_2 \sin\beta - \frac{3aP}{2} + 2a\, T_1 \sin\ \alpha = 0, \tag{1}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{l_2}, \ \sin\alpha = \frac{b}{l_1}.$$

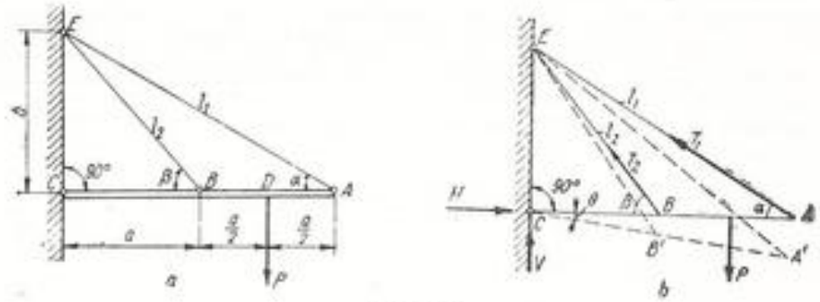


Fig. 1.49

Ecuaţia (1) devine:

$$T_2 \frac{b}{l_2} + 2T_1 \frac{b}{l_1} = \frac{3}{2} P. \tag{2}$$

Se presupune că sistemul se deformează şi bara CA ajunge în CA', rotindu-se cu unghiul θ astfel:

$$\overline{EB'} = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos(90° + \theta)} = \sqrt{l_2^2 - 2ab\cos(90° + \theta)},$$

$$\overline{EA'} = \sqrt{b^2 + 4a^2 - 2 \cdot 2ab\cos(90° + \theta)} = \sqrt{l_1^2 - 4ab\cos(90° + \theta)},$$

unde:

$$b^2 + a^2 = l_2^2 \quad \text{şi} \quad b^2 + 4a^2 = l_1^2,$$

$$\Delta l_1 = \overline{EA'} - \overline{EA} = \sqrt{l_1^2 - 4ab\cos(90° + \theta)} - l_1,$$

$$\Delta l_2 = \overline{EB'} - \overline{EB} = \sqrt{l_2^2 - 2ab\cos(90° + \theta)} - l_2;$$

$$\Delta l_1^2 + l_1^2 + 2l_1\Delta l_1 = l_1^2 - 4ab\cos(90° + \theta),$$

$$\Delta l_2^2 + l_2^2 + 2l_2\Delta l_2 = l_2^2 - 2ab\cos(90° + \theta).$$

Făcînd reducerile şi neglijînd pe Δl_1^2 şi Δl_2^2 (cantităţi mici de ordinul al doilea), se obţine:

$$l_1\Delta l_1 = -2ab\cos(90° + \theta); \quad l_2\Delta l_2 = -ab\cos(90° + \theta);$$

$$\frac{l_1\Delta l_1}{l_2\Delta l_2} = 2. \tag{3}$$

Întrucît $\Delta l_1 = T_1 l_1/EA$ şi $\Delta l_2 = T_2 l_2/EA$, rezultă:

$$T_1 l_1^2 = 2T_2 l_2^2. \tag{4}$$

Din relaţiile (2) şi (4) se obţin eforturile în fire:

$$T_1 = \frac{3P}{b} \cdot \frac{l_1 l_2^2}{l_1^2 + 4l_2^2}; \quad T_2 = \frac{3P}{2b} \cdot \frac{l_2 l_1^2}{l_1^2 + 4l_2^2}.$$

1.50. O placă pătrată rigidă este solicitată de o sarcină concentrată P, aplicată într-un punct M pe una din diagonalele pătratului de latura a, format de cele patru picioare (Fig. 1.50, *a*, *b*). Să se determine mărimea eforturilor în cele patru picioare.

Rezolvare. N_1, N_2, N_3 şi N_4 sînt reacţiunile care apar în cele patru picioare.

1) Momente faţă de axa $x-x$:

$$N_2 \frac{a\sqrt{2}}{2} - N_4 \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0; \quad N_2 = N_4. \tag{1}$$

2) Momente faţă de axa $y-y$:

$$N_1 \frac{a\sqrt{2}}{2} - N_3 \frac{a\sqrt{2}}{2} + Pl = 0. \tag{2}$$

3) Proiecţii pe axa $z-z$:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 - P = 0. \tag{3}$$

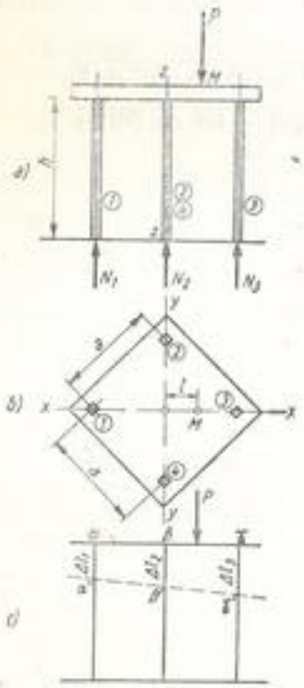


Fig. 1.50

Pentru a găsi a patra ecuaţie necesară, se presupune că placa se deplasează ca în figura 1.50, *c*, rămînînd plană.

Din trapezul $\alpha\alpha'\gamma'\gamma$ rezultă:

$$\Delta l_2 = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_3}{2}.$$

Înlocuind expresiile deformaţiilor, notînd cu A secţiunea unui picior şi cu E modulul său de elasticitate, se găseşte:

$$\frac{N_2 h}{AE} = \frac{\frac{N_1 h}{AE} + \frac{N_3 h}{AE}}{2}$$

sau:

$$N_1 + N_3 = 2N_2. \tag{4}$$

Din ecuaţiile (1), (2), (3) şi (4) rezultă:

$$4N_2 - P = 0; \quad N_2 = \frac{P}{4} = N_4.$$

$$N_3 - N_1 = \frac{2Pl}{a\sqrt{2}}; \quad N_3 + N_1 = 2N_2 = \frac{P}{2}.$$

$$N_3 = P\left(\frac{1}{4} + \frac{l}{a\sqrt{2}}\right); \quad N_1 = P\left(\frac{1}{4} - \frac{l}{a\sqrt{2}}\right).$$

Aplicaţie numerică: $P = 50$ daN, $a = 100$ cm, $l = 20$ cm.

$$N_1 = P\left(\frac{1}{4} - \frac{l}{a\sqrt{2}}\right) = 50\left(\frac{1}{4} - \frac{20}{100 \cdot 1{,}41}\right) = 5{,}45 \text{ daN},$$

$$N_2 = \frac{P}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5 \text{ daN},$$

$$N_3 = P\left(\frac{1}{4} + \frac{l}{a\sqrt{2}}\right) = 50\left(\frac{1}{4} + \frac{20}{100 \cdot 1{,}41}\right) = 19{,}55 \text{ daN}.$$

Piciorul *3* este cel mai încărcat.

1.51. Şinele unei linii de tramvai sînt asamblate prin sudură la 5°C. În timpul verii, pe sol, temperatura ajunge la 35°C. Ce efort unitar se produce în şină datorită influenţei temperaturii? Coeficientul de dilatare al oţelului $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$.

Rezolvare. Dilatarea fiind împiedicată, în şine ia naştere un efort unitar dat de relaţia (1.12):

$$\sigma_{df} = E\,\alpha\,\Delta t = 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-6}\,(35 - 5) = 756 \text{ daN/cm}^2.$$

1.52. O bară de oţel AB (Fig. 1.52), avînd coeficientul de dilatare $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$, are o lungime $l = 2$ şi este rezemată astfel încît se poate dilata liber 0,6 mm, după care dilatarea este împiedicată. Ce efort unitar se produce în bară la o creştere de temperatură de 50°C?

Rezolvare. Variaţia de temperatură sub care bara se poate dilata liber se obţine din relaţia $\Delta l = \alpha l\,\Delta t = 0{,}6$ mm:

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{\alpha l} = \frac{0{,}06}{12 \cdot 10^{-6} \cdot 200} = 25°\text{C}.$$

Fig. 1.52

Variaţia de temperatură pentru care bara este împiedicată să se dilate este:

$$\Delta t' = 50° - 25° = 25°.$$

Eforturi unitar datorit dilatării împiedicate este:

$$\sigma = E\alpha\Delta t' = 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 25 = 630 \text{ daN/cm}^2.$$

1.53. Între platourile unei prese se comprimă, cu forţa $N = 8\,000$ daN, doi cilindri (coaxiali), unul interior, de cupru, cu secţiunea $A_1 = 10$ cm², şi celălalt exterior, de oţel, cu secţiunea $A_2 = 6$ cm², la temperatura $t_0 = 15$°C (Fig. 1.53). Se cere să se găsească eforturile unitare produse în cele două materiale la această temperatură, cum şi în cazul cînd temperatura creşte la $t_1 = 65$°C, forţa N rămînînd constantă. Se dau $E_1 = 1{,}15 \cdot 10^6$ daN/cm², $\alpha_1 = 17 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}$, $E_2 = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm².

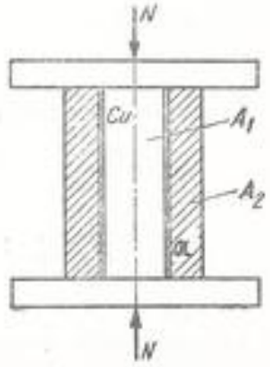


Fig. 1.53

Rezolvare. Formulele (1.11) dau:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2} = \frac{8\,000}{10 + \frac{2{,}1 \cdot 10^6}{1{,}15 \cdot 10^6} \cdot 6} = 380 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A_2 + \frac{E_1}{E_2} A_1} = \frac{8\,000}{6 + \frac{1{,}15 \cdot 10^6}{2{,}1 \cdot 10^6} \cdot 10} = 700 \text{ daN/cm}^2.$$

Se notează cu N_1 partea din forţă preluată de cupru şi cu N_2 partea preluată de oţel:

$$N_1 + N_2 = N. \tag{1}$$

Se pune condiţia ca deformaţia cilindrului de cupru, datorită variaţiei de temperatură şi forţei N_1, să fie egală cu deformaţia cilindrului de oţel, datorită variaţiei de temperatură şi forţei N_2. Notînd cu l lungimea iniţială a cilindrilor şi cu Δt variaţia de temperatură, se scrie:

$$\Delta l_1 = \alpha_1 l \Delta t - \frac{N_1 l}{A_1 E_1}; \quad \Delta l_2 = \alpha_2 l \Delta t - \frac{N_2 l}{A_2 E_2}.$$

Egalînd deformaţiile:

$$\alpha_1 l \Delta t - \frac{N_1 l}{A_1 E_1} = \alpha_2 l \Delta t - \frac{N_2 l}{A_2 E_2}.$$

$$\frac{N_1}{A_1 E_1} - \frac{N_2}{A_2 E_2} = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t. \tag{2}$$

Din ecuaţiile (1) şi (2) se obţine:

$$N_1 = \frac{N + (\alpha_1 - \alpha_2) A_2 E_2 \Delta t}{1 + \frac{A_2 E_2}{A_1 E_1}}; \quad N_2 = \frac{N - (\alpha_1 - \alpha_2) A_1 E_1 \Delta t}{1 + \frac{A_1 E_1}{A_2 E_2}};$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N + (\alpha_1 - \alpha_2) A_2 E_2 \Delta t}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{N - (\alpha_1 - \alpha_2) A_1 E_1 \Delta t}{A_2 + \frac{E_1}{E_2} A_1}.$$

Cu datele numerice şi $\Delta t = t_1 - t_0 = 50\,°\text{C}$, se obţine:

$$\sigma_1 = \frac{8\,000 - (17 \cdot 10^{-6} - 12 \cdot 10^{-6}) \cdot 6 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 50}{10 + \frac{2{,}1 \cdot 10^6}{1{,}15 \cdot 10^6} \cdot 6} = 532 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{8\,000 - (17 \cdot 10^{-6} - 12 \cdot 10^{-6}) \cdot 10 \cdot 1{,}15 \cdot 10^6 \cdot 50}{6 + \frac{1{,}15 \cdot 10^6}{2{,}1 \cdot 10^6} \cdot 10} = 446 \text{ daN/cm}^2.$$

1.54. Un cablu, de lungime $l_c = 27$ m, alcătuit dintr-o inimă de oţel şi o cămaşă din fire de aluminiu, este întins între lanţul de izolatori avînd împreună o lungime $l_i = 3$ m. Cunoscînd ariile secţiunilor transversale de oţel ($A_1 = 0{,}25$ cm²), de aluminiu ($A_2 = 1{,}50$ cm²), modulele de elasticitate ale oţelului ($E_1 = 2\,100\,000$ daN/cm²) şi aluminiului ($E_2 = 560\,000$ daN/cm²) precum şi coeficienţii de dilatare termică liniară ai oţelului ($\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}$), aluminiului ($\alpha_2 = 23 \cdot 10^{-6}$) şi lanţului de izolatori ($\alpha_i = 4 \cdot 10^{-6}$), se cere să se determine coeficientul de dilatare termică α al unui fir fictiv omogen, de aceeaşi lungime, echivalent cu firul dat.

Rezolvare. Lungirea firului fictiv datorită variaţiei de temperatură:

$$\Delta l = l \alpha \Delta t.$$

Lungirea firului real:

$$\Delta l = l_c \alpha_c \Delta t + l_i \alpha_i \Delta t,$$

unde α_c este coeficientul de dilatare termică al cablului de oţel-aluminiu. Din expresiile precedente:

$$\alpha = \frac{\alpha_c l_c + \alpha_i l_i}{l}.$$

Valoarea lui α_c se determină astfel:

La o variaţie de temperatură Δt alungirea conductorului este Δl_c:

$$\Delta l_c = \alpha_c l_c \Delta t.$$

Între firele de oţel şi cele de luminiu există o frecare suficient de mare pentru ca să se poată presupune că deformaţiile lor sînt egale şi că se produce o forţă de interacţiune N.

$$\Delta l_c = \Delta l_1 = \Delta l_2;$$

$$\Delta l_1 = \alpha_1 l_c \Delta t + \frac{N l_c}{E_1 A_1}; \quad \Delta l_2 = \alpha_2 l_c \Delta t - \frac{N l_c}{E_2 A_2}; \quad \alpha_1 \Delta t + \frac{N}{E_1 A_1} = \alpha_2 \Delta t - \frac{N}{E_2 A_2};$$

$$N = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t}{\frac{1}{E_2 A_2} + \frac{1}{E_1 A_1}}; \quad \Delta l_c = \frac{E_1 A_1 \alpha_1 + E_2 A_2 \alpha_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \cdot l_c \Delta t.$$

Prin comparaţie:

$$\alpha_c = \frac{E_1 A_1 \alpha_1 + E_2 A_2 \alpha_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} = \frac{\alpha_1 + m \alpha_2}{1 + m}; \quad m = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}.$$

Cu datele numerice se obţine:

$$m = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} = \frac{560\,000 \cdot 1{,}50}{2\,1000\,000 \cdot 0{,}25} = 1{,}6;$$

$$\alpha_c = \frac{12 \cdot 10^{-6} + 1{,}6 \cdot 23 \cdot 10^{-6}}{1 + 1{,}6} = 18{,}8 \cdot 10^{-6};$$

$$\alpha = \frac{\alpha_c l_c + \alpha_i l_i}{l} = \frac{18{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot 27 + 4 \cdot 10^{-6} \cdot 3}{30} \approx 17{,}3 \cdot 10^{-6}.$$

1.55. Să se calculeze eforturile unitare care se produc în cele două materiale din care este făcută bara încastrată din figura 1.55, dacă lungimile sînt l_1 şi l_2, secţiunile A_1 şi A_2, modulele de elasticitate E_1 şi E_2, coeficienţii de dilatare α_1 şi α_2, iar temperatura barei se ridică cu Δt.

Rezolvare.

$$\Delta l = l_1\alpha_1\Delta t + l_2\alpha_2\Delta t = \Delta t(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2),$$

$$\Delta l = \frac{Nl_1}{E_1A_1} + \frac{Nl_2}{E_2A_2} = N\left(\frac{l_1}{A_1E_1} + \frac{l_2}{A_2E_2}\right).$$

Egalitatea deformaţiilor dă relaţia:

$$\Delta t(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2) = N\left(\frac{l_1}{A_1E_1} + \frac{l_2}{A_2E_2}\right),$$

de unde:

$$N = \frac{\Delta t(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2)}{\dfrac{l_1}{A_1E_1} + \dfrac{l_2}{A_2E_2}},$$

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = \frac{\Delta t(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2)}{\dfrac{l_1}{E_1} + \dfrac{A_1}{A_2}\dfrac{l_2}{E_2}}, \quad \sigma_2 = \frac{\Delta t(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2)}{\dfrac{A_2}{A_1}\dfrac{l_1}{E_1} + \dfrac{l_2}{E_2}}.$$

1.56. Pe un arbore filetat de oţel este înşurubată o piuliţă de aluminiu. Montarea s-a făcut la temperatura de 15°C, iar în timpul funcţionării temperatura ansamblului se ridică la 65°C. Să se determine eforturile unitare din cele două piese, produse de creşterea temperaturii (Fig. 1.56).

Se dau:

$$\alpha_{Al} = 24 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_{OL} = 12 \cdot 10^{-6}; \quad E_{Al} = 0{,}7 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2,$$

$$E_{OL} = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2.$$

Rezolvare. Cele două piese fiind asamblate, se vor deforma identic:

$$\Delta l_{Al} = \Delta l_{OL}.$$

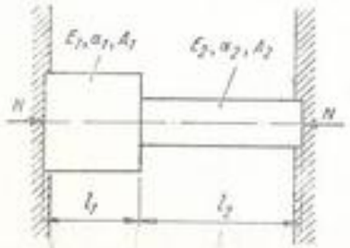


Fig. 1.55

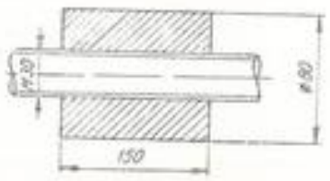


Fig. 1.56

$$\Delta l_{Al} = l\alpha_{Al}\Delta t - \frac{Nl}{A_{Al}E_{Al}}, \quad \Delta l_{OL} = l\alpha_{OL}\Delta t + \frac{Nl}{A_{OL}E_{OL}},$$

$$\alpha_{Al}\Delta t - \frac{N}{A_{Al}E_{Al}} = \alpha_{OL}\Delta t + \frac{N}{A_{OL}E_{OL}},$$

$$\Delta t(\alpha_{Al} - \alpha_{OL}) = N\left[\frac{1}{A_{Al}E_{Al}} + \frac{1}{A_{OL}E_{OL}}\right],$$

$$N = \frac{\Delta t(\alpha_{Al} - \alpha_{OL})}{\dfrac{1}{A_{Al}E_{Al}} + \dfrac{1}{A_{OL}E_{OL}}},$$

$$\sigma_{Al} = \frac{N}{A_{Al}} = \frac{E_{Al}\Delta t(\alpha_{Al} - \alpha_{OL})}{1 + \dfrac{A_{Al}}{A_{OL}} \cdot \dfrac{E_{Al}}{E_{OL}}}; \quad \sigma_{OL} = \frac{E_{OL}\Delta t(\alpha_{Al} - \alpha_{OL})}{1 + \dfrac{A_{OL}}{A_{Al}} \cdot \dfrac{E_{OL}}{E_{Al}}}.$$

Aplicaţie numerică. Pentru filet M30, $A_{OL} = 4{,}96$ cm², iar:

$$A_{Al} = \frac{\pi \cdot 8^2}{4} - \frac{\pi \cdot 3^2}{4} = 43{,}3 \text{ cm}^2.$$

Variaţia de temperatură $\Delta t = 65° - 15° = 50°$C:

$$\sigma_{OL} = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 50(24 \cdot 10^{-6} - 12 \cdot 10^{-6})}{1 + \dfrac{4{,}96 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6}{43{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 10^6}} = 931 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{OL} = \frac{0{,}7 \cdot 10^6 \cdot 50(24 \cdot 10^{-6} - 12 \cdot 10^{-6})}{1 + \dfrac{43{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 10^6}{4{,}96 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6}} = 108 \text{ daN/cm}^2.$$

1.57. Un şurub M20 din oţel (Fig. 1.57) strînge un manşon cilindric din cupru, astfel că forţa de interacţiune este $N = 1\,000$ daN. Aria secţiunii şurubului este $A_1 = 2{,}2$ cm² iar a manşonului $A_2 = 4$ cm². Se cer eforturile unitare, care se produc în cele două piese, în starea de solicitare arătată mai sus, precum şi atunci cînd se produce o încălzire a ansamblului cu $\Delta t = 50$°C.

Rezolvare. În starea de solicitare iniţială:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = \frac{1\,000}{2{,}2} = 455 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = -\frac{N}{A_2} = -\frac{1\,000}{4} = -250 \text{ daN/cm}^2.$$

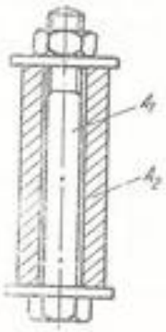


Fig. 1.57

În a doua stare de solicitare se presupune că ansamblul nu este solicitat şi se caută variaţiile de eforturi unitare faţă de prima stare. Manşonul de cupru tinde a se dilata mai mult decît şurubul, fapt care va duce la un efort

de compresiune în manşon, respectiv de întindere în şurub. N' fiind forţa suplimentară de interacţiune, rezultă din egalitatea deformaţiilor:

$$l\alpha_1\Delta t + \frac{N'l}{A_1E_1} = l\alpha_2\Delta t - \frac{N'l}{A_2E_2},$$

$$N' = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t}{\frac{1}{A_1E_1} + \frac{1}{A_2E_2}},$$

$$\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6}; \quad E_2 = \frac{8}{15} E_1,$$

$$N' = \frac{(17 - 12)10^{-6} \cdot 50}{\frac{1}{2{,}2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6} + \frac{1}{4 \cdot \frac{8}{15} \cdot 2{,}1 \cdot 10^6}} = 568 \text{ daN}.$$

În urma încălzirii, noile eforturi unitare sînt:

$$\sigma_1 = \frac{N + N'}{A_1} = \frac{1\,000 + 568}{2{,}2} = 713 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = -\frac{N + N'}{A_2} = -\frac{1\,000 + 568}{4} = -392 \text{ daN/cm}^2.$$

Datorită încălzirii, eforturile unitare în ambele piese cresc.

A p l i c a ţ i e. Să se reia problema, cu aceleaşi date, considerînd însă şurubul din cupru şi manşonul din oţel.

1.58. Sistemul de trei bare articulate din figura 1.58, cea verticală de oţel cu secţiunea A_2 şi cele oblice de cupru cu secţiunea A_1, este montat la temperatura $t_0 = 20°C$. Barele oblice au aceeaşi înclinare faţă de verticală.

Se dau: $A_1 = A_2 = 4{,}15$ cm²; $E_2 = \frac{15}{8} E_1$; $\alpha_1 = 16{,}5 \cdot 10^{-6}$;

$$\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}; \quad \beta = 60°.$$

Să se determine mărimea eforturilor unitare care se produc în bare dacă temperatura ansamblului creşte la $t_1 = 60°C$.

Rezolvare. Datorită variaţiei de temperatură vor apărea în bare eforturi notate T_1 şi T_2. Ecuaţia de proiecţii pe verticală:

$$T_2 = 2T_1 \cos \beta. \tag{1}$$

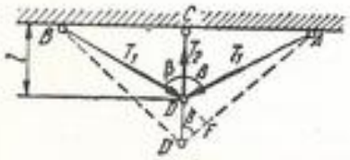


Fig. 1.58

Între deformaţiile barelor CD şi AD se poate scrie relaţia:

$$\overline{D'F} = \overline{DD'} \cdot \cos \beta. \tag{2}$$

$$\overline{DD'} = \Delta\overline{DC} = l\alpha_2\Delta t + \frac{T_2 l}{E_2A_2}, \tag{3}$$

$$\overline{D'F} = \overline{\Delta AD} = \frac{l}{\cos \beta}\alpha_1\Delta t - \frac{T_1}{E_1A_1} \cdot \frac{l}{\cos \beta}. \tag{4}$$

Din relaţiile (2), (3) şi (4) se obţine:

$$\frac{l}{\cos \beta}\alpha_1\Delta t - \frac{T_1 l}{E_1A_1 \cos \beta} = \left(l\alpha_2\Delta t + \frac{T_2 l}{E_2A_2}\right)\cos \beta. \tag{5}$$

Din relaţiile (1) şi (5) se obţine:

$$T_2 = \frac{\left(\frac{\alpha_1}{\cos^2 \beta} - \alpha_2\right) A_2E_2\Delta t}{1 + \frac{A_2E_2}{2A_1E_1 \cos^3 \beta}}; \quad T_1 = \frac{T_2}{2 \cos \beta}.$$

Aplicaţie numerică:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = 60° - 20° = 40°C,$$

$$\cos \beta = \cos 60° = 0{,}5; \; E_2 = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2,$$

$$T_2 = \frac{\left(\frac{16{,}5 \cdot 10^{-6}}{0{,}5^2} - 1{,}2 \cdot 10^{-6}\right) 4{,}15 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 40}{1 + \frac{4{,}15 \cdot \frac{15}{8}}{2 \cdot 4{,}15 \cdot 0{,}5^3}} = 2\,214 \text{ daN},$$

$$T_1 = \frac{2\,214}{2 \cdot 0{,}5} = 2\,214 \text{ daN},$$

$$\sigma_{OL} = \sigma_{Cu} = \frac{T_1}{A_1} = \frac{T_2}{A_2} = \frac{2\,214}{4{,}15} = 553 \text{ daN/cm}^2.$$

1.59. Să se calculeze prin metoda rezistenţelor admisibile sarcina maximă admisibilă P pentru firele din problema 1.47, ştiind că limita de curgere a oţelului din care sînt făcute firele este $\sigma_c = 2\,400$ daN/cm² şi coeficientul de siguranţă faţă de limita de curgere este $c = 2$. Să se calculeze apoi sarcina maximă prin metoda capacităţii portante.

Rezolvare. La problema 1.47 eforturile în cele trei fire *1, 2, 3* avînd secţiunile A_1, A_2, A_3 sînt:

$$T_1 = T_3 = 0{,}242 \; P; \; T_2 = 0{,}516 \; P.$$

Eforturile unitare ce apar în cele trei fire sînt:

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{A_1} = \frac{0{,}242 \; P}{5} = 0{,}0484 \; P; \; \sigma_2 = \frac{T_2}{A_2} = \frac{0{,}516 \; P}{8} = 0{,}0645 \; P;$$

$$\sigma_3 = \frac{T_3}{A_3} = \frac{0{,}242 \; P}{3} = 0{,}0806 \; P. \tag{1}$$

Firul cel mai solicitat este *3*. Pentru acesta se calculează sarcina maximă prin metoda rezistenţelor admisibile:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c} = \frac{2\,400}{2} = 1\,200 \text{ daN/cm}^2.$$

Din relaţia (1) se obţine sarcina admisibilă:

$$P'_a = \frac{\sigma_a}{0{,}0806} = \frac{1\,200}{0{,}0806} = 14\,900 \text{ daN}. \qquad (2)$$

Pentru a calcula sarcina admisibilă prin metoda capacităţii portante, se consideră că sarcina P creşte pînă ce în firul *3* se atinge limita de curgere ($\sigma_3 = \sigma_c$):

$$P'_c = \frac{\sigma}{0{,}0806} = 12{,}4 \ \sigma_c.$$

Forţa care ia naştere în acest caz în firul *3* este:

$$P_3 = A_3 \cdot \sigma_c = 3\sigma_c.$$

Înlocuind firul 3 prin forţa astfel obţinută, rezultă un sistem static determinat (Fig. 1.59). Ecuaţiile din mecanică dau:

$$T'_1 + T'_2 + 3\sigma_c - P'_c = 0\,;\ 3\sigma_c \cdot a = T'_1 a.$$

Se obţin eforturile în celelalte două fire:

$$T'_1 = 3\sigma_c\,;\ T'_2 = P'_c - 6\sigma_c = 12{,}4\ \sigma_c - 6\sigma_c = 6{,}4\sigma_c.$$

Eforturile unitare ce apar acum în aceste două fire sînt:

$$\sigma'_1 = \frac{T'_1}{A_1} = \frac{3\sigma_c}{5} = 0{,}6\sigma_c,$$

$$\sigma'_2 = \frac{T'_2}{A_2} = \frac{P'_c - 6\sigma_c}{A_2} = \frac{6{,}4\,\sigma_c}{8} = 0{,}8\sigma_c. \qquad (3)$$

Din relaţia (3) rezultă că atunci cînd P' creşte, firul *2*, fiind cel mai solicitat, va atinge mai repede limita de curgere, decît firul *1*. Forţa P''_c care face ca firul *2* să ajungă la limita de curgere se obţine din relaţia (3), înlocuind:

$$\sigma'_2 = \sigma_c\,;\ \sigma_c = \frac{P''_c - 6\sigma_c}{8}\,;\ P''_c = 14\sigma_c.$$

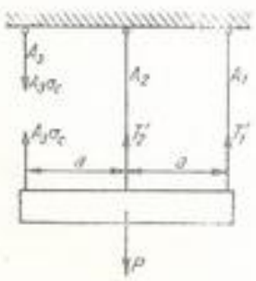


Fig. 1.59

După ce firul *2* ajunge la limita de curgere, sistemul îşi epuizează capacitatea portantă. Luînd coeficientul de siguranţă $c = 2$, sarcina maximă admisibilă este:

$$P''_a = \frac{P''_c}{c} = \frac{14\,\sigma_c}{2} = 7\sigma_c = 7 \cdot 2400 = 16\,800 \text{ daN}. \qquad (4)$$

Sarcina admisibilă creşte astfel cu 12,75% faţă de rezultatul obţinut prin metoda rezistenţelor admisibile.

1.60. Un sistem ca în figura 1.60, format din trei fire de oţel, avînd secţiunile egale $A = 1$ cm², este solicitat cu o sarcină P. Ştiind că limita de curgere a oţelului este $\sigma_c = 2\,400$ daN/cm², iar coeficientul de siguranţă faţă de limita de curgere $c = 2$, să se calculeze sarcina maximă prin metoda capacităţii portante. Se dă $\alpha = 30°$.

Rezolvare. Calculul prin metoda capacităţii portante se face considerînd că sarcina P creşte, atingîndu-se limita de curgere întîi în firul *2* şi apoi în firele *1* şi *3*. Forţa care trebuie să apară în aceste fire pentru ca în ele să se atingă limita de curgere este:

$$T'_1 = T'_2 = T'_3 = \sigma_c \cdot A = 2\,400 \cdot 1 = 2\,400 \text{ daN}.$$

Sarcina care ar da naştere acestor forţe se obţine scriind proiecţia forţelor pe verticală:

$$T'_1 \cos\alpha + T_2 + T'_3 \cos\alpha = P_c,$$

$$P_c = \sigma_c \cdot A(2\cos\alpha + 1) = 2\,400 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 0{,}866 + 1) = 6\,560 \text{ daN}.$$

Sarcina maximă admisibilă este:

$$P''_a = \frac{P_c}{2} = \frac{6\,560}{2} = 3\,280 \text{ daN}.$$

1.61. Să se calculeze sarcina maximă pe care o poate suporta sistemul din figura 1.49, dacă firele sînt din oţel cu limita de curgere $\sigma_c = 2\,400$ daN/cm², secţiunea $A_1 = A_2 = 5$ cm², $l_1 = 3$ m, $l_2 = 2$ m, $b = 1{,}53$ m, iar coeficientul de siguranţă $c = 2$. Să se calculeze sarcina maximă şi prin metoda capacităţii portante.

Rezolvare. Din relaţiile de la problema 1.49 se obţin eforturile:

$$T_1 = \frac{3P}{b} \cdot \frac{l_1 l_2^2}{l_1^2 + 4l_2^2} = \frac{3P}{1{,}53} \cdot \frac{3 \cdot 2^2}{3^2 + 4 \cdot 2^2} \approx 0{,}8\ P,$$

$$T_2 = \frac{3P}{2b} \cdot \frac{l_2 l_1^2}{l_1^2 + 4l_2^2} = \frac{3P}{2 \cdot 1{,}53} \cdot \frac{2 \cdot 3^2}{3^2 + 4 \cdot 2^2} \approx 0{,}9\ P.$$

$T_2 > T_1$, deci efortul unitar maxim apare în firul 2:

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{A} = \frac{0{,}9P}{5} = 0{,}18\ P.$$

Sarcina maximă admisibilă este:

$$P'_a = \frac{\sigma_a}{0{,}18} = \frac{\sigma_c}{0{,}18 \cdot c} = \frac{2\,400}{0{,}18 \cdot 2} = 6\,660 \text{ daN}.$$

Cînd sarcina P creşte, se atinge limita de curgere întîi în firul *2* şi apoi în firul *1*. Forţele ce vor lua naştere în aceste două fire vor fi egale cu:

$$T'_1 = T'_2 = \sigma_c \cdot A = 2\,400 \cdot 5 = 12\,000 \text{ daN}.$$

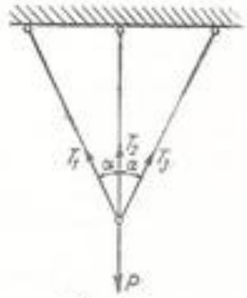


Fig. 1.60

Înlocuind în figura 1.49, *b* forţele T_1 şi T_2 cu valorile de mai sus, se poate determina mărimea sarcinii admisibile, scriind ecuaţia de momente faţă de punctul *C*

$$T_2' \frac{b}{l_2} + 2T_1' \frac{b}{l_1} = \frac{3}{2} P_c.$$

Din această relaţie se obţine sarcina ce produce atingerea limitei de curgere în ambele fire:

$$P_c = \frac{2}{3} b T_1' \left(\frac{2}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) = \frac{2 \cdot 1{,}53 \cdot 12\,000}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = 14\,280 \text{ daN}.$$

Sarcina admisibilă este:

$$P_a' = \frac{P_c}{2} = \frac{14\,280}{2} = 7\,140 \text{ daN} > P_a'.$$

1.62. Ce lungime trebuie să aibă un fir de cupru, întins între doi stîlpi la acelaşi nivel, la o distanţă unul de altul de $l = 100$ m, spre a avea o săgeată maximă $f = 2$ m? Se dau: greutatea specifică a cuprului $\gamma = 8{,}9$ daN/dm³ şi modulul de elasticitate $E = 1{,}28 \cdot 10^6$ daN/cm² (Fig. 1.62).

Rezolvare. Se aplică formula (1.19) din care rezultă diferenţa δ dintre lungimea firului şi deschidere:

$$\delta = \frac{f^3 - \frac{3\gamma l^4}{64E}}{\frac{3}{8} lf} = \frac{200^3 - \frac{3 \cdot 8{,}9}{64 \cdot 10^3} \cdot \frac{10^{14}}{1{,}28 \cdot 10^6}}{\frac{3}{8} 10^4 \cdot 200} = 6{,}3 \text{ cm}.$$

Lungimea firului: $s = \delta + l$;

$$s = \delta + l = 6{,}3 + 10\,000 = 10\,006{,}3 \text{ cm} = 100{,}063 \text{ m}.$$

1.63. Un fir de oţel cu diametrul de 10 mm se întinde între doi stîlpi distanţaţi cu 25 m, reazemele fiind la acelaşi nivel. Se cere să se determine cu ce forţă trebuie întins firul pentru ca săgeata maximă datorită greutăţii proprii să nu fie mai mare decît 0,6 m.

Se dă greutatea specifică a oţelului $\gamma = 7{,}85$ daN/dm³.

Rezolvare. Se va aplica formula (1.15). Mai întîi se calculează p:

$$p = \gamma \cdot A = 7{,}85 \cdot 10^{-3} \cdot 78{,}53 = 0{,}617 \text{ daN/m}.$$

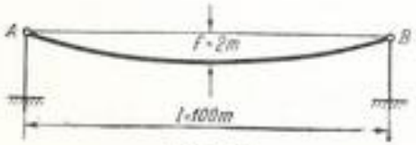


Fig. 1.62

S-a introdus greutatea specifică în daN/cm³ şi secţiunea în mm², iar rezultatul este în daN/m.

$$H = \frac{0{,}617 \cdot 25^2}{8 \cdot 0{,}6} = 80{,}3 \text{ daN}.$$

1.64. Trei fire telefonice de 3 mm diametru, din oţel, cu punctele de susţinere la acelaşi nivel, sînt întinse în timpul verii la o temperatură de + 40 °C cu o forţă de întindere $H = 40$ daN, pe o deschidere $l = 30$ m. Distanţa dintre izolatorii care susţin firele este de 40 cm (Fig. 1.64). Să se determine:

a) efortul unitar ce se produce în fire la − 20 °C;

b) diametrul necesar al stîlpilor de lemn de susţinere, în ipoteza că se rupe firul superior. Înălţimea liberă minimă sub fire este $h = 6$ m.

Fig. 1.64

Se dau: greutatea specifică a oţelului $\gamma = 7{,}85$ daN/dm³, coeficientul de dilatare termică liniară pentru oţel $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$, rezistenţa admisibilă la încovoiere a lemnului $\sigma_a = 100$ daN/cm².

Rezolvare. $p = \gamma A = 7{,}85 \cdot 10^{-3} \cdot 7{,}1 = 0{,}055$ daN/m.

Pentru calculul săgeţii maxime la montaj se aplică formula (1.14):

$$f = \frac{pl^2}{8H} = \frac{55 \cdot 3^2 \cdot 10^6}{10^3 \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 40} = 15{,}5 \text{ cm}; \quad \sigma = \frac{H}{A} = \frac{40}{7{,}1 \cdot 10^{-3}} = 563 \text{ daN/cm}^2.$$

Pentru calculul săgeţii maxime la − 20 °C (variaţia de temperatură $t = 60$ °C) se aplică formula (1.24):

$$f_1^3 - \frac{3}{8}\left[\frac{1}{24} \frac{7{,}85^2 \cdot 3^2 \cdot 10^6}{10^6 \cdot 5{,}63^2 \cdot 10^4} - 60 \cdot 12 \cdot 10^{-6} - \frac{563}{2{,}1 \cdot 10^6}\right] \cdot 3^2 \cdot 10^6 f_1 -$$

$$- \frac{3}{64} \frac{7{,}85 \cdot 3^4 \cdot 10^{12}}{10^3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6} = 0,$$

$$f_1^3 + 3\,088 f_1 - 14\,200 = 0,$$

$$f_1 = 4{,}6 \text{ cm},$$

$$\sigma = \frac{\gamma l^2}{8 f_1} = \frac{7{,}85 \cdot 3^2 \cdot 10^6}{10^3 \cdot 8 \cdot 4{,}6} = 1\,920 \text{ daN/cm}^2.$$

Forţa de întindere în fir este $H = \sigma A = 1\,920 \cdot 7{,}06 \cdot 10^{-3} = 136$ daN. Presupunînd că se rupe firul superior, braţul de pîrghie al forţei H este:

$$h_0 = h + 2 \cdot 0{,}40 + f = 6 + 0{,}8 + 0{,}155 \approx 7 \text{ m}.$$

Pentru calculul înălţimii h_0 se consideră cazul cel mai defavorabil cînd firul are săgeata cea mai mare (vara), pentru ca înălţimea liberă minimă să nu depăşească valoarea dată. Forţa de întindere maximă H se produce iarna.

Momentul încovoietor maxim care solicită stîlpul este:

$$M = 136 \cdot 700 = 95\,200 \text{ daNcm},$$

$$W_{nec} = \frac{95\,200}{100} = 952 \text{ cm}^3; \quad d \approx 22 \text{ cm}.$$

1.65. Un cablu electric, format din 30 de fire de aluminiu, cu diametrul de 4 mm, este montat în timpul verii la temperatura $t_1 = +40°C$ pe o deschidere $l = 200$ m, cu o săgeată maximă $f_0 = 4{,}50$ m, reazemele fiind la acelaşi nivel. Se întreabă care va fi săgeata maximă a cablului la temperatura $t_2 = -5°C$, încărcat cu o suprasarcină de gheaţă (polei).

Se dau: greutatea specifică a aluminiului $\gamma = 2{,}7$ daN/dm³, coeficientul de dilatare termică liniară $\alpha = 2{,}3 \cdot 10^{-5}$, modulul de elasticitate $E = 5{,}6 \cdot 10^5$ daN/cm².

Rezolvare. Se calculează săgeata f_1 corespunzătoare temperaturii de $-5°C$ fără a ţine seama de greutatea poleiului, cu ajutorul formulei (1.24). Se calculează apoi săgeata totală f_2 prin formula (1.25), în care se înlocuieşte f_0 prin f_1.

a) Calculul săgeţii f_1

$$\sigma = \frac{\gamma l^2}{8f} = \frac{2{,}7 \cdot 2^2 \cdot 10}{10^3 \cdot 8 \cdot 4{,}5 \cdot 10^2} = 300 \text{ daN/cm}^2.$$

Variaţia de temperatură este $t = -5 - 40 = -45°C$.

$$f_1^2 - \frac{3}{8}\left[\frac{1}{24}\,\frac{2{,}7^2 \cdot 2^2 \cdot 10^6}{10^6 \cdot 3^2 \cdot 10^4} - 2{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 45 - \frac{3 \cdot 10^2}{5{,}6 \cdot 10^5}\right] \cdot 2^2 \cdot 10^3 \cdot f_1 = \frac{3 \cdot 2{,}7 \cdot 2^4 \cdot 10^{18}}{64 \cdot 10^3 \cdot 5{,}6 \cdot 10^5},$$

$$f_1^2 + \frac{3}{8}\,2{,}21 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot f_1 - 36{,}2 \cdot 10^6 = 0,$$

$$f_1^2 + 3{,}32 \cdot 10^4\, f_1 - 36{,}2 \cdot 10^6 = 0,$$

$$f_1 = 3{,}00 \text{ m}.$$

Săgeata a scăzut, datorită contracţiei, de la valoarea $f_0 = 4{,}50$ m la valoarea $f_1 = 3{,}00$ m.

b) Calculul săgeţii f_2.

Suprasarcina datorită poleiului se poate evalua cu formula empirică $p_s = 0{,}18\sqrt{d}$, în care d reprezintă diametrul firului în mm, iar p_s, sarcina în daN/m. Dacă este vorba de un cablu, diametrul se poate calcula cu formula:

$$d_0 = 1{,}3\sqrt{A},$$

$$A = 30 \cdot 12{,}56 = 376{,}80 \text{ mm}^2; \quad d_0 = 1{,}3\sqrt{376{,}80} = 25{,}22 \text{ mm};$$

$$p_s = 0{,}18\sqrt{25{,}22} \approx 0{,}90 \text{ daN/m}; \quad p_0 = \gamma \cdot A = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 376{,}8 \approx 1 \text{ daN/m}.$$

Formula (1.25) devine:

$$f_2^2 + \left(\frac{3}{64}\,\frac{1 \cdot 2^4 \cdot 10^{14}}{10^3 \cdot 5{,}6 \cdot 10^5 \cdot 3{,}768 \cdot 3 \cdot 10^2} - 3^2 \cdot 10^4\right) f_2 - \frac{3}{64}\,\frac{(1 + 0{,}9)2^4 \cdot 10^{28}}{10^3 \cdot 5{,}6 \cdot 10^5 \cdot 3{,}768} = 0,$$

$$f_2^2 - 0{,}28 \cdot 10^5 \cdot f_2 - 6{,}75 \cdot 10^7 = 0; \; f_2 = 4{,}30 \text{ m}.$$

Săgeata la temperatura de $-5°C$ cu suprasarcină de gheaţă este $f_2 = 4{,}30$ m.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

1.66. O bară de oţel, de lungime $l = 10$ m, este supusă la întindere cu o forţă variabilă, a cărei valoare maximă este $N = 50$ kN. Se cere să se dimensioneze bara, cu secţiunea dreptunghiulară, avînd înălţimea $h = 2\,b$, şi să se afle deplasarea capătului liber al barei.

Răspuns: $h = 36$ mm, $b = 18$ mm, $\Delta l = 0{,}366$ cm.

1.67. Un şurub, cu diametrul exterior $d = 20$ mm, se reazemă cu capul, prin intermediul unei rondele, pe o piesă de lemn, ca în figura 1.67 şi este solicitat la întindere cu o forţă $P = 500$ daN. Să se calculeze diametrul exterior al rondelei, pentru ca să nu se producă în lemn, pe suprafaţa de strivire, un efort unitar mai mare de 20 daN/cm².

Răspuns: $D = 6$ cm.

1.68. O platbandă de oţel, cu secţiunea dreptunghiulară 60 mm × × 10mm, solicitată la întindere de o forţă P, are o gaură de nit cu diametrul 10 mm. Să se compare eforturile unitare din secţiunea neslăbită şi din cea slăbită. Se va neglija concentrarea eforturilor în regiunea găurii.

Răspuns: $\sigma_a = 1{,}2\,\sigma_b$.

1.69. Se cere să se dimensioneze firele din figura 1.69 cu $\sigma_a = 1200$ daN/cm². Să se determine deformaţia şi lucrul mecanic de deformaţie acumulat de fire.

Răspuns: $d = 1{,}6$ cm, $\Delta l = 0{,}0809$ cm, $L = 194$ daNcm.

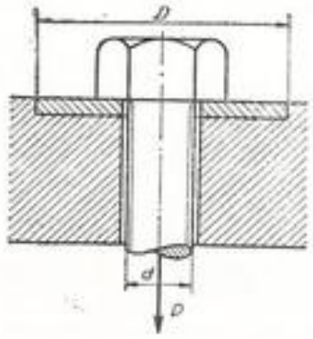


Fig. 1.67

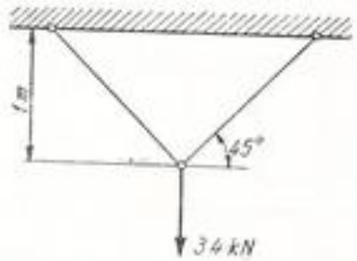


Fig. 1.69

1.70. O bară rigidă BC este articulată în punctul B şi susţinută de tavan cu 3 fire din acelaşi material şi de lungimi egale (Fig. 1.70). În punctul C se aplică o sarcină P. Se cere să se calculeze eforturile unitare ce iau naştere în cele 3 fire.

Răspuns:

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{A_1} = \frac{4P}{A_1 + 4A_2 + 9A_3}; \quad \sigma_2 = \frac{T_2}{A_2} = \frac{8P}{A_1 + 4A_2 + 9A_3} = 2\,\sigma_1,$$

$$\sigma_3 = \frac{T_3}{A_3} = \frac{12P}{A_1 + 4A_2 + 9A_3} = 3\,\sigma_1.$$

1.71. La sistemul de scripeţi din figura 1.71 se dă $Q = 30$ kN. Se cere să se dimensioneze cablul care trece peste scripeţi, confecţionat din oţel cu $\sigma_a = 1\,500$ daN/cm² şi sistemul de suspensie AB format din două bare de oţel identice, cu $\sigma_a = 800$ daN/cm².

Răspuns: Cablul cu 6 × 19 fire de diametru $\delta = 1{,}1$ mm. Sistemul de suspensie din două plăci dreptunghiulare, cu $A_{ef} = 1{,}88$ cm².

1.72. O grindă rigidă AB (Fig. 1.72) este suspendată la capete prin două tije verticale: AC, de oţel, cu diametrul de 10 mm, şi BD, de cupru, cu diametrul de 25 mm. Să se determine poziţia forţei P pe bara AB, astfel încît grinda să rămînă orizontală. Se dă $P = 8$ kN şi $E_{Cu} = 1{,}15 \cdot 10^6$ daN/cm².

Răspuns: $a = 2{,}32$ m, $b = 0{,}68$ m.

1.73. Să se găsească variaţia unghiului α şi lungirea diagonalei AB la un pătrat articulat la noduri ca în figura 1.73 ale cărui bare au toate secţiunea $A = 1$ cm². Latura pătratului este $a = 10$ cm, iar barele sînt confecţionate din oţel.

Răspuns: $\Delta\alpha = -7'$; $\Delta l = 0{,}00673$ cm.

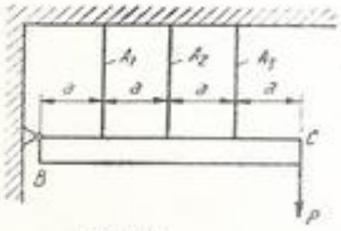


Fig. 1.70

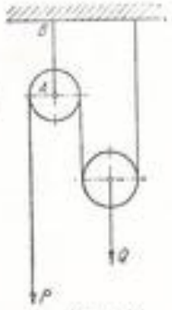


Fig. 1.71

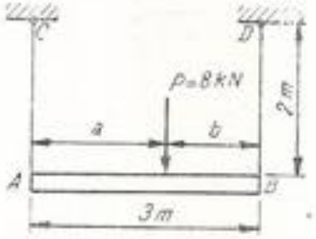


Fig. 1.72

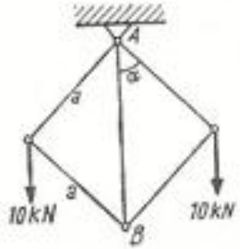


Fig. 1.73

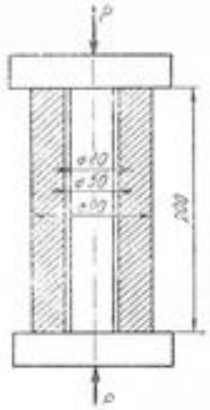


Fig. 1.74

1.74. Doi cilindri concentrici, cel exterior de cupru şi cel interior de oţel, sînt presaţi cu o forţă $P = 250$ kN, la temperatura $t_0 = 15$°C. Dimensiunile pieselor sînt cele din figura 1.74. La ce temperatură trebuie încălziţi cei doi cilindri, pentru ca întreaga forţă să fie preluată numai de cilindrul de cupru?

Se dau:

$$\alpha_{Cu} = 17 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_{OL} = 12 \cdot 10^{-6}; \quad E_{Cu} = 1{,}15 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2.$$

Răspuns: $\Delta t \geqslant 114$°C.

1.75. Un fir de cupru de secţiune $A = 26$ mm², cu reazemele la acelaşi nivel, avînd greutatea proprie $p_0 = 0{,}224$ daN/m, trebuie întins la temperatura $t_1 = 20$°C, între doi stîlpi aşezaţi la o distanţă de 60 m. Să se calculeze forţa H necesară întinderii firului în două ipoteze de stări critice, şi anume:

a) la temperatura de -5°C, sub greutatea proprie, cu suprasarcină de gheaţă şi sub acţiunea vîntului (suprasarcină de 30 daN/m);

b) la temperatura de -30°C.

Se dau: rezistenţa admisibilă a firului de cupru $\sigma_a = 1\,300$ daN/cm², coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$.

Răspuns: *a)* $H = 105$ daN; *b)* $H = 124{,}5$ daN.

Valoarea cea mai mică corespunde ipotezei defavorabile. Săgeata maximă corespunzătoare forţei $H = 105$ daN este $f = 0{,}965$ m.

CAPITOLUL 2

MOMENTE DE INERȚIE ALE SUPRAFEȚELOR PLANE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Momentele de inerție axiale și centrifugale se definesc prin relațiile:

$$I_z = \int_A y^2 \, dA, \tag{2.1}$$

$$I_y = \int_A z^2 \, dA, \tag{2.2}$$

$$I_{zy} = \int_A zy \, dA. \tag{2.3}$$

2. Între momentele de inerție față de două axe paralele, distanțate cu d, există relația:

$$I_\Delta = I_G + Ad^2, \tag{2.4}$$

unde I_G este momentul de inerție față de axa — paralelă cu axa Δ — trecînd prin centrul de greutate, iar A este aria suprafeței.

3. Pentru două sisteme de axe rectangulare paralele, Ozy oarecare și Gz_1y_1 trecînd prin centrul de greutate, momentele de inerție centrifugale sînt legate prin relația:

$$I_{zy} = I_{z_1y_1} + A\bar{z}\bar{y}. \tag{2.5}$$

unde $\bar{z}$, $\bar{y}$ sînt coordonatele lui G față de sistemul de axe Ozy.

Dacă cel puțin una dintre axele Gz_1y_1 este axă de simetrie, $I_{z_1y_1} = 0$ și formula se reduce la

$$I_{zy} = A\bar{z}\bar{y}. \tag{2.6}$$

4. Pentru dreptunghiul din figura 2. a, momentele de inerție față de axele de simetrie sînt:

$$I_z = \frac{\delta h^3}{12}; \qquad I_y = \frac{\lambda b^3}{12}. \tag{2.7}$$

5. Momentul de inerție polar, față de un punct oarecare O, din planul suprafeței este:

$$I_p = \int_A r^2 \, dA. \tag{2.8}$$

Dacă Oz și Oy sînt două axe rectangulare trecînd prin O, rezultă:

$$I_p = I_z + I_y. \tag{2.9}$$

6. Suprafața închisă de cercul de diametru d are, față de axele care trec prin centru, următoarele momente de inerție:

$$\text{axiale: } I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}, \tag{2.10}$$

$$\text{polar: } I_p = \frac{\pi d^4}{32}. \tag{2.11}$$

7. Razele de inerție se definesc prin relațiile:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}; \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \tag{2.12}$$

8. Dacă față de un sistem de axe rectangulare oarecare Ozy se cunosc I_z, I_y, I_{zy} ale unei suprafețe, se pot calcula momentele de inerție față de un sistem rectangular Oz_1y_1, avînd aceeași origine și rotit cu unghiul α, în sens trigonometric, față de primul (Fig. 2.12):

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{zy} \sin 2\alpha = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - $$
$$- 2 I_{zy} \sin \alpha \cos \alpha. \tag{2.13}$$

$$I_{z_1y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha = (I_z - I_y) \sin \alpha \cos \alpha + I_{zy} \cos 2\alpha. \tag{2.14}$$

$\Rightarrow I_{z_1y_1} = 0$

9. Momentele de inerție principale sînt date de:

$0 = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha$

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}, \tag{2.15}$$

$-2I_{zy} = (I_z - I_y) \operatorname{tg} 2\alpha$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = + \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}. \tag{2.16}$$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}$

10. Dacă se notează cu y_{max} și z_{max} distanțele de la fibrele extreme pînă la axele care trec prin centrul de greutate (v. Fig. 2.a), se numesc module de rezistență la încovoiere, față de aceste axe, expresiile:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{max}}. \tag{2.17}$$

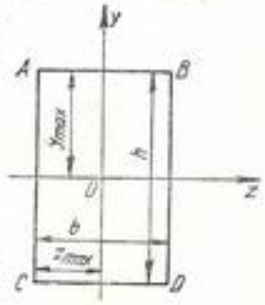


Fig. 2.a.

B. PROBLEME REZOLVATE

2.1. Să se calculeze momentele de inerție față de axele z_1 indicate în desen pentru secțiunile din figurile 2.1, a și 2.1, b. Se va calcula apoi momentul de inerție față de axa z care trece prin centrul de greutate.

Rezolvare. a) Triunghi (Fig. 2.1, *a*):
Din triunghiurile asemenea OBC și ODE se obține:

$$b_y = \frac{b}{h}(h - y_1),$$

$$dA = \frac{b}{h}(h - y_1)\, dy_1,$$

$$I_{z1} = \int_A y_1^2 dA = \frac{b}{h}\int_0^h (h - y_1) y_1^2 dy_1 = \frac{bh}{h}\int_0^h y_1^2 dy_1 - \frac{b}{h}\int_0^h y_1^3 dy_1 = \frac{bh^3}{12}.$$

Pentru aflarea momentului de inerție I_z se aplică formula:

$$I_z = I_{z1} - d^2 \cdot A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36},$$

$$I_y = \frac{hb_1^3}{12} + \frac{hb_2^3}{12} = \frac{h}{12}(b_1^3 + b_2^3).$$

b) Paralelogram (Fig. 2.1, *b*):

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b\, dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12},$$

$$I_{z1} = I_z + d^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}.$$

2.2. Să se calculeze momentele de inerție ale dreptunghiului din figura 2.2 față de axele Az_1 și Ay_1.

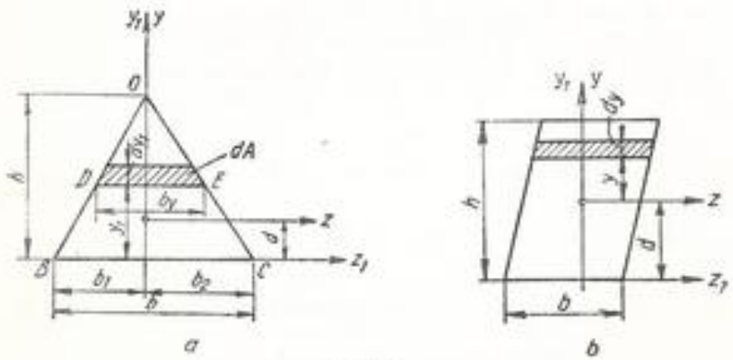


Fig. 2.1.

Rezolvare. $I_z = \frac{bh^3}{12}$; $I_y = \frac{hb^3}{12}$;

$$I_{z1} = I_z + A \cdot d^2 = \frac{bh^3}{12} + bh\frac{h^2}{16} = \frac{7}{48} bh^3;$$

$$I_{y1} = I_y + A \cdot d^2 = \frac{hb^3}{12} + bh\frac{b^2}{16} = \frac{7}{48} b^3 h.$$

2.3. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y față de axele care trec prin centrul de greutate al suprafeței hașurate din figura 2.3.

Rezolvare. Coordonatele centrului de greutate față de sistemul Oz_1y sînt:

$$\bar{z} = 0; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{25 \cdot 0 - 4 \cdot (-1{,}5)}{25 - 4} = 0{,}286 \text{ cm},$$

$$I_z = \frac{5 \cdot 5^3}{12} + 25 \cdot 0{,}286^2 - \left[\frac{2 \cdot 2^3}{12} + 4 \cdot 1{,}786^2\right] \approx 40{,}00 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = \frac{5 \cdot 5^3}{12} - \frac{2 \cdot 2^3}{12} = 50{,}77 \text{ cm}^4.$$

2.4. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele care trec prin centrul de greutate, pentru secțiunea din figura 2.4.

Rezolvare. Coordonatele centrului de greutate față de sistemul de axe Oz_1y_1 sînt:

$$\bar{y}_1 = 10 \text{ cm}; \quad \bar{z}_1 = \frac{\Sigma A_i z_i}{\Sigma A_i} = \frac{9 \cdot 1 \cdot 5{,}5 + 20 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 1 \cdot 5{,}5}{2 \cdot 9 \cdot 1 + 20 \cdot 1} = 2{,}87 \text{ cm}.$$

Momentele de inerție se calculează considerînd secțiunea ca diferență a două dreptunghiuri:

$$I_z = \frac{10 \cdot 20^3}{12} - \frac{9 \cdot 18^3}{12} = 2\,293 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = \frac{20 \cdot 10^3}{12} + 20 \cdot 10 \cdot 2{,}13^2 - \left[\frac{18 \cdot 9^3}{12} + 9 \cdot 18 \cdot 2{,}63^2\right] = 360 \text{ cm}^4.$$

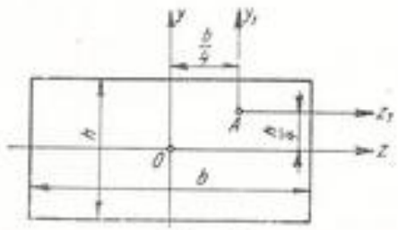


Fig. 2.2

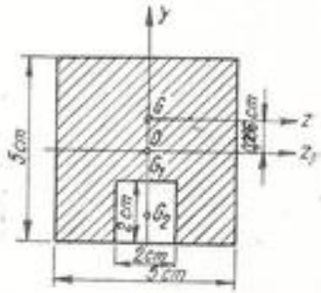


Fig. 2.3

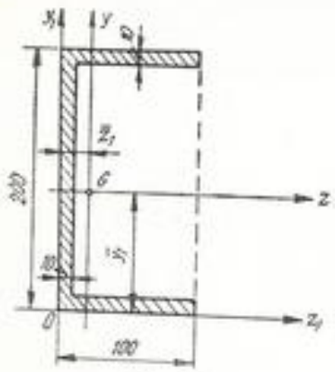


Fig. 2.4

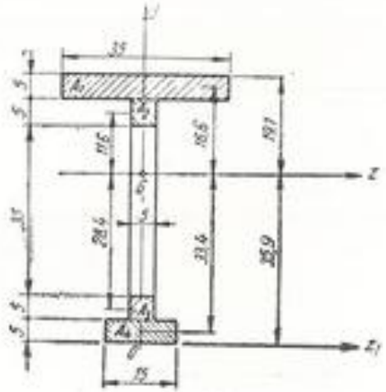


Fig. 2.5

2.5. Să se calculeze momentele de inerție față de axele ce trec prin centrul de greutate pentru suprafața haşurată din figura 2.5. Cotele sînt date în centimetri.

Rezolvare. Pentru a determina poziția centrului de greutate, se alege un sistem de axe ajutător Oz_1y.

$$\bar{y} = \frac{35 \cdot 5 \cdot 52{,}5 + 5 \cdot 5 \cdot 47{,}5 + 5 \cdot 5 \cdot 7{,}5 + 15 \cdot 5 \cdot 2{,}5}{35 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 15 \cdot 5} \approx 35{,}9 \text{ cm},$$

$$I_z = \frac{35 \cdot 5^3}{12} + 35 \cdot 5 \cdot 16{,}6^2 + \frac{5 \cdot 5^3}{12} + 5 \cdot 5 \cdot 11{,}6^2 + \frac{5 \cdot 5^3}{12} + 5 \cdot 5 \cdot 28{,}4^2 +$$

$$+ \frac{15 \cdot 5^3}{12} + 15 \cdot 5 \cdot 33{,}4^2 = 156\,041 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = \frac{5 \cdot 35^3}{12} + 2 \cdot \frac{5 \cdot 5^3}{12} + \frac{5 \cdot 15^3}{12} =$$

$$= 19\,375 \text{ cm}^4.$$

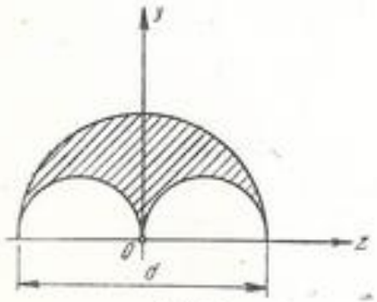


Fig. 2.6

2.6. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y ale suprafeței haşurate din figura 2.6.

Rezolvare. $I_z = \frac{\pi d^4}{128} - 2\,\frac{\pi d^4}{2\,048} = \frac{7\pi d^4}{1\,024}$,

$$I_y = \frac{\pi d^4}{128} - 2\left[\frac{\pi d^4}{128 \cdot 16} + \frac{\pi d^3}{32}\left(\frac{d^3}{16}\right)\right] = \frac{3\pi d^4}{1\,024}.$$

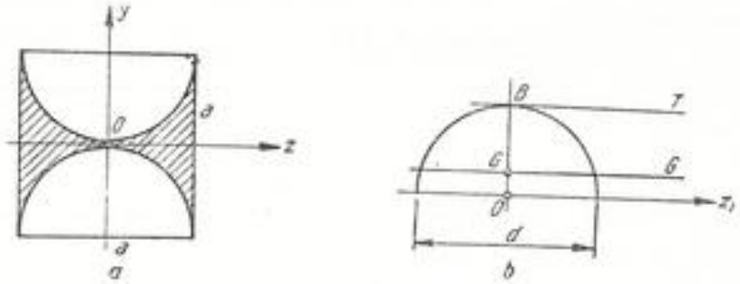


Fig. 2.7

2.7. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y pentru suprafața haşurată din figura 2.7, *a*.

Rezolvare. $I_y = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi a^4}{64} = a^4\left(\frac{1}{12} - \frac{\pi}{64}\right) \approx 0{,}0343\ a^4$.

Pentru I_z se calculează întîi momentul de inerție al semicercului față de tangenta BT paralelă cu diametrul de separație (Fig. 2.7, *b*):

$$I_{z1} = \frac{\pi d^4}{128}; \quad I_G = I_{z1} - A \cdot \overline{OG}^2; \quad \overline{OG} = \frac{2d}{3\pi};$$

$$I_G = \frac{\pi d^4}{128} - \frac{\pi d^2}{8}\left(\frac{2d}{3\pi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{128} - \frac{1}{18\pi}\right) d^4;$$

$$I_T = I_G + A \cdot \overline{GB}^2 = d^4\left(\frac{\pi}{128} - \frac{1}{18\pi}\right) + \frac{\pi d^2}{8}\left(\frac{d}{2} - \frac{2d}{3\pi}\right)^2 = d^4\left(\frac{5\pi}{128} - \frac{1}{12}\right).$$

Pentru figura haşurată, rezultă:

$$I_z = \frac{a^4}{12} - 2I_T = \frac{a^4}{12} - 2a^4\left(\frac{5\pi}{128} - \frac{1}{12}\right) =$$

$$= a^4\left(\frac{1}{4} - \frac{5\pi}{64}\right) \approx 0{,}005\ a^4.$$

2.8. Să se calculeze momentele de inerție ale secțiunii din figura 2.8 față de axele care trec prin centrul de greutate.

Rezolvare. Ordonata centrului de greutate față de sistemul de axe zOy (O fiind centrul de greutate al dreptunghiului) este:

$$\bar{y} = \frac{20 \cdot 30 \cdot 0 - \frac{20 \cdot 15}{2} \cdot 20 + \frac{\pi \cdot 20^2}{8}\left(15 + \frac{2 \cdot 20}{3\pi}\right)}{20 \cdot 30 + \frac{20 \cdot 15}{2} + \frac{\pi \cdot 20^2}{8}} \approx$$

$$\approx 0{,}022 \text{ cm (neglijabil)}$$

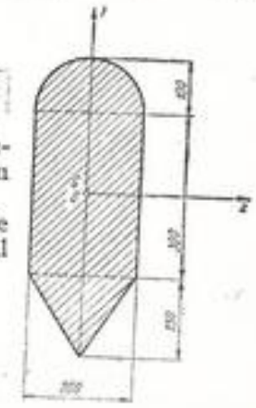


Fig. 2.8

Se poate considera deci că G coincide cu O.

$$I_y = \frac{\pi \cdot 20^4}{128} + \frac{30 \cdot 20^3}{12} + 2\,\frac{15 \cdot 10^3}{12} \approx 26\,430 \text{ cm}^4,$$

$$I_z = \frac{\pi \cdot 20^4}{128} + \frac{20 \cdot 30^3}{12} + \frac{20 \cdot 15^3}{36} - \frac{\pi \cdot 20^2}{8}\left(\frac{2 \cdot 20}{3\pi}\right)^2 + \frac{\pi \cdot 20^2}{8}\left(\frac{2 \cdot 20}{3\pi} + 15\right)^2 +$$

$$+ \frac{20 \cdot 15}{2}\,(15 + 5)^2 \approx 166\,175 \text{ cm}^4.$$

2.9. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y ale unui hexagon regulat înscris în cercul de rază R (Fig. 2.9, *a*).

Rezolvare. Se împarte hexagonul în șase triunghiuri echilaterale, de latură R.

Se scriu momentele de inerție ale triunghiului din figura 2.9, *b*, față de axele indicate, știind că, în general, un triunghi dreptunghic și un triunghi echilateral au momentele de inerție:

— față de bază: $bh^3/12$;

— față de axa paralelă cu baza, trecînd prin centrul de greutate: $bh^3/36$.

$$I_{z'} = \frac{R\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^3}{12} = \frac{\sqrt{3}R^4}{32},$$

$$I_{z''} = I_G + A \cdot d^2 = \frac{R\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^3}{36} + \frac{R\,\frac{R\sqrt{3}}{2}}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}R^4}{32},$$

$$I_{y'} = 2\,\frac{R\sqrt{3}}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^3 \frac{1}{12} = \frac{\sqrt{3}R^4}{96},$$

$$I_{y''} = \frac{\sqrt{3}R^4}{96} + \frac{R\,\frac{R\sqrt{3}}{2}}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{7\sqrt{3}R^4}{96}.$$

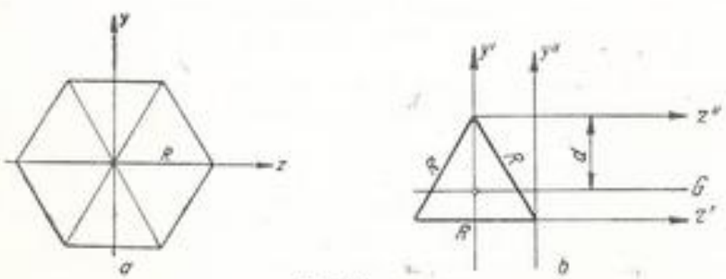


Fig. 2.9.

Cu aceste valori, pentru hexagon rezultă:

$$I_z = 4I_{z'} + 2I_{z''} = \frac{4\sqrt{3}R^4}{32} + \frac{6\sqrt{3}R^4}{32} = \frac{10\sqrt{3}R^4}{32},$$

$$I_y = 2\,I_{y'} + 4\,I_{y''} = \frac{2\sqrt{3}R^4}{96} + \frac{28\sqrt{3}R^4}{96} = \frac{10\sqrt{3}R^4}{32},$$

$$I_z = I_y = \frac{5\sqrt{3}R^4}{16}.$$

2.10. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y față de axele ce trec prin centrul de greutate, la suprafața hașurată din figura 2.10.

Rezolvare. $I_z = I_y = \dfrac{(b + 2a)^4 - b^4}{12}$.

2.11. Să se calculeze momentul de inerție centrifugal I_{zy} al unui sfert de cerc de rază R, față de axele ce trec prin centrul cercului (Fig. 2.11).

Rezolvare. Se aplică formula (2.3); se înlocuiește $dA = dz \cdot dy$ și se efectuează integrala dublă:

$$I_{zy} = \int_A zy\,dA = \int_0^R y\,dy \int_0^{\sqrt{R^2 - y^2}} z\,dz = \int_0^R y\,\frac{R^2 - y^2}{2}\,dy = \frac{R^4}{8}.$$

2.12. La un dreptunghi cu laturile b și h se cere să se calculeze momentele de inerție I_{z_1} și $I_{z_1y_1}$ față de axele Gz_1 și Gy_1 din figura 2.12.

Rezolvare. Se folosește formula (2.13) în care se cunosc:

$$I_z = \frac{bh^3}{12};\quad I_y = \frac{hb^3}{12};\quad I_{zy} = 0;\quad \text{tg}\,\alpha = \frac{h}{b},$$

$$I_{z_1} = I_z \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - 2\,I_{zy} \sin\alpha \cos\alpha,$$

$$I_{z_1} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{b^2}{b^2 + h^2} + \frac{b^3h}{12} \cdot \frac{h^2}{b^2 + h^2} = \frac{b^3h^3}{6(b^2 + h^2)}.$$

$$I_{z_1y_1} = (I_z - I_y) \sin\alpha \cos\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha.$$

$$I_{z_1y_1} = \left(\frac{bh^3}{12} - \frac{hb^3}{12}\right)\frac{bh}{b^2 + h^2} = \frac{b^2h^2}{12} \cdot \frac{h^2 - b^2}{h^2 + b^2}.$$

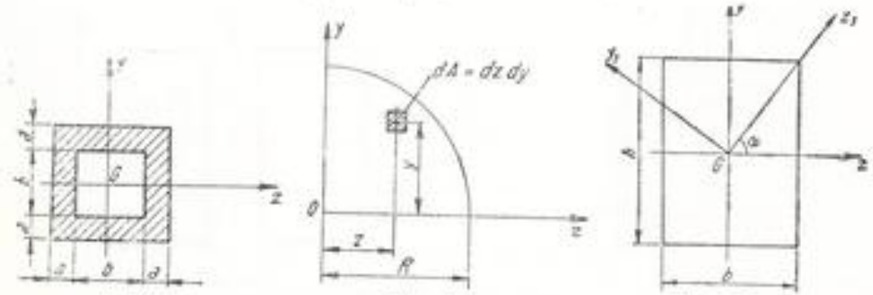


Fig. 2.10 Fig. 2.11 Fig. 2.12

2.13. Să se calculeze momentele de inerție și modulele de rezistență față de axele care trec prin centrul de greutate pentru secțiunea compusă din două profile ⋃ 30, cu găuri, așezate ca în figura 2.13.

Rezolvare. Pentru un profil ⋃ 30 se găsesc în anexa 9 următoarele date:

$$I_{z_1} = 8\,030 \text{ cm}^4;\ I_{y_1} = 495 \text{ cm}^4,$$

$$A_1 = 58{,}8 \text{ cm}^2;\ e = 2{,}70 \text{ cm};\ a = 10 \text{ cm}.$$

Rezultă pentru ansamblu:

$$I_z = 2 \cdot 8\,030 - 2\left(\frac{2 \cdot 3^3}{12} + 2 \cdot 3 \cdot 7^2\right) = 15\,464 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = 2\left(495 + 2{,}70^2 \cdot 58{,}8 - \frac{3 \cdot 2^3}{12}\right) = 1\,843 \text{ cm}^4,$$

$$W_z = \frac{15\,464}{15} = 1\,031 \text{ cm}^3,$$

$$W_y = \frac{1\,843}{10} = 184{,}3 \text{ cm}^3.$$

2.14. Care trebuie să fie distanța b între profilele ⋃ 20, așezate ca în figura 2.14, pentru ca $I_z = I_y$?

Pentru un singur profil se cunosc: $I_{z_1} = 1\,910$ cm^4; $I_{y_1} = 148$ cm^4; $A_1 = 32{,}2$ cm^2; $e = 2{,}01$ cm (anexa 9).

Rezolvare. $d = e + \frac{b}{2}$,

$$2I_{z_1} = 2I_{y_1} + 2A_1d^2;\ I_{z_1} = I_{y_1} + A_1d^2;$$

$$1\,910 = 148 + 32{,}2\ d^2;\ d^2 = 54{,}72 \text{ cm}^2;\ d = 7{,}4 \text{ cm}.$$

Rezultă:

$$b = 2\ (d - e) = 2\ (7{,}4 - 2{,}01) = 10{,}78 \text{ cm}.$$

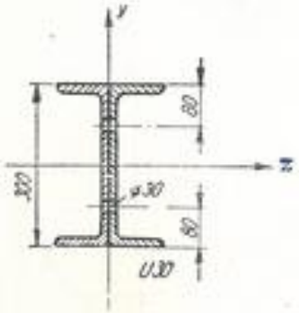


Fig. 2.13

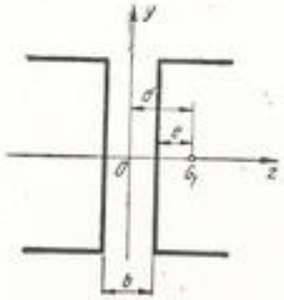


Fig. 2.14

2.15. Să se calculeze momentele de inerție față de axele z și y, pentru suprafața formată din patru profile $L\ 50 \times 50 \times 5$, așezate ca în figura 2.15.

Rezolvare. Pentru un singur profil, din anexa 7:

$$I_{z_1} = 11 \text{ cm}^4;\ A_1 = 4{,}80 \text{ cm}^2;\ e = 1{,}40 \text{ cm}.$$

Pentru ansamblu:

$$I_z = I_y = 4\left[11 + 4{,}8 \cdot \left(\frac{20}{2} - 1{,}40\right)^2\right] = 1\,464 \text{ cm}^4.$$

2.16. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y pentru secțiunea compusă din figura 2.16.

Rezolvare. Pentru un singur profil, în anexa 7 se găsește:

$$A_1 = 19{,}2 \text{ cm}^2;\ e = 2{,}82 \text{ cm};\ I_{z1} = 177 \text{ cm}^4.$$

Pentru ansamblu: $d = 2{,}82 + \frac{1}{2} = 3{,}32$ cm; rezultă I_z și I_y:

$$I_z = I_y = 4(177 + 19{,}2 \cdot 3{,}32^2) = 1\,552 \text{ cm}^4.$$

2.17. Să se calculeze momentele de inerție și modulele de rezistență față de axele care trec prin centrul de greutate, pentru secțiunea compusă din figura 2.17.

Rezolvare. Pentru un singur profil I 20, în anexa 10 se găsește:

$$I_{z1} = 2\,140 \text{ cm}^4;\ I_{y1} = 117 \text{ cm}^4,$$

$$A_1 = 33{,}5 \text{ cm}^2;\ h = 20 \text{ cm}.$$

Pentru ansamblu:

$$I_z = 2I_{z1} + 2\left[\frac{bt^3}{12} + bt\left(\frac{h + t}{2}\right)^2\right],$$

$$I_z = 2 \cdot 2\,140 + 2\left(\frac{30 \cdot 1^3}{12} + 30 \cdot 1 \cdot 10{,}5^2\right) = 10\,900 \text{ cm}^4,$$

Fig. 2.15

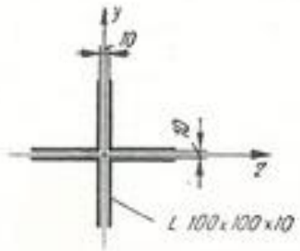


Fig. 2.16

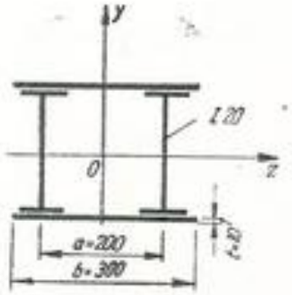


Fig. 2.17

$$I_y = 2\left[I_{y1} + A_1 \frac{a^2}{4} + \frac{ib^3}{12}\right].$$

$$I_y = 2\left(117 + 33{,}5 \cdot 10^2 + \frac{1 \cdot 30^3}{12}\right) = 11\,434 \text{ cm}^4,$$

$$W_z = \frac{10\,900}{11} = 991 \text{ cm}^3,$$

$$W_y = \frac{11\,434}{15} = 762 \text{ cm}^3.$$

2.18. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y, față de axele care trec prin centrul de greutate al sistemului format din trei profile ⋃, lipite, dintre care două ⋃ 20 și unul ⋃ 18, așezate ca în figura 2.18.

Rezolvare. În anexa 9 se arată caracteristicile profilului ⋃.

$$\cup\ 18: I_{z1} = 1\,350 \text{ cm}^4;\ I_{y1} = 114 \text{ cm}^4,$$

$$A_1 = 28 \text{ cm}^2;\ e_1 = 1{,}92 \text{ cm}.$$

$$\cup\ 20: I_{z_2} = 1\,910 \text{ cm}^4;\ I_{y_2} = 148 \text{ cm}^4,$$

$$A_2 = 32{,}2 \text{ cm}^2;\ e_2 = 2{,}01 \text{ cm},$$

$$\hat{z} = 0;\quad \hat{y} = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{32{,}2 \cdot 10 + 32{,}2 \cdot 10 + 28(20 + 1{,}92)}{2 \cdot 32{,}2 + 28} = 13{,}6 \text{ cm},$$

$$I_z = 2[1\,910 + 32{,}2\,(13{,}6 - 10)^2] + [114 + 28\,(1{,}92 + 6{,}4)^2] = 6\,707 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = 2[148 + 32{,}2 \cdot 2{,}01^2] + 1\,350 = 1\,906 \text{ cm}^4.$$

2.19. Se dă secțiunea compusă, formată din profilele I 14 și I 12, așezate alăturat, ca în figura 2.19.

Se cere să se calculeze momentele de inerție ale secțiunii compuse, în raport cu axele Gz, Gy, care trec prin centrul de greutate al ansamblului.

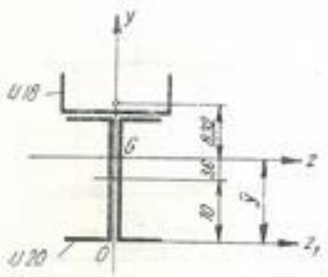


Fig. 2.18

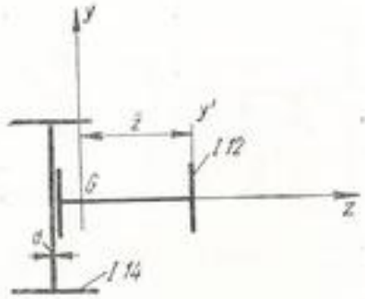


Fig. 2.19

Rezolvare. În *anexa 10* se găsește:

pentru I 14: $A_1 = 18{,}3$ cm²;
$I_{z_1} = 573$ cm⁴; $d = 5{,}7$ mm;
$I_{y_1} = 35{,}2$ cm⁴;
pentru I 12: $A_2 = 14{,}2$ cm²;
$I_{z_2} = 328$ cm⁴; $d = 5{,}1$ mm;
$I_{y_2} = 21{,}5$ cm⁴;

$$\hat{z} = \frac{\Sigma A_i z_i}{\Sigma A_i} = \frac{18{,}3 \cdot \left(12 + \frac{0{,}57}{2}\right) + 14{,}2 \cdot 6}{18{,}3 + 14{,}2} = 9{,}54 \text{ cm},$$

$$I_z = 573 + 21{,}5 = 594{,}5 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = 35{,}2 + 18{,}3 \cdot \left[(12 - 9{,}54) + \frac{0{,}57}{2}\right]^2 + 328 + 14{,}2 \cdot (9{,}54 - 6)^2 = 679{,}5 \text{ cm}^4.$$

2.20. Să se calculeze momentele de inerție față de axele Gz și Gy care trec prin centrul de greutate G al sistemului format din două profile ⋃ 30 așezate alăturat, ca în figura 2.20.

Rezolvare. Un singur profil ⋃ 30 are (v. *anexa 9*):

$$I_{z_1} = 8\,030 \text{ cm}^4;\ I_{y_1} = 495 \text{ cm}^4;\ A_1 = 58{,}8 \text{ cm}^2.$$

Pentru stabilirea poziției centrului de greutate G al secțiunii compuse, se alege un sistem de axe ajutător Oz_1y_1.

$$\hat{z} = \frac{(-2{,}70 \cdot 58{,}8) + (15 \cdot 58{,}8)}{2 \cdot 58{,}8} = 6{,}15 \text{ cm},$$

$$\hat{y} = \frac{(-2{,}70 \cdot 58{,}8) + (-15 \cdot 58{,}8)}{2 \cdot 58{,}8} = -8{,}85 \text{ cm},$$

$$I_z = 8\,030 + 58{,}8 \cdot 6{,}15^2 + 495 + 58{,}8 \cdot 6{,}15^2 = 12\,973 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = 495 + 58{,}8 \cdot 8{,}85^2 + 8\,030 + 58{,}8 \cdot 8{,}85^2 = 17\,735 \text{ cm}^4.$$

2.21. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y ale ansamblului profilelor din figura 2.21, așezate lipite.

Rezolvare. Elementele geometrice cunoscute ale profilului ⋃ 30 sînt:

$$I_{z_1} = 8\,030 \text{ cm}^4;\ I_{y_1} = 495 \text{ cm}^4;\ e = 2{,}70 \text{ cm};\ A_1 = 58{,}8 \text{ cm}^2.$$

Pentru profilul I 24:

$$I_{z_2} = 4\,250 \text{ cm}^4;\ I_{y_2} = 221 \text{ cm}^4;\ A_2 = 46{,}1 \text{ cm}^2;\ h = 24 \text{ cm},$$

$$I_z = 2I_{z_1} + I_{y_2} = 2 \cdot 8\,030 + 221 = 16\,281 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = 2\left[I_{y_1} + A_1\left(e + \frac{h}{2}\right)^2\right] + I_{z_2} = 2[495 + 58{,}8\,(2{,}7 + 12)^2] +$$

$$+ 4\,250 = 30\,650 \text{ cm}^4.$$

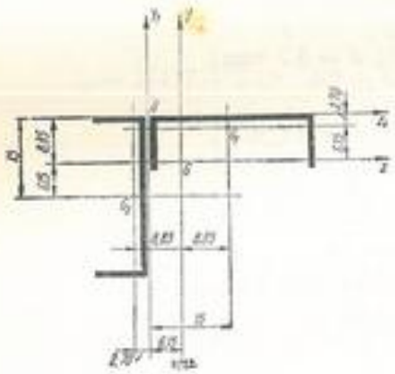


Fig. 2.20

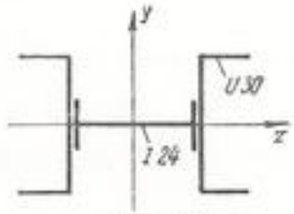


Fig. 2.21

2.22. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y, față de axele care trec prin centrul de greutate, pentru secțiunea compusă din figura 2.22, *a*.

Rezolvare. Secțiunile diferitelor piese sînt:
platbanda — $A = 18$ cm²; corniera — $A = 12{,}3$ cm²; inima — $A = 20$ cm². Golul unei găuri de nit are suprafața $A = 3{,}6$ cm². Se obține:

$$\hat{y} = \frac{18 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 12{,}3 \cdot 3{,}26 + 20 \cdot 11 - 2 \cdot 3{,}6 \cdot 0{,}9}{18 + 2 \cdot 12{,}3 + 20 - 2 \cdot 3{,}6} = 5{,}45 \text{ cm},$$

$$I_z = \frac{18 \cdot 1^3}{12} + 18 \cdot 4{,}95^2 + 2 \cdot (72{,}2 + 12{,}3 \cdot 2{,}19^2) + \frac{1 \cdot 20^3}{12} +$$

$$+ 20 \cdot 5{,}55^2 - 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 1{,}8^3}{12} + 3{,}6 \cdot 4{,}55^2\right) \approx 1\,835 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = \frac{1 \cdot 18^3}{12} + 2(72{,}2 + 12{,}3 \cdot 2{,}76^2) + \frac{20 \cdot 1^3}{12} - 2\left(\frac{1{,}8 \cdot 2^3}{12} + 3{,}6 \cdot 5^2\right) \approx 638 \text{ cm}^4.$$

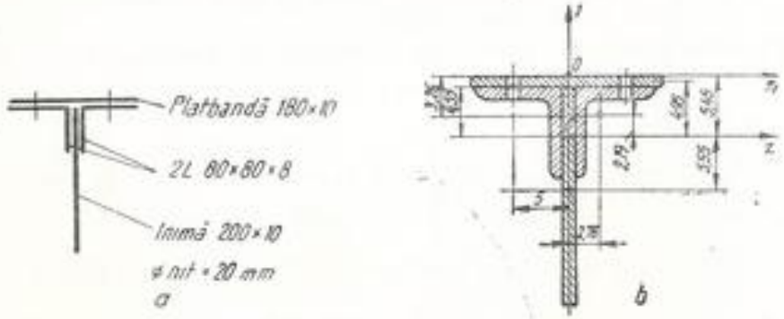


Fig. 2.22

2.23. Să se determine pentru secțiunea din figura 2.23:

a) momentele de inerție în raport cu sistemul de axe *Gzy* care trece prin centrul de greutate;

b) poziția axelor principale de inerție și valoarea momentelor de inerție principale I_1 și I_2.

Cotele în desen sînt date în milimetri.

Rezolvare. Cu cotele din figura 2.23 se determină poziția centrului de greutate G față de axele Oz_1y_1:

$$A = 6 \cdot 9 - 5 \cdot 8 = 14 \text{ cm}^2,$$

$$\hat{y} = \frac{8 \cdot 1 \cdot 5 + 6 \cdot 1 \cdot 0{,}5}{14} = 3{,}1 \text{ cm},$$

$$\hat{z} = \frac{8 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 6 \cdot 1 \cdot 3}{14} = 1{,}6 \text{ cm}.$$

Momentele de inerție față de axele Gz și Gy se calculează considerînd figura ca diferența a două dreptunghiuri:

$$I_z = \frac{6 \cdot 9^3}{12} + 6 \cdot 9(4{,}5 - 3{,}1)^2 - \left[\frac{5 \cdot 8^3}{12} + 5 \cdot 8(5 - 3{,}1)^2\right] = 114 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = \frac{9 \cdot 6^3}{12} + 9 \cdot 6(3 - 1{,}6)^2 - \left[\frac{8 \cdot 5^3}{12} + 8 \cdot 5(3{,}5 - 1{,}6)^2\right] = 40{,}5 \text{ cm}^4.$$

Momentul de inerție centrifugal se află considerînd suprafața ca suma celor două dreptunghiuri hașurate:

$$I_{zy} = 8 \cdot 1 \cdot (-1{,}1) \cdot (5 - 3{,}1) + 6 \cdot 1 \cdot (3 - 1{,}6) \cdot (-2{,}6) = -38{,}56 \text{ cm}^4.$$

Direcția axelor principale se află cu formula (2.16):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2 \cdot 38{,}56}{40{,}5 - 114} = \frac{77{,}12}{73{,}5} =$$

$$= 1{,}05; \quad 2\alpha = 46°30'; \quad \alpha = 23°15'.$$

Pentru calculul momentelor principale de inerție se aplică formula (2.15):

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}(114 + 40{,}5) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{(114 - 40{,}5)^2 + 4 \cdot 38{,}56^2} = 77{,}25 \pm 53{,}2,$$

$$I_1 \approx 130 \text{ cm}^4; \quad I_2 \approx 24 \text{ cm}^4.$$

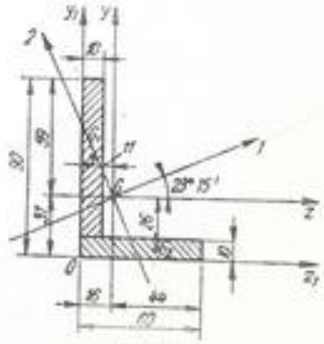


Fig. 2.23

2.24. Pentru secțiunea în formă de ⅃ din figura 2.24 să se găsească poziția axelor principale de inerție și să se calculeze momentele principale de inerție.

Rezolvare. Se împarte figura în trei dreptunghiuri componente. Momentele de inerție în raport cu axele Gz și Gy și momentul de inerție centrifugal I_{zy} sînt:

$$I_z = 2\left[\frac{8 \cdot 1^3}{12} + 8 \cdot 1 \cdot 9{,}5^2\right] + \frac{1 \cdot 18^3}{12} = 1\,932 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = 2\left[\frac{1 \cdot 8^3}{12} + 1 \cdot 8 \cdot 3{,}5^2\right] + \frac{18 \cdot 1^3}{12} = 282{,}9 \text{ cm}^4,$$

$$I_{zy} = 8 \cdot 1 \cdot (-3{,}5) \cdot 9{,}5 + 8 \cdot 1 \cdot 3{,}5 \cdot (-9{,}5) = -532 \text{ cm}^4.$$

Direcțiile principale se calculează cu relația 2.16:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} = \frac{-2 \cdot 532}{282{,}9 - 1\,932} = 0{,}645; \quad 2\alpha = 32°50'; \quad \alpha = 16°25'.$$

Momentele de inerție principale sînt, conform relației 2.15:

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}(I_z + I_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2},$$

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}(1\,932 + 282{,}9) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1\,932 - 282{,}9)^2 + 4 \cdot 532^2} = 1\,107{,}4 \pm 980,$$

$$I_1 = 2\,087 \text{ cm}^4; \quad I_2 = 127 \text{ cm}^4.$$

2.25. Să se calculeze momentele de inerție față de axele 1 — 1 și 2 — 2 ce trec prin centrul de greutate, pentru suprafața formată din două corniere L 50 × 50 × 5, așezate ca în figura 2.25.

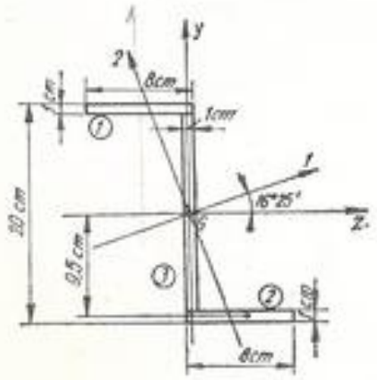


Fig. 2.24

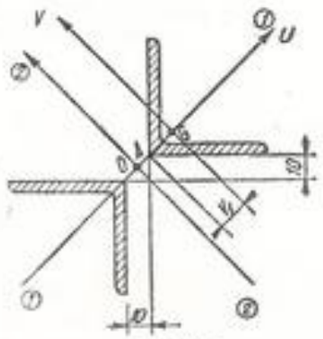


Fig. 2.25

Rezolvare. Pentru un singur cornier, din *anexa 7* se obține:

$$I_u = 17{,}4 \text{ cm}^4; \quad I_v = 4{,}54 \text{ cm}^4,$$

$$A = 4{,}8 \text{ cm}^2; \quad v_1 = 1{,}98 \text{ cm}.$$

Pentru ansamblul celor două corniere:

$$I_1 = 2I_u = 34{,}8 \text{ cm}^4;$$

$$d = GO = GA + AO = 1{,}98 + \frac{1{,}41}{2} = 2{,}69 \text{ cm};$$

$$I_2 = 2(4{,}54 + 4{,}80 \cdot 2{,}69^2) = 78{,}4 \text{ cm}^4.$$

2.26. Să se calculeze direcțiile principale și momentele de inerție principale față de un sistem de axe ce trece prin centrul de greutate al ansamblului din figura 2.26, *a*.

Rezolvare. Se determină poziția centrului de greutate G, față de axele Oz_1 și Oy_1.

$$\hat{y} = \frac{11{,}1 \cdot 1{,}85 + 12 \cdot 1 \cdot 6}{11{,}1 + 12 \cdot 1} \approx 4{,}0 \text{ cm},$$

$$z = \frac{11{,}1 \cdot 2{,}85 + 12 \cdot 1 \cdot 0{,}5}{11{,}1 + 12 \cdot 1} \approx 1{,}63 \text{ cm}.$$

Momentele de inerție axiale față de sistemul de axe Gzy sînt:

$$I_z = 34{,}9 + 11{,}1\ (4 - 1{,}85)^2 + \frac{1 \cdot 12^3}{12} + 1 \cdot 12 \cdot (6 - 4)^2 = 278{,}2 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = 34{,}9 + 11{,}1\ (2{,}85 - 1{,}63)^2 + \frac{12 \cdot 1^3}{12} + 1 \cdot 12 \cdot (1{,}63 - 0{,}5)^2 = 67{,}7 \text{ cm}^4.$$

Pentru determinarea momentului de inerție centrifugal în raport cu sistemul de axe Gzy trebuie cunoscut, în prealabil, momentul de inerție centrifugal în raport cu sistemul de axe Oz_1y_1, paralel cu primul, pentru

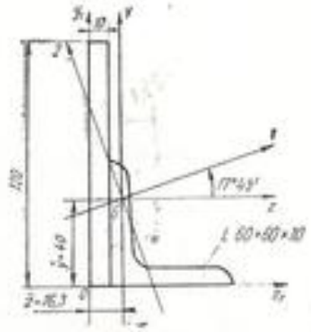
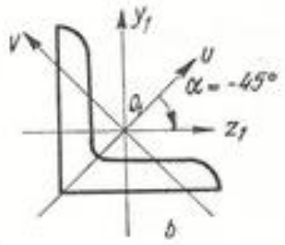


Fig. 2.26



a se putea aplica relația (2.5). Pentru cornierul cu aripi egale, direcțiile principale sînt O_1uv (Fig. 2.26, *b*), deoarece O_1u este axă de simetrie.

Se aplică relația (2.14) cu notațiile din figura 2.26, *b*,

$$I_{u_1v_1} = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\alpha + I_{uv} \cos 2\alpha \text{ unde, din anexa 8 se găsesc:}$$

$$I_u = 55{,}1 \text{ cm}^4;\ I_v = 14{,}8 \text{ cm}^4;\ I_{uv} = 0, \text{ iar } \alpha = -45°:$$

$$I_{u_1v_1} = \frac{55{,}1 - 14{,}8}{2} \sin(-90°) = -20{,}15 \text{ cm}^4.$$

Momentul de inerție centrifugal al întregii suprafețe față de sistemul de axe *Gzy* este, conform relației (2.5):

$$I_{zy} = -20{,}15 + 11{,}1 \cdot 1{,}22 \cdot (-2{,}15) + 12 \cdot 1\,(-1{,}13) \cdot 2 \approx -76{,}5 \text{ cm}^4,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} = \frac{2 \cdot (-76{,}5)}{67{,}7 - 278{,}2} = 0{,}712;\ 2\alpha = 35°26';\ \alpha = 17°43',$$

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} =$$

$$= \frac{278{,}2 + 67{,}7}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(278{,}2 - 67{,}7)^2 + 4\,(-76{,}5)^2}$$

$$I_1 \approx 303 \text{ cm}^4;\ I_2 \approx 43 \text{ cm}^4.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

2.27. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y față de axele ce trec prin centrul de greutate al rombului din figura 2.27.

Răspuns: $I_z = \frac{bh^3}{3}$; $I_y = \frac{hb^3}{3}$.

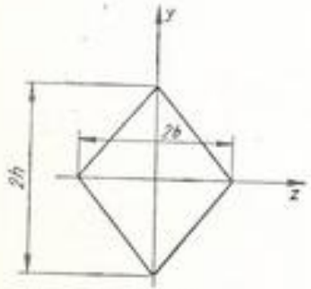


Fig. 2.27

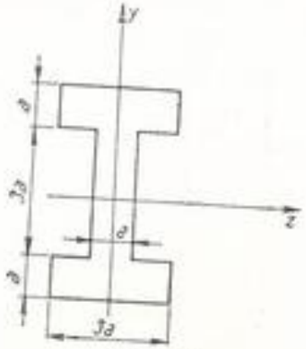


Fig. 2.28

2.28. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y ale secțiunii din figura 2.28, față de axele ce trec prin centrul de greutate.

Răspuns: $I_z = \frac{321\ a^4}{12}$; $I_y = \frac{57\ a^4}{12}$.

2.29. Să se calculeze momentele principale de inerție pentru suprafața hașurată din figura 2.29.

Răspuns: $I_1 = 55{,}5\ a^4$; $I_2 = 15{,}5\ a^4$.

2.30. Să se calculeze momentul de inerție față de axa *z* pentru suprafața hașurată în figura 2.30.

Răspuns: $I_z = 0{,}23\ d^4$.

2.31. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y față de axele care trec prin centrul de greutate pentru secțiunea compusă din figura 2.31 (piesele se consideră alăturate). Se utilizează *anexa* 9.

Răspuns: $I_z = 2 \cdot 7\,450$ cm^4; $I_y = 2\,056$ cm^4.

2.32. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y față de axele care trec prin centrul de greutate, pentru secțiunea compusă din figura 2.32.

Răspuns: $I_z = 4\,414$ cm^4; $I_y = 1\,467$ cm^4.

2.33. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y față de axele care trec prin centrul de greutate, pentru secțiunea compusă din figura 2.33 (cotele sînt date în milimetri).

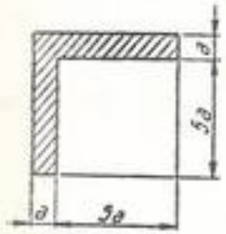


Fig. 2.29

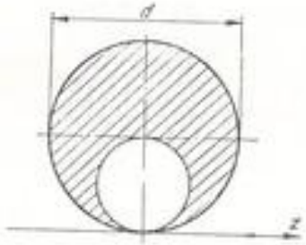


Fig. 2.30

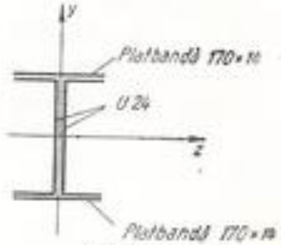


Fig. 2.31

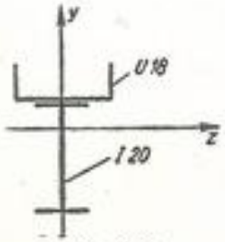


Fig. 2.32

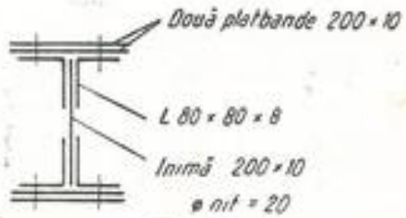


Fig. 2.33

CAPITOLUL 3

DIAGRAME DE EFORTURI ÎN BARE DREPTE

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. O grindă de forma din figura 3. *a* este în echilibru sub acţiunea forţelor aplicate şi a reacţiunilor din reazeme. Dacă se face o secţiune *s* prin care se taie grinda, cele două părţi obţinute îşi pierd echilibrul. Spre a restabili echilibrul uneia dintre părţi — de exemplu, cea din dreapta (Fig. 3. *a*, 3. *b*) — se introduc în secţiune o rezultantă R şi un cuplu M care reprezintă reducerea faţă de secţiune a forţelor din partea stîngă ce au fost înlăturate.

Alegînd un sistem de axe $Oxyz$ — axa x în lungul barei, axa y în secţiune verticală şi axa z în secţiune orizontală —, se pot descompune R şi M pe axe şi se obţin:

N — forţa axială, componenta forţei R pe Ox;
T — forţa tăietoare, componenta forţei R în planul Oyz al secţiunii;
T_y — forţa tăietoare perpendiculară pe Oz, proiecţia pe Oy a forţei T;
T_z — forţa tăietoare perpendiculară pe Oy, proiecţia pe Oz a forţei T;
M_t — momentul de răsucire, componenta pe Ox a cuplului M;
M_i — momentul încovoietor, componenta în planul secţiunii a lui M;
M_z — proiecţia pe Oz a lui M_i;
M_y — proiecţia pe Oy a lui M_i.

Mărimile de mai sus se consideră pozitive, cînd au sensurile din figura 3.*b*.

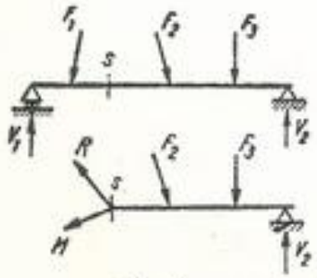


Fig. 3.*a*

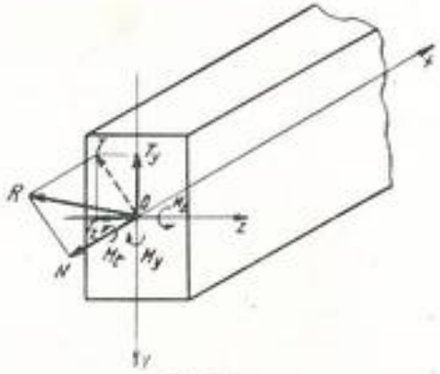


Fig. 3.*b*

2. Cele şase mărimi definite se reduc la trei, în cazul cînd toate forţele trec prin axa barei şi sînt conţinute într-un singur plan. Luînd planul forţelor ca plan vertical Oxy, rămîn numai N, T_y, M_z, care se scriu şi se definesc astfel:

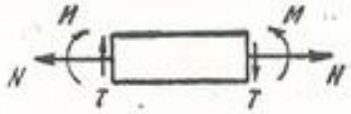


Fig. 3.*c*

N, forţa axială într-o secţiune oarecare, este suma proiecţiilor pe axa barei a forţelor din stînga secţiunii (sau a celor din dreapta).

T, forţa tăietoare într-o secţiune, este suma proiecţiilor pe normala la axa barei a forţelor din stînga secţiunii (sau a celor din dreapta).

M, momentul încovoietor, este suma momentelor forţelor din stînga secţiunii (inclusiv cupluri), luate faţă de secţiune (sau a celor din dreapta).

Cele trei eforturi sînt pozitive cînd au sensurile indicate pe figura 3.*c*.

3. Între eforturile T, M şi sarcina distribuită p există relaţiile diferenţiale:

$$p = -\frac{dT}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2}; \quad T = \frac{dM}{dx}. \tag{3.1}$$

Tabela 3.a

Sarcina	Forţa tăietoare T	Momentul încovoietor M
$p = 0$	constantă	variaţie liniară
	$T = 0$	constant
p = const.	variaţie liniară	variaţie după o parabolă de gradul II
variaţie liniară	variaţie după o parabolă de gradul II	variaţie după o parabolă de gradul III
$p = ax^n + bx^{n-1} + \ldots$	$T = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + \frac{b}{n}x^n + \ldots + C_1$	$M = \frac{a}{(n+1)(n+2)}x^{n+2} + \frac{b}{n(n+1)}x^{n+1} + \ldots C_1x + C_2$

4. Forţa tăietoare şi momentul încovoietor se pot obţine, în cazul general, prin integrarea relaţiilor (3.1):

$$T = -\int p \, dx + C_1; \quad M = \int T \, dx + C_2. \tag{3.2}$$

Dacă legea de variaţie a lui p este un polinom de gradul n, cea a forţei tăietoare este un polinom de gradul $n + 1$ şi cea a momentului încovoietor un polinom de gradul $n + 2$. Pe baza relaţiilor (3.2) s-a întocmit tabela 3. *a* din care se poate deduce imediat forma legii de variaţie a funcţiilor T şi M, atunci cînd se cunoaşte încărcarea grinzii

5. Pentru construcţia diagramelor de eforturi N, T, M se alege un sens de parcurs al barei, adică de creştere a variabilei x, de exemplu, de la stînga spre dreapta. La barele cotite se roteşte hîrtia în aşa fel ca, pe rînd, fiecare bară să fie parcursă de la stînga spre dreapta.

Pentru executarea graficelor se ia o linie de reper ca origine a diagramei, paralelă cu bara şi de aceeaşi lungime cu aceasta. Forţele axiale şi tăietoare pozitive se reprezintă la o scară oarecare, deasupra liniei de reper, iar cele negative dedesubt. Pentru momente, convenţia este inversă: momentele pozitive se reprezintă dedesubtul liniei de reper, iar cele negative deasupra.

B. PROBLEME REZOLVATE

3.1 — 3.7. Să se traseze diagramele N, T, M pentru grinzile din figurile 3.1—3.7 solicitate de sarcini concentrate.

Rezolvare. Trasarea diagramelor T şi M se face pe baza celor arătate la *Definiţii şi formule.*

a. Neexistînd sarcină distribuită ($p = 0$), pe intervalul dintre sarcini forţa tăietoare este constantă şi momentul încovoietor variază liniar (v. tabela 3.*a*.).

b. În dreptul sarcinilor concentrate forţa tăietoare are un salt (discontinuitate) egal cu mărimea forţei şi avînd acelaşi sens cu aceasta.

c. Reacţiunile sînt considerate ca sarcini exterioare (forţe sau cupluri concentrate).

Ţinînd seama de aceste observaţii, diagramele se construiesc după cum urmează:

— Diagrama T se trasează direct, prin însumarea algebrică a proiecţiilor forţelor pe normala la axa grinzii (din stînga sau din dreapta une secţiuni).

— Diagrama M se trasează calculînd valorile momentelor încovoietoare în fiecare din punctele în care se aplică sarcini şi ştiind că între două sarcini succesive momentul încovoietor variază liniar. Se dau pentru exemplificare calculele complete pentru problemele 3.1 şi 3.3. Pentru celelalte probleme se indică pe figură mărimile reacţiunilor şi se dau direct diagramele.

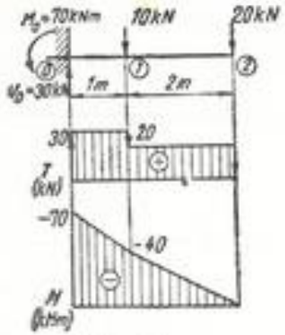


Fig. 3.1

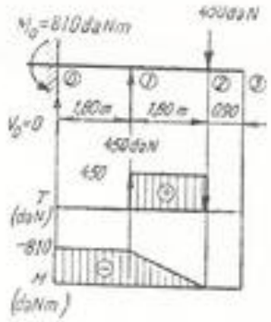


Fig. 3.2

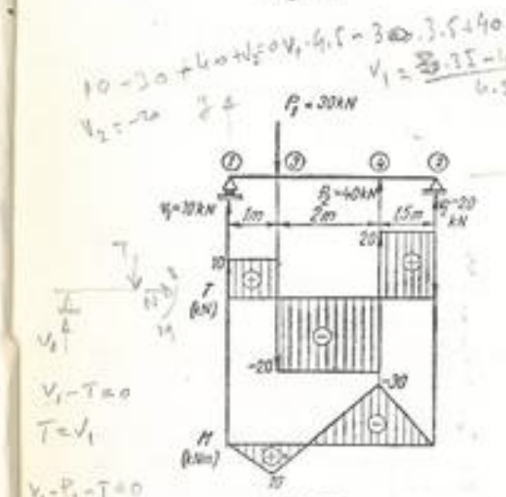


Fig. 3.3

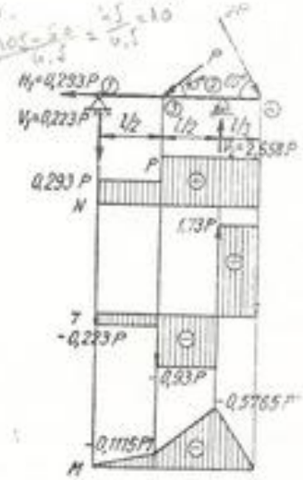


Fig. 3.4

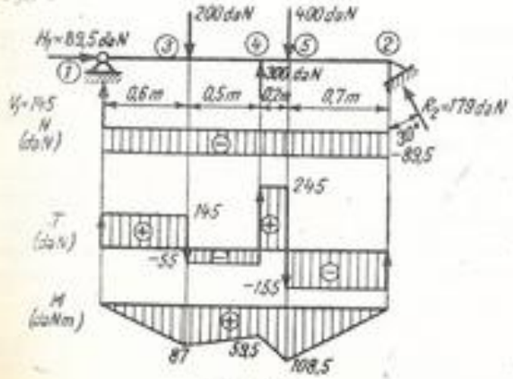


Fig. 3.5

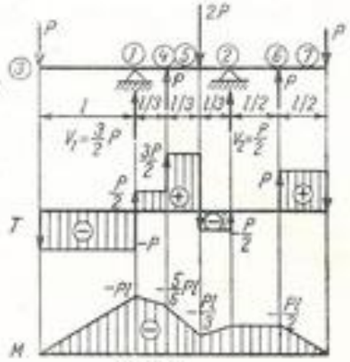


Fig. 3.6

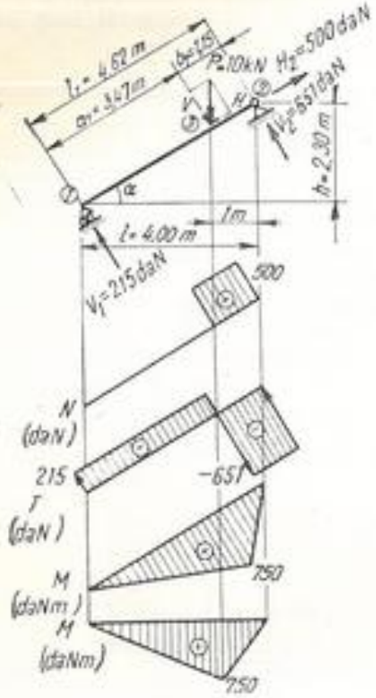


Fig. 3.7

Problema 3.1. a) *Forțele tăietoare:*

$$T_2 = 20 \text{ kN}; \; T_1' = 20 \text{ kN};$$

$$T_1'' = 20 + 10 = 30 \text{ kN}; \quad T_0 = 30 \text{ kN}.$$

b) *Momentele încovoietoare:*

$$M_2 = 0; \; M_1 = -2 \cdot 20 = -40 \text{ kNm},$$

$$M_0 = -20 \cdot 3 - 10 \cdot 1 = -70 \text{ kNm}.$$

Problema 3.3. a) *Reacțiunile:*

$$V_1 = \frac{30 \cdot 3{,}5 - 40 \cdot 1{,}5}{4{,}5} = 10 \text{ kN};$$

$$V_2 = \frac{30 \cdot 1 - 40 \cdot 3}{4{,}5} = -20 \text{ kN}.$$

Sensul reacțiunii V_2 este invers celui din figura 3.3.

b) *Forțele tăietoare:*

$$T_{12} = V_1 = 10 \text{ kN};$$

$$T_{34} = V_1 - P_1 = -20 \text{ kN};$$

$$T_{42} = T_{34} + P_2 = 20 \text{ kN}.$$

c) *Momentele încovoietoare:*

$$M_{12} = V_1 x = 10x; \; M_1 = 0,$$

$$M_3 = 10 \text{ kNm}; \; M_{34} = V_1 x - P_1(x - 1);$$

$$M_4 = -30 \text{ kNm}.$$

Observații. 1) Se va urmări permanent legătura dintre mărimea forței tăietoare și panta diagramei momentului încovoietor. De exemplu, la problema 3.1 se observă că pe intervalul *0—1* panta momentului încovoietor este mai mare ca pe intervalul *1—2*, deoarece forța tăietoare pe intervalul *0—1* este mai mare.

2) În punctul unde forța tăietoare trece prin zero, momentul încovoietor are o valoare extremă (maxim sau minim). De exemplu, la problema 3.5, punctele 3, 4 și 5.

3.8—3.10. Să se traseze diagramele *T*, *M* pentru grinzile din figurile 3.8 — 3.10, solicitate de cupluri concentrate.

Rezolvare. Trasarea diagramelor *T*, *M* se face pe baza observațiilor de la problemele 3.1 — 3.7, avînd în plus în vedere că în dreptul cuplurilor concentrate momentul încovoietor are un salt (discontinuitate) egal cu mărimea cuplului și avînd același sens cu acesta. Pentru exemplificarea metodicii de rezolvare a acestui tip de probleme se dau toate calculele pentru problema 3.9.

Problema 3.9. a) *Reacțiunile:*

$$V_2 l + M_4 - M_3 = 0;$$

$$V_2 = \frac{M_3 - M_4}{l} = \frac{6 - 4}{4} = 0{,}5 \text{ kN};$$

$$V_1 = -V_2 = -0{,}5 \text{ kN}.$$

b) *Forțele tăietoare:*

$$T_{12} = -0{,}5 \text{ kN}.$$

c) *Momentele încovoietoare:*

$$M_1 = 0;$$

$$M_4' = -0{,}5 \cdot 1 = -0{,}5 \text{ kNm};$$

$$M_3'' = -0{,}5 + 6 = 5{,}5 \text{ kNm};$$

$$M_4' = -0{,}5 \cdot 3 + 6 = 4{,}5 \text{ kNm};$$

$$M_4'' = 4{,}5 - 4 = 0{,}5 \text{ kNm};$$

$$M_2 = 0.$$

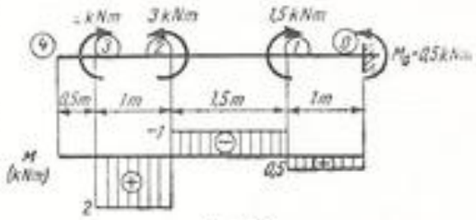


Fig. 3.8

3.11 — 3.19. Să se traseze diagramele *T*, *M* pentru grinzile din figurile 3.11 — 3.19, solicitate de sarcini distribuite.

Rezolvare. Trasarea diagramelor *T* și *M* se face pe baza următoarelor observații:

a) Pe intervalele pe care nu există sarcini distribuite ($p=0$), se ține seama de observațiile de la problemele 3.1—3.7 și 3.8—3.10.

b) Pe porțiunile pe care există sarcină uniform distribuită ($p=$ const.) forța tăietoare variază liniar și momentul încovoietor variază parabolic (v. tabela 3.a).

c) Pe porțiunile pe care există sarcină distribuită liniar, forța tăietoare variază după o parabolă de gradul *II* și momentul încovoietor după o *parabolă cubică* (v. tabela 3.a.).

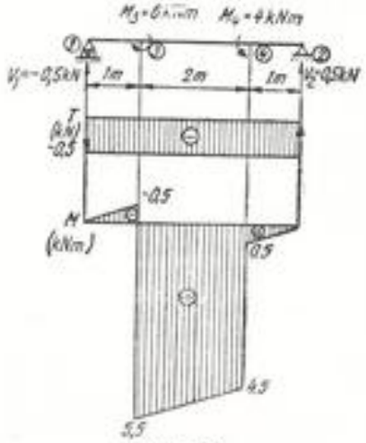


Fig. 3.9

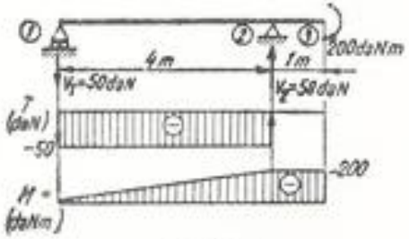


Fig. 3.10

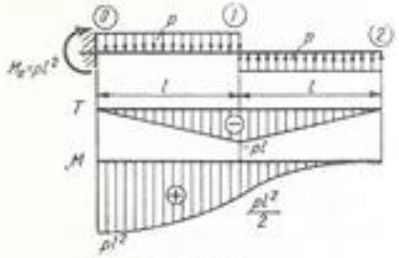


Fig. 3.11

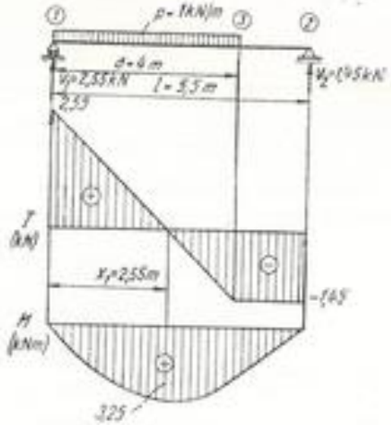


Fig. 3.12

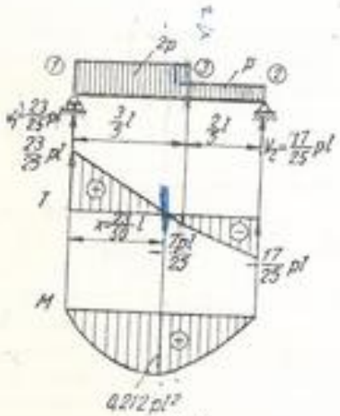


Fig. 3.13

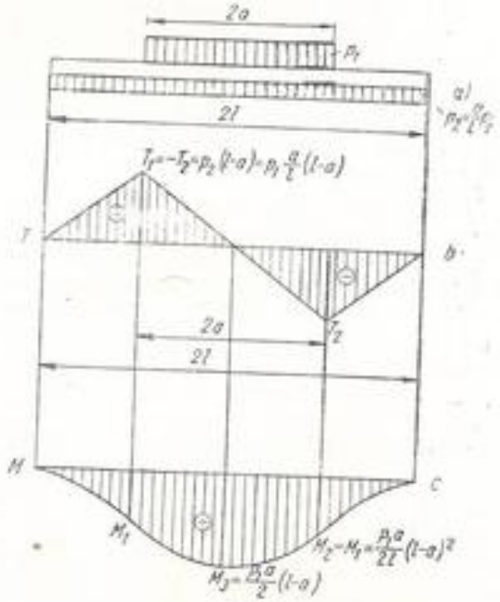


Fig. 3.14

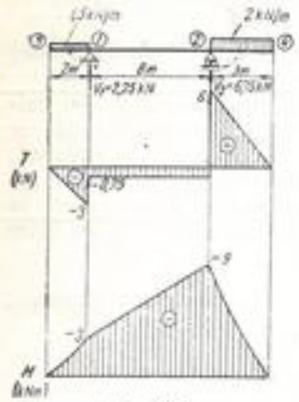


Fig. 3.15

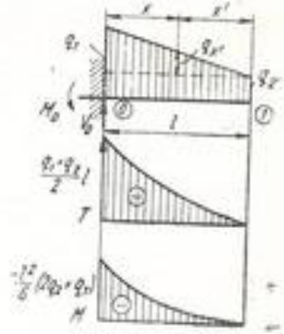


Fig. 3.16

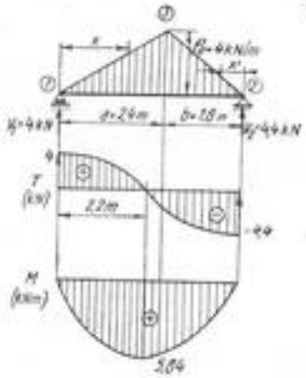


Fig. 3.17

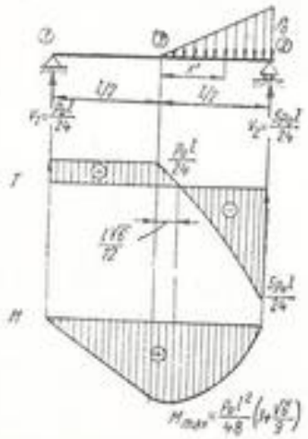


Fig. 3.18

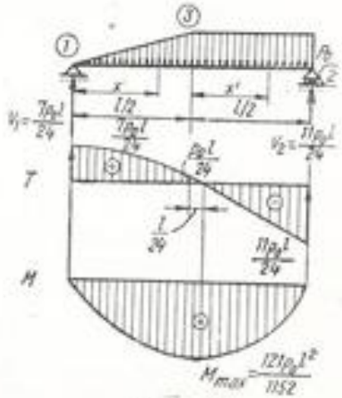


Fig. 3.19

d) Deşi asupra grinzilor nu sînt aplicate decît sarcini distribuite, în reazeme totuşi apar forţe şi cupluri concentrate.

Ţinînd seama de aceste observaţii, diagramele se trasează după cum urmează:

— *Diagrama T* (pe porţiunile unde există sarcini distribuite): se calculează valorile forţei tăietoare la cele două capete ale intervalului, se reprezintă în diagramă rezultatele, între care se trasează o linie dreaptă, dacă p = const., sau o parabolă, dacă p = liniar.

— *Diagrama M:* se calculează valorile momentului încovoietor la capetele tuturor intervalelor, se reprezintă în diagramă rezultatele, între care se duc linii drepte, dacă $p = 0$, sau parabole, dacă $p \neq 0$.

În punctele unde $T = 0$ se calculează M_{max}.

Pentru exemplificarea metodicii de rezolvare a acestui tip de probleme se dau toate calculele pentru problemele 3.12 şi 3.16:

Problema 3.12. $V_1 = \frac{p \cdot a\left(l - \frac{a}{2}\right)}{l} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 3{,}5}{5{,}5} = 2{,}55$ kN,

$$V_2 = \frac{p \cdot a \frac{a}{2}}{l} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 2}{5{,}5} = 1{,}45 \text{ kN},$$

$$M_{13} = V_1 x - \frac{px^2}{2} = 2{,}55x - \frac{x^2}{2}; \; M_3 = 2{,}55 \cdot 4 - \frac{4^2}{2} = 2{,}2 \text{ kNm}.$$

Secţiunea în care momentul este maxim se află anulînd derivata expresiei lui M_{13}:

$$\frac{dM_{13}}{dx} = V_1 - px_1 = 0; \; x_1 = \frac{V_1}{p} = 2{,}55 \text{ m}.$$

În această secţiune, forţa tăietoare este nulă şi:

$$M_{max} = V_1 x_1 - \frac{px_1^2}{2} = 2{,}55 \cdot 2{,}55 - \frac{1 \cdot 2{,}55^2}{2} = 3{,}25 \text{ kNm}.$$

Problema 3.16. Pentru simplificare se consideră că grinda este supusă la două sarcini suprapuse: o sarcină uniform distribuită q_2 şi una triunghiulară, avînd maximul $q_1 - q_2$.

a) *Reacţiunile:*

$$V_0 = q_2 l + \frac{(q_1 - q_2)l}{2} = \frac{(q_1 + q_2)}{2} l.$$

Pentru calculul momentului din încastrare se consideră că fiecare dintre cele două sarcini distribuite se concentrează în centrul de greutate respectiv:

$$M_0 = -q_2 l \frac{l}{2} - \frac{(q_1 - q_2)}{2} l \frac{l}{3} = -\frac{l^2}{6}(q_1 + 2q_2).$$

b) *Forţele tăietoare:*

$$T_{x'} = q_2 x' + q_{x'} \frac{x'}{2}.$$

Sarcina $q_{x'}$ se determină din asemănarea triunghiurilor:

$$\frac{q_{x'}}{q_1 - q_2} = \frac{x'}{l}; \quad q_{x'} = \frac{(q_1 - q_2)}{l} x',$$

$$T_{x'} = q_2 x' + \frac{q_1 - q_2}{l} x' \frac{x'}{2} = \frac{q_1 - q_2}{l} \frac{x'^2}{2} + q_2 x'.$$

Forţa tăietoare variază parabolic şi are la cele două capete ale grinzii valorile:

$$T_0 = q_2 l + \frac{q_1 - q_2}{l} \frac{l^2}{2} = \frac{q_1 + q_2}{2} l = V_0; \quad T_1 = 0.$$

c) *Momentele încovoietoare:*

Luînd momentele de la dreapta secţiunii, rezultă:

$$M_{x'} = -\left(q_2 \frac{x'^2}{2} + \frac{q_1 - q_2}{l} \cdot \frac{x'^3}{6}\right).$$

Momentul încovoietor variază după o parabolă cubică:

$$M_1 = 0; \quad M_0 = -\left(\frac{q_2 l^2}{2} + \frac{q_1 - q_2}{l} \cdot \frac{l^2}{6}\right) = -\frac{l^2}{6}(2q_2 + q_1).$$

3.20 — 3.36. Să se traseze diagramele N, T, M pentru grinzile din figurile 3.20 — 3.36.

3.37 — 3.47. Să se traseze diagramele N, T, M pentru sistemele de bare din figurile 3.37 — 3.47.

3.48 — 3.49. Să se traseze diagramele T, M pentru grinzile din figurile 3.48 — 3.49, solicitate de sarcini cuprinse în două plane perpendiculare între ele.

Rezolvare. Se studiază variaţia mărimilor T şi M pentru fiecare plan în parte şi se desenează separat diagramele.

În ultima diagramă se reprezintă simultan variaţia momentului încovoietor în cele două plane considerate.

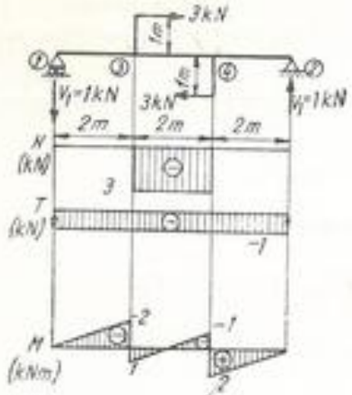


Fig. 3.20

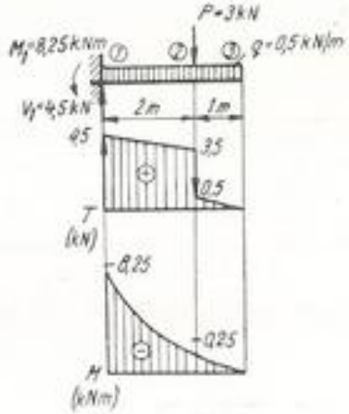


Fig. 3.21

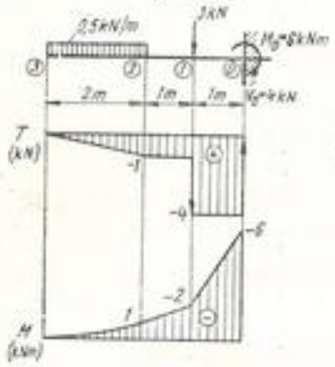


Fig. 3.22

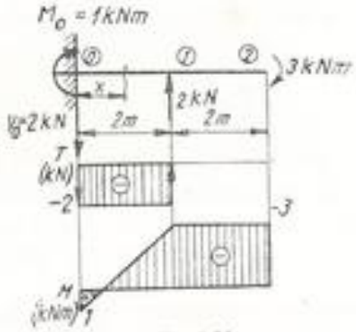


Fig. 3.23

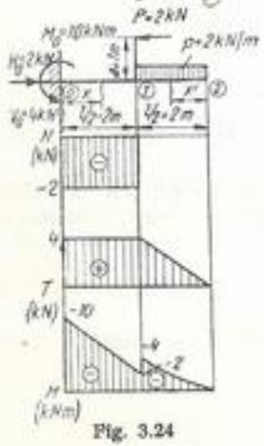


Fig. 3.24

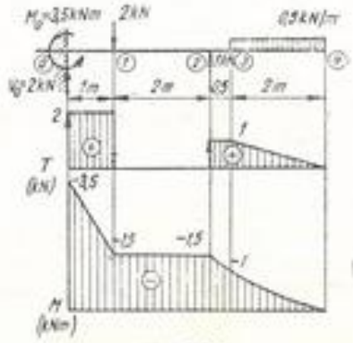


Fig. 3.25

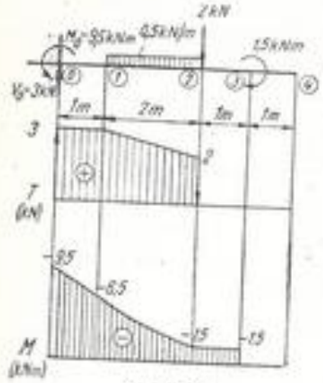


Fig. 3.26

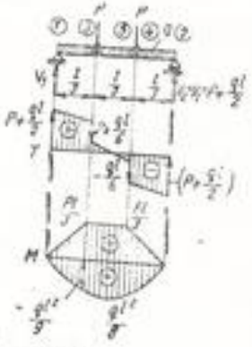


Fig. 3.27

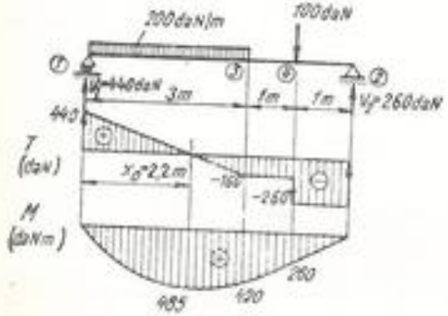


Fig. 3.28

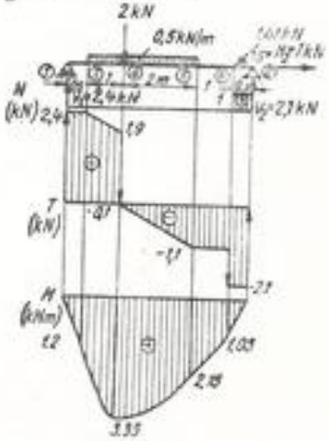


Fig. 3.29

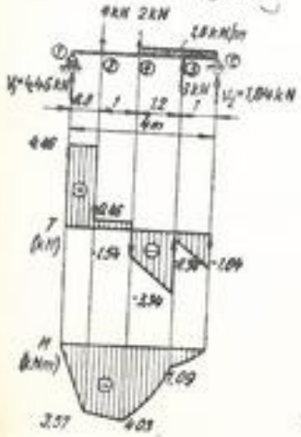


Fig. 3.30

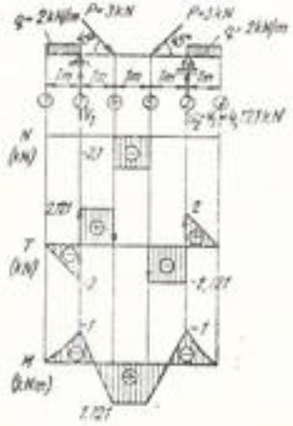


Fig. 3.31

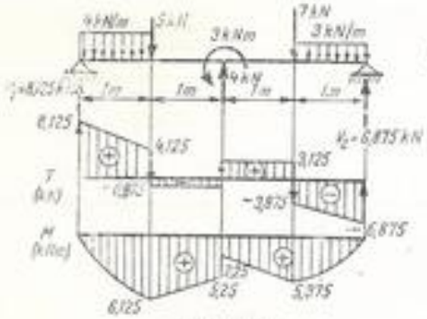


Fig. 3.32

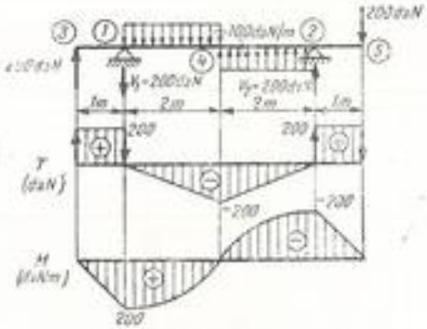


Fig. 3.33

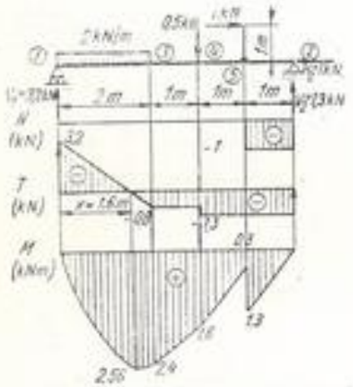


Fig. 3.34

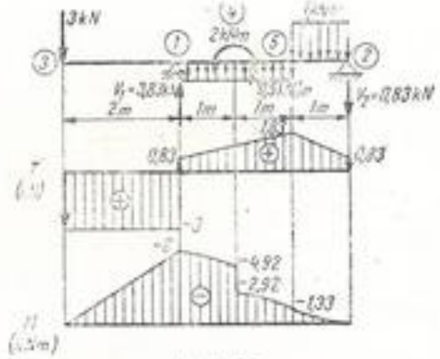


Fig. 3.35

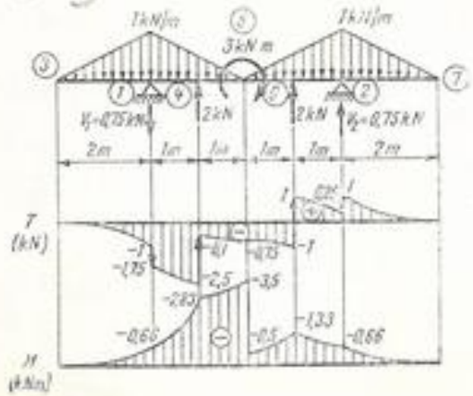


Fig. 3.36

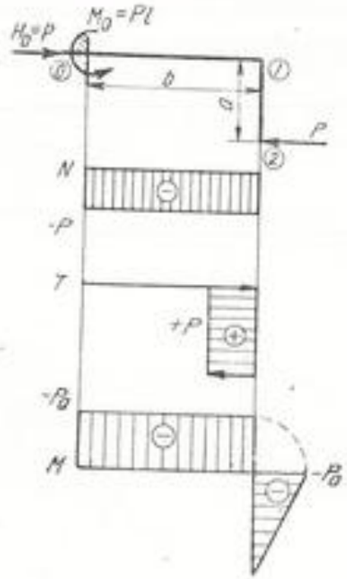


Fig. 3.37

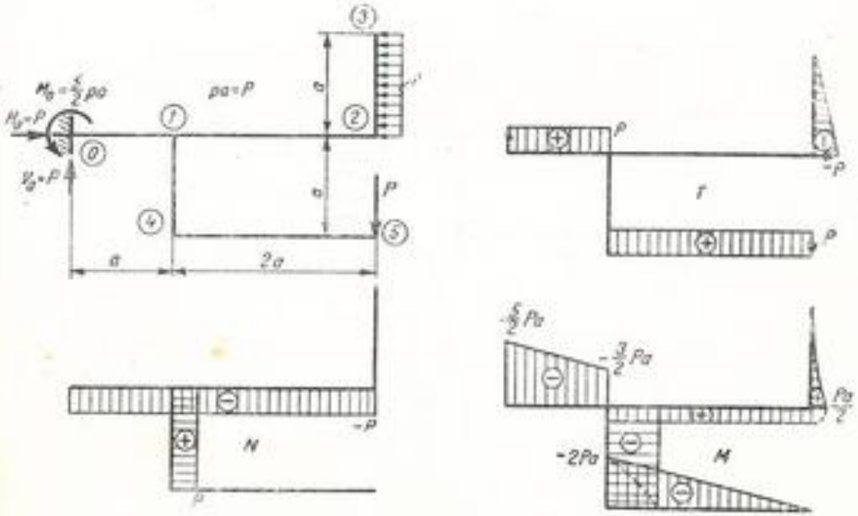


Fig. 3.38

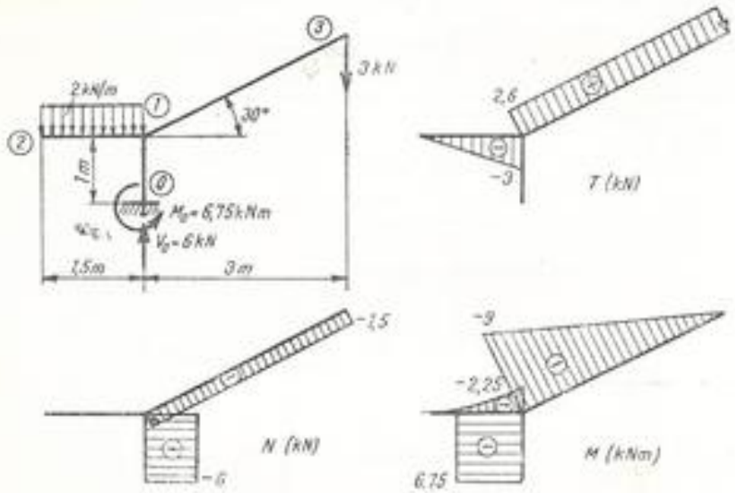


Fig. 3.39

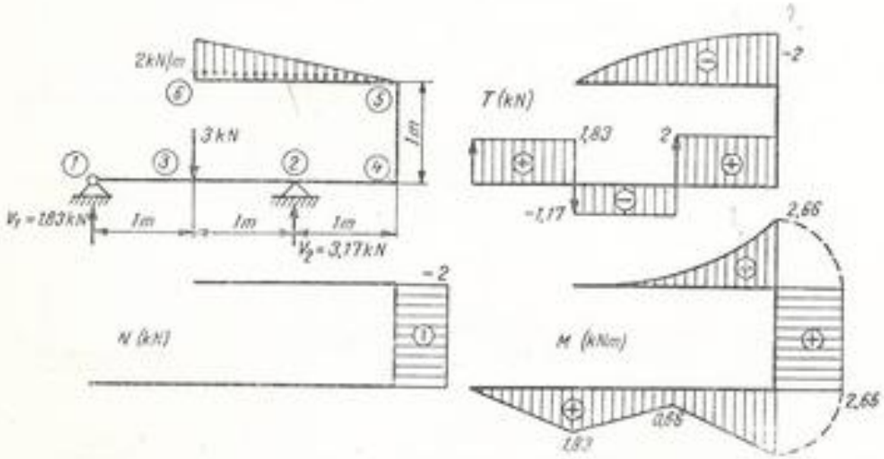


Fig. 3.40

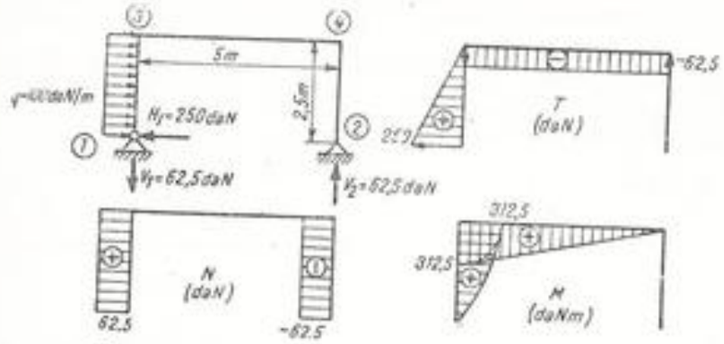


Fig. 3.41

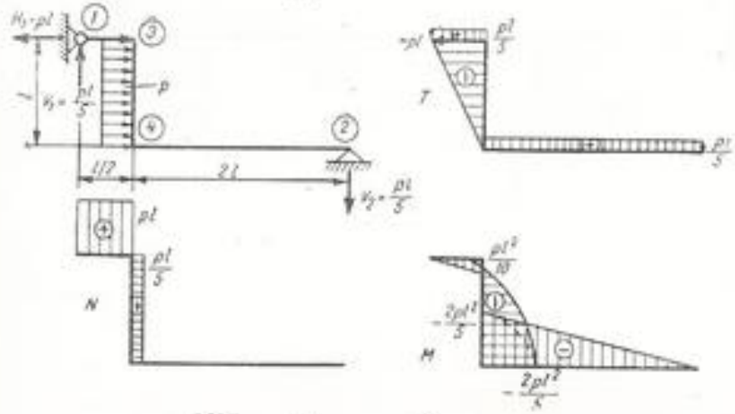


Fig. 3.42

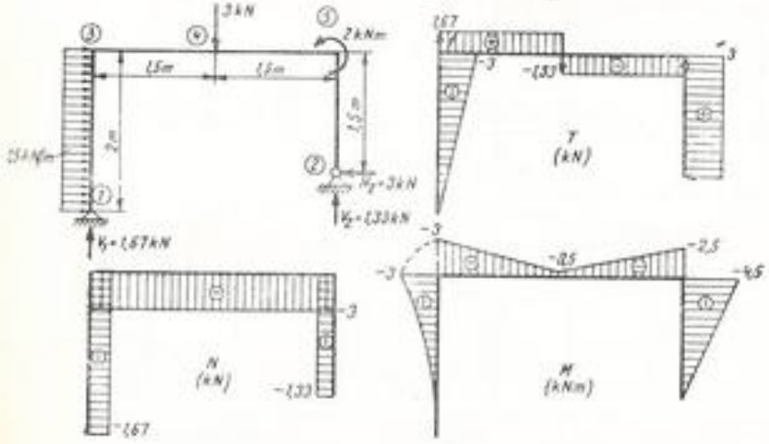


Fig. 3.43

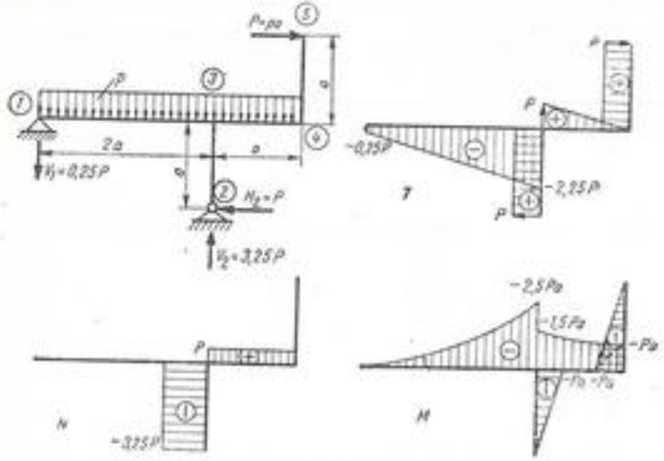


Fig. 3.44

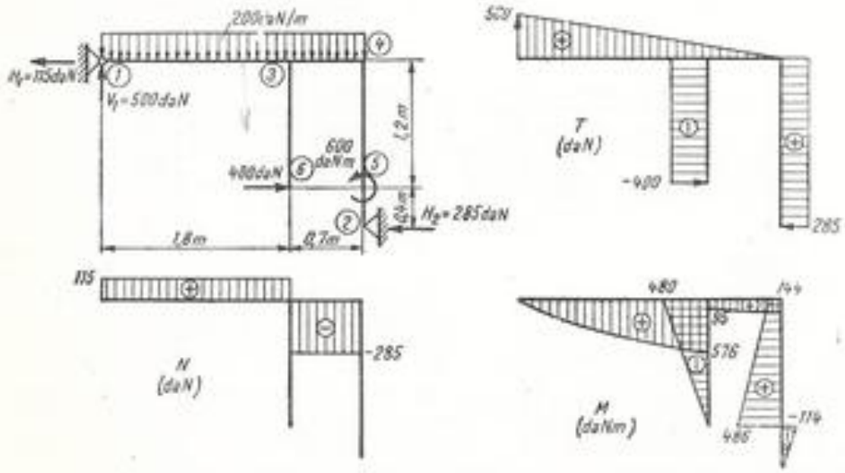


Fig. 3.45

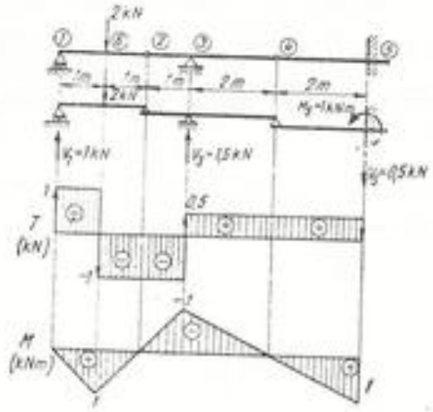


Fig. 3.46, a

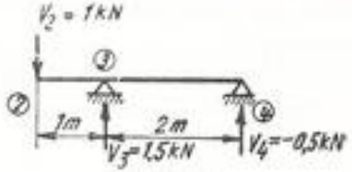


Fig. 3.46, b

Fig. 3.46, c

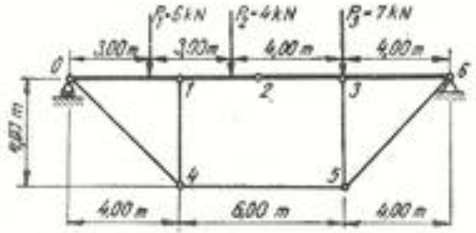


Fig. 3.47, a

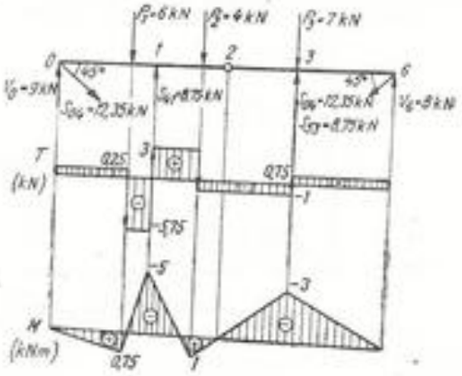


Fig. 3.47, b

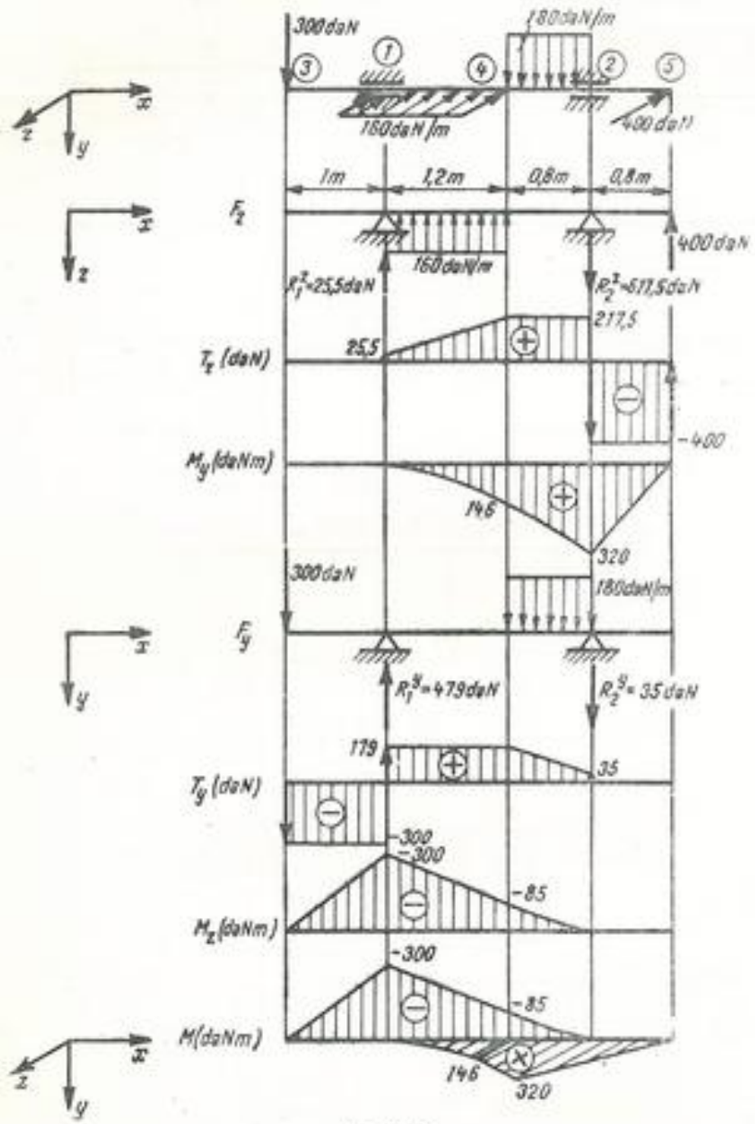


Fig. 3.48

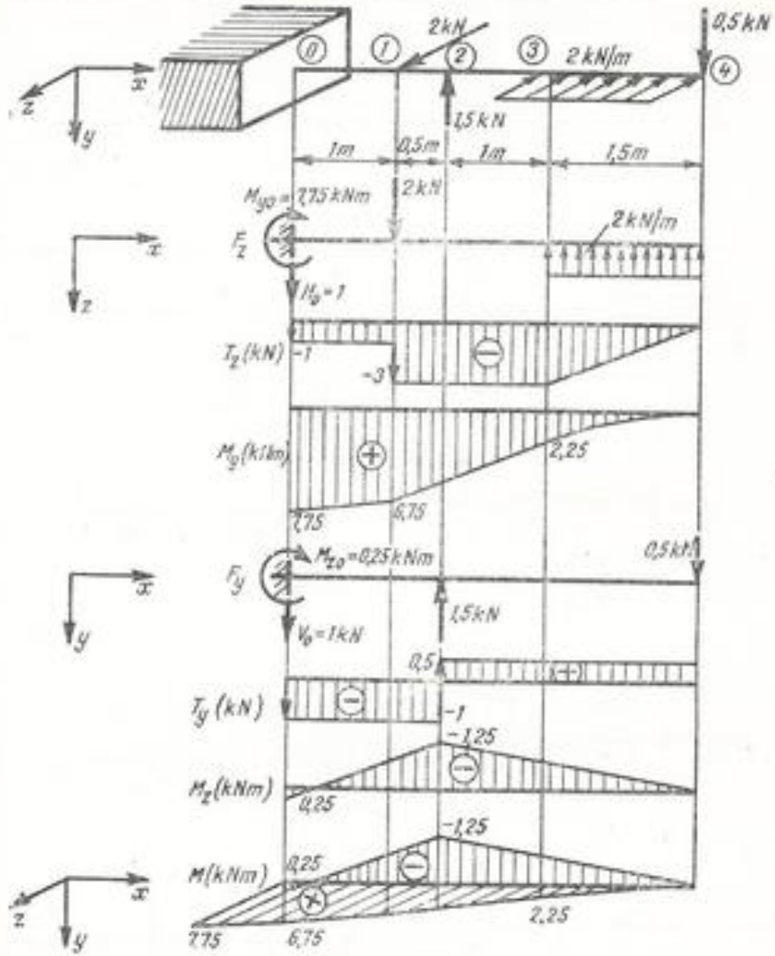


Fig. 3.49

C. PROBLEME NEREZOLVATE.

3.50 — 3.62. Să se construiască diagramele N, T, M pentru grinzile din figurile 3.50 — 3.62.

Fig. 3.50

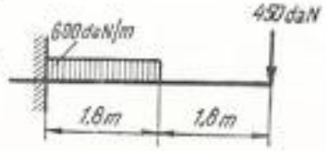
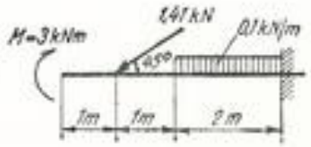


Fig. 3.51



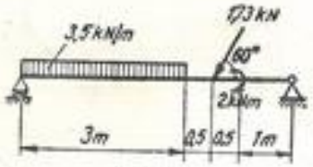


Fig. 3.52

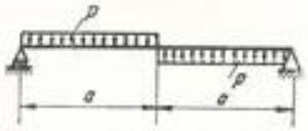


Fig. 3.53

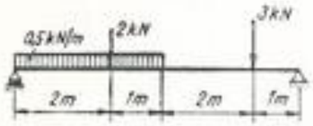


Fig. 3.54

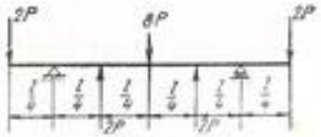


Fig. 3.55

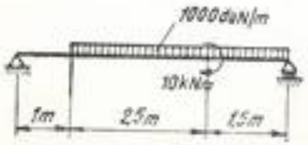


Fig. 3.56

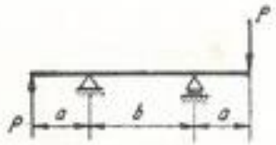


Fig. 3.57

Fig. 3.58

Fig. 3.59

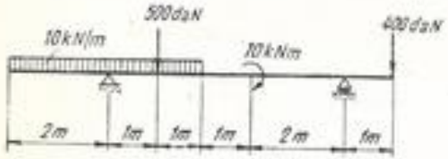


Fig. 3.60

Fig. 3.61

Fig. 3.62

CAPITOLUL 4

EFORTURI UNITARE ÎN BARELE DREPTE SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Formulele de dimensionare și de verificare pentru o bară solicitată la încovoiere sînt:

$$W_{nec} = \frac{M_i}{\sigma_a}, \tag{4.1}$$

$$\sigma_{if} = \frac{M_i}{W_{if}}, \tag{4.2}$$

$$M_{cap} = W_{if}\,\sigma_a. \tag{4.3}$$

2. Modulul de rezistență la încovoiere W, al unei secțiuni, măsurat în cm³, este o mărime geometrică avînd expresia:

Pentru dreptunghi:

$$W_z = \frac{bh^2}{6}. \tag{4.4}$$

La secțiuni de lemn se poate lua $h \approx 1{,}5\ b$.

Pentru cerc:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}. \tag{4.5}$$

Pentru secțiunea inelară:

$$W_z = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32\,D}. \tag{4.6}$$

3. În cazul general, modulul de rezistență la încovoiere este definit prin relația:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}, \tag{4.7}$$

în care I_z este momentul de inerție al secțiunii față de axa neutră, iar y_{max} distanța de la axa neutră la fibra extremă a secțiunii.

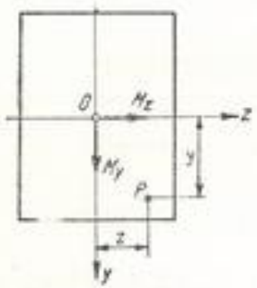


Fig. 4.a

4. În cazul secţiunii la care axa neutră nu este axă de simetrie, eforturile unitare în fibrele extreme sînt date de relaţiile:

$$\sigma_1 = \frac{M_z e_1}{I_z}; \qquad \sigma_2 = \frac{M_z e_2}{I_z}, \tag{4.8}$$

în care e_1 şi e_2 sînt distanţele fibrelor întinse şi comprimate la axa neutră.

5. În cazul încovoierii oblice (cînd direcţia vectorului momentului încovoietor nu coincide cu o axă principală de inerţie a secţiunii), efortul unitar într-un punct oarecare P al secţiunii (Fig. 4. *a*) este:

$$\sigma = \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y}, \tag{4.9}$$

iar în colţurile unei secţiuni se obţin valorile maxime sau minime:

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}. \tag{4.10}$$

6. Eforturile unitare de forfecare, produse de către forţa tăietoare T, în secţiunea unei grinzi solicitate la încovoiere, variază pe secţiune după legea lui *Juravski*:

$$\tau_{xy} = \frac{TS}{bI_z}, \tag{4.11}$$

în care S este momentul static al părţii din secţiune care caută să lunece, calculat faţă de axa neutră, b, lăţimea secţiunii în punctul unde se măsoară τ_{xy}, iar I_z, momentul de inerţie al secţiunii faţă de axa neutră.

Forţa de lunecare longitudinală pe o lungime oarecare din grindă este:

$$N_l = \int \frac{ST}{I_z}\, dx.$$

Dacă S, T şi I_z sînt constante pe un interval de lungime ℓ, rezultă:

$$N_l = \frac{\ell TS}{I_z}. \tag{4.12}$$

Relaţia serveşte la calculul niturilor, sudurilor şi penelor de la grinzi compuse.

B. PROBLEME REZOLVATE

4.1. Să se verifice grinda simplu rezemată la capete din figura 4.1, ştiind că este confecţionată din ţeavă de oţel. Se dau:

$$D = 8 \text{ cm}; \quad d = 5{,}5 \text{ cm şi } \sigma_a = 1\,300 \text{ daN/cm}^2.$$

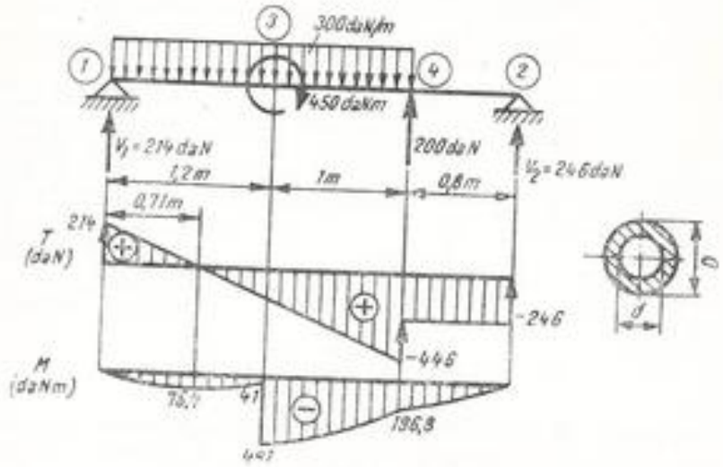


Fig. 4.1.

Rezolvare. Se trasează diagramele T, M, aşa cum s-a arătat la capitolul 3, şi se calculează valoarea momentului încovoietor maxim.

$$M_{max} = M_3 = 491 \text{ daNm} = 4{,}91 \cdot 10^4 \text{ daNcm}.$$

Din relaţiile (4.6) şi (4.2) rezultă:

$$W_z = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\pi(8^4 - 5{,}5^4)}{32 \cdot 8} = 39 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma_{af\,max} = \frac{4{,}91 \cdot 10^4}{39} = 1\,260 \text{ daN/cm}^2.$$

4.2. Pentru grinda de oţel din figura 4.2 se cere: *a)* să se calculeze eforturile unitar maxim care apare în grindă; *b)* valoarea acestuia dacă se ţine seama şi de greutatea proprie a grinzii ($\gamma = 7{,}85$ daN/dm³).

Rezolvare. Se calculează momentul de inerţie cum s-a arătat în capitolul 2 şi apoi modulul de rezistenţă cu relaţia (4.7).

$$I_z = \frac{20 \cdot 30^3}{12} - \frac{16 \cdot 26^3}{12} = 2{,}15 \cdot 10^4 \text{ cm}^4,$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{2{,}15 \cdot 10^4}{15} = 1{,}43 \cdot 10^3 \text{ cm}^3.$$

Greutatea proprie pe unitatea de lungime a grinzii:

$$q = A \cdot 1 \cdot \gamma = 184 \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-3} = 1{,}44 \text{ daN/cm} = 144 \text{ daN/m}.$$

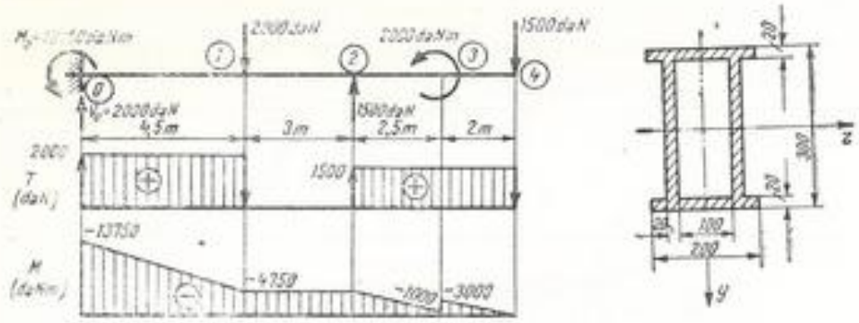


Fig. 4.2.

în care:

$$A = 30 \cdot 20 - 26 \cdot 16 = 184 \text{ cm}^2.$$

a) Cînd nu se ţine seama de greutatea proprie:

$$|M'_{max}| = |M'_0| = 13\,750 \text{ daNm} = 1{,}375 \cdot 10^6 \text{ daNcm},$$

$$\sigma'_{max\,ef} = \frac{1{,}375 \cdot 10^6}{1{,}43 \cdot 10^3} = 962 \text{ daN/cm}^2.$$

b) Cînd se ţine seama de greutatea proprie:

$$|M''_{max}| = |M''_0| = 13\,750 + 144 \cdot 12 \cdot 6 = 24\,120 \text{ daNm} = 2{,}412 \cdot 10^6 \text{ daNcm}.$$

$$\sigma''_{max\,ef} = \frac{2{,}412 \cdot 10^6}{1{,}43 \cdot 10^3} = 1\,690 \text{ daN/cm}^2.$$

Greutatea proprie produce o creştere a efortului unitar maxim cu 76%.

4.3. Să se dimensioneze grinda încastrată din figura 4.3 considerînd cazurile în care este construită: *a)* din lemn cu secţiune dreptunghiulară, luînd $b = \frac{2}{3}h$; *b)* din oţel I; *c)* din două corniere _|_|_. Se dă: $P = 50$ kN; $l = 3$ m.

Rezistenţele admisibile sînt: pentru lemn: $\sigma_a = 100$ daN/cm²; pentru oţel: $\sigma_a = 1\,200$ daN/cm².

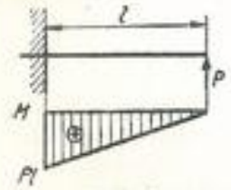


Fig. 4.3

Rezolvare: a) Se aplică relaţia (4.1).

Momentul încovoietor maxim este (în valoare absolută):

$$|M_i| = Pl = 5\,000 \cdot 300 = 1\,500\,000 \text{ daNcm};$$

$$W_{nec} = \frac{M_i}{\sigma_a} = \frac{1\,500\,000}{100} = 15\,000 \text{ cm}^3.$$

Pentru secţiunea dreptunghiulară, modulul de rezistenţă este dat de relaţia (4.4):

$$W_{nec} = \frac{bh^2}{6} = \frac{\frac{2}{3}hh^2}{6} = \frac{h^3}{9} = 15\,000 \text{ cm}^3,$$

$$h = \sqrt[3]{9 \cdot 15\,000} = 51{,}3 \text{ cm}; \quad b = \frac{2}{3}h = 34{,}2 \text{ cm}.$$

Rezultînd dimensiuni prea mari pentru grindă, se renunţă la construcţia grinzii din lemn.

b) Grindă din oţel I:

$$W_{nec} = \frac{M_i}{\sigma_a} = \frac{1\,500\,000}{1\,200} = 1\,250 \text{ cm}^3.$$

Căutînd în *anexa 10* profilul standardizat care are W_x aproape de această valoare, se găseşte $W_x = 1\,460$ cm³, corespunzător profilului I 40.

Alegînd acest profil, efortul unitar efectiv este:

$$\sigma_{ef} = \frac{M_i}{W_{ef}} = \frac{1\,500\,000}{1\,460} = 1\,027 \text{ daN/cm}^2 < 1\,200 \text{ daN/cm}^2.$$

c) Grindă din două corniere:

Avînd acelaşi moment încovoietor şi aceeaşi rezistenţă admisibilă, rezultă, ca mai sus:

$$W_{nec} = 1\,250 \text{ cm}^3.$$

Pentru o singură cornieră:

$$W_1 = \frac{1\,250}{2} = 625 \text{ cm}^3.$$

Din anexele 7 şi 8 se constată că nu există cornieră cu W atît de mare.

Concluzie: Materialul din care se construieşte o grindă se găseşte, practic, în anumite dimensiuni standardizate sau uzuale; dacă din calcule rezultă dimensiuni mai mari decît cele uzuale, se caută alt material sau alt profil pentru grindă.

4.4. Să se dimensioneze din oţel, cu $\sigma_a = 1\,200$ daN/cm², grinda din figura 4.4, *a* şi să se compare cantităţile de material necesare, dacă secţiunea este:

a) circulară;
b) inelară cu $d = 0{,}8\,D$;
c) pătrată;
d) cheson, ca în figura 4.4, *b*;
e) profil de forma din figura 4.4, *c*;
f) profil I laminat.

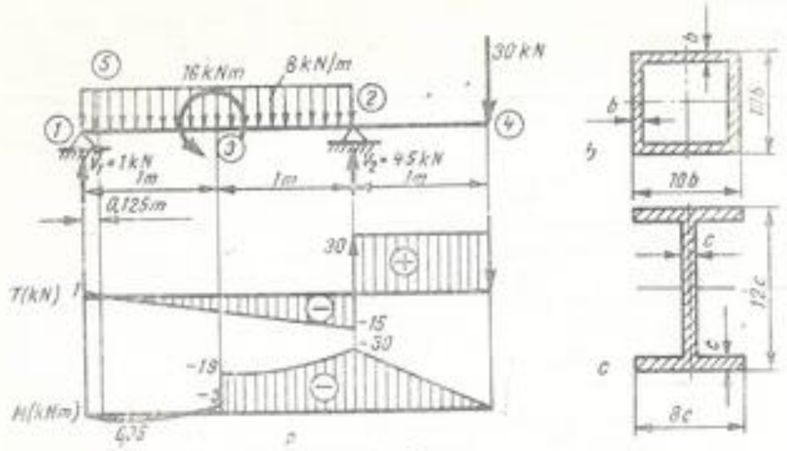


Fig. 4.4.

Rezolvare.

$$|M_{max}| = |M_2| = 30 \text{ kNm} = 3 \cdot 10^5 \text{ daN cm}.$$

a) $d = \sqrt[3]{\frac{32\,M}{\pi\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3 \cdot 10^5}{\pi \cdot 1\,200}} = 13{,}63$ cm. Se va alege $d = 14$ cm.

b) $W_{net} = \frac{\pi}{32D}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32\,D}[D^4 - (0{,}8\,D)^4] = \frac{0{,}59\pi D^3}{32} = \frac{M_{max}}{\sigma_a}$.

$$D = \sqrt[3]{\frac{32\,M_{max}}{0{,}59\,\pi\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3 \cdot 10^5}{0{,}59 \cdot \pi \cdot 1\,200}} = 16{,}3 \text{ cm}; \; d = 0{,}8\,D = 13{,}1 \text{ cm}.$$

Se va alege $D = 16{,}5$ cm şi $d = 13$ cm.

c) $W_{net} = \frac{a^3}{6} = \frac{M_{max}}{\sigma_a}$; $a = \sqrt[3]{\frac{6M_{max}}{\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 3 \cdot 10^5}{1\,200}} = 11{,}45$ cm.

Se va alege $a = 11{,}5$ cm.

d) $W_{net} = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{\frac{(10b)^4}{12} - \frac{(8\,b)^4}{12}}{5\,b} = 98{,}4b^3 = \frac{M_{max}}{\sigma_a}$;

$$b = \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{98{,}4\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^5}{98{,}4 \cdot 1\,200}} = 1{,}365 \text{ cm}.$$

Se va alege $b = 1{,}40$ cm.

e) $W_{net} = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{\frac{8c(12c)^3}{12} - 2\frac{3{,}5c(10c)^3}{12}}{6} = 94{,}5c^3 = \frac{M_{max}}{\sigma_a}$.

$$c = \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{94{,}5\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^5}{94{,}5 \cdot 1\,200}} = 1{,}38 \text{ cm}.$$

Se va alege $c = 1{,}4$ cm.

f) $W_{net} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{3 \cdot 10^5}{1\,200} = 250$ cm³.

Se va alege din tabele un profil I 22 care are $W_z = 278$ cm³ şi aria secţiunii $A = 39{,}6$ cm².

Greutăţile grinzii în cele 5 variante se vor afla în raportul ariilor secţiunilor, şi anume: 154 : 81 : 132 : 70,5 : 51 : 39,6 cm², sau în procente faţă de secţiunea circulară, considerată 100%:

$$100 : 52{,}6 : 85{,}8 : 45{,}7 : 33{,}1 : 25{,}7\%.$$

4.5. O grindă simplu rezemată la capete este alcătuită din două profile ∪20, aşezate ca în figura 4.5. Se cere:

a) valoarea sarcinii uniform distribuite pe care o poate suporta grinda;

b) mărimea sarcinii concentrate, aşezată la mijloc, pe care o poate suporta grinda.

Se dă: $\sigma_a = 1\,000$ daN/cm²; $l = 2$ m.

Rezolvare. a) $I_z = 2 \cdot 1\,910 = 3\,820$ cm⁴; $W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{3\,820}{10} = 382$ cm³,

$$M_{cap} = W_z \cdot \sigma_a = 382 \cdot 1\,000 = 382\,000 \text{ daN cm}.$$

Momentul maxim al grinzii cu sarcina uniform distribuită este:

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8}; \; p = \frac{8M_{cap}}{l^2} = \frac{8 \cdot 382\,000}{200^2} = 76{,}4 \text{ daN/cm} = 76{,}4 \text{ kN/m}.$$

b) Momentul capabil este acelaşi, iar momentul maxim al grinzii cu forţa concentrată este:

$$M_{max} = \frac{Pl}{4}; \; P = \frac{4M_{cap}}{l} = \frac{4 \cdot 382\,000}{200} = 7\,640 \text{ daN}.$$

4.6. Să se calculeze momentul încovoietor capabil al unei grinzi de oţel, avînd secţiunea ca în figura 4.6, dacă este aşezată întîi ca în figura 4.6, *a* şi apoi ca în figura 4.6, *b*.

Se dă $\sigma_a = 1\,200$ daN/cm².

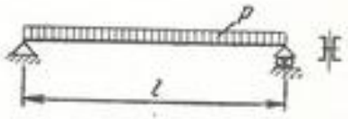


Fig. 4.5

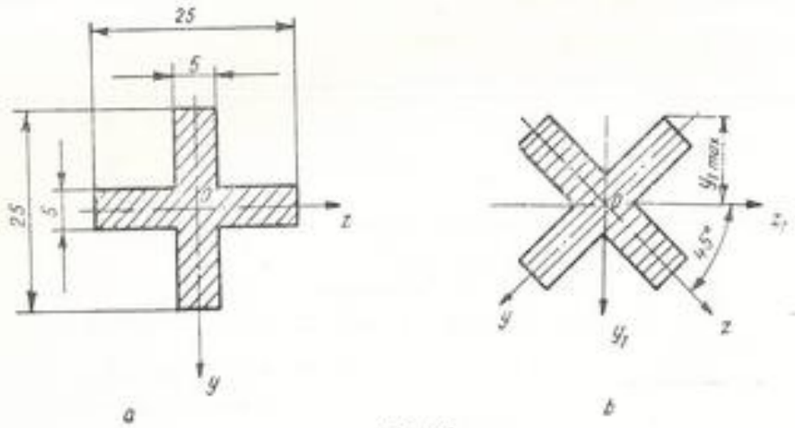


Fig. 4.6

Rezolvare. a) $I_z = \frac{2{,}5^3 \cdot 0{,}5}{12} + \frac{2 \cdot 0{,}5^3 \cdot 1}{12} = 0{,}67 \text{ cm}^4$,

$$W'_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{0{,}67}{1{,}25} = 0{,}536 \text{ cm}^3,$$

$$M'_{cap} = \sigma_a \cdot W'_z = 1\,200 \cdot 0{,}536 = 644 \text{ daN cm}.$$

b) Pentru calculul lui I_{z_1} se va aplica relaţia (2.13):

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{zy} \sin 2\alpha.$$

În cazul de faţă: $I_z = I_y$; $\alpha = 45°$ şi $I_{zy} = 0$ (din cauza simetriei figurii), rezultă:

$$I_{z_1} = I_z; \quad y_{1max} = 1{,}25 \sin 45° + 0{,}25 \cos 45° = 1{,}06 \text{ cm},$$

$$W''_z = \frac{I_{z1}}{y_{1max}} = \frac{0{,}67}{1{,}06} = 0{,}632 \text{ cm}^3,$$

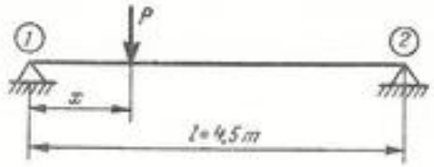
$$M''_{cap} = \sigma_a \cdot W''_z = 1\,200 \cdot 0{,}632 = 759 \text{ daN cm}.$$

Rezultă o creştere cu 18% a momentului capabil.

4.7. O grindă de lemn, simplu rezemată la capete, este încărcată cu o forţă $P = 2\,000$ daN ca în figura 4.7. Ştiind că secţiunea grinzii este dreptunghiulară, avînd înălţimea $h = 24$ cm şi lăţimea $b = 16$ cm, să se determine poziţiile forţei P pe grindă, astfel încît să nu se depăşească rezistenţa admisibilă

$$\sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

Fig. 4.7



Rezolvare. Momentul este maxim în dreptul forţei P şi are valoarea:

$$M(x) = \frac{Px(l - x)}{l},$$

$M_{cap} = \sigma_a \frac{bh^2}{6}$. Trebuie ca $M(x) \leqslant M_{cap}$, de unde rezultă inegalitatea:

$$\frac{Px(l - x)}{l} \leqslant \sigma_a \frac{bh^2}{6}$$

sau:

$$x^2 - lx + \frac{bh^2 l \sigma_a}{6P} \geqslant 0; \; x^2 - 450\,x + \frac{16 \cdot 24^2 \cdot 450 \cdot 100}{6 \cdot 2000} \geqslant 0.$$

Inegalitatea este satisfăcută pentru:

$$0 \leqslant x \leqslant 98{,}5 \text{ cm}; \quad 351{,}5 \text{ cm} \leqslant x \leqslant 450 \text{ cm}.$$

4.8. Care este efortul unitar maxim ce se produce într-un stîlp de colţ neancorat al unei linii electrice (Fig. 4.8), dacă forţa de întindere în fir este $T = 100$ daN, unghiul în plan al firelor 120°, înălţimea stîlpului $h = 8$ m şi diametrul stîlpului la partea inferioară $d = 18$ cm? Stîlpul este din lemn avînd $\sigma_a = 100$ daN/cm².

Rezolvare. Stîlpul se consideră încastrat la capătul de jos. Forţa care produce încovoierea este:

$$P = 2T \cos 60° = 2T \cdot \frac{1}{2} = T = 100 \text{ daN}.$$

Rezultă momentul maxim în A:

$$M_i = P \cdot h = 100 \cdot 800 = 80\,000 \text{ daN cm}.$$

Modulul de rezistenţă al stîlpului de diametru 18 cm are valoarea:

$$W_{ef} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 18^3}{32} = 572 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma_{ef} = \frac{M_i}{W_{ef}} = \frac{80\,000}{572} = 140 \text{ daN/cm}^2 > 100 \text{ daN/cm}^2.$$

Întrucît efortul unitar depăşeşte rezistenţa admisibilă, stîlpul trebuie ancorat sau sprijinit spre a micşora efectul forţei P.

Fig. 4.8

4.9. Care este sarcina uniform repartizată pe care o poate suporta grinda din lemn simplu rezemată avînd secţiunea din figura 4.9 (cotele sînt date în cm), cu $\sigma_a = 100$ daN/cm², dacă deschiderea sa este de 10 m şi dacă se neglijează greutatea proprie.

Rezolvare.

$$I_x = \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot 54^3 + 4\left[\frac{1}{12} \cdot 4 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10 \cdot 22^2\right] +$$

$$+ 2\left[\frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 8^3 + 30 \cdot 8 \cdot 31^2\right] = 595\,101 \text{ cm}^4,$$

$$W_x = \frac{2I_x}{h} = \frac{2 \cdot 595\,101}{70} = 17\,000 \text{ cm}^3.$$

$$M_{cap} = \sigma_a W_{cf} = 100 \cdot 17\,000 = 1\,700\,000 \text{ daN cm} = 17\,000 \text{ daNm}.$$

Momentul maxim este la mijlocul grinzii şi are valoarea $M_{max} = \frac{ql^2}{8}$, de unde:

$$q = \frac{8M_{max}}{l^2} = \frac{8 \cdot 17\,000}{10^2} = 1\,360 \text{ daN/m}.$$

4.10. Să se dimensioneze pîrghia cotită ABC din figura 4.10 pe baza încărcărilor şi a dimensiunilor din desen. Forţa P fiind variabilă între zero şi 500 daN, se alege rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 600$ daN/cm².

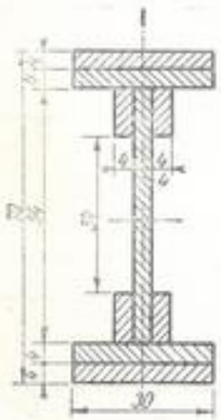


Fig. 4.9

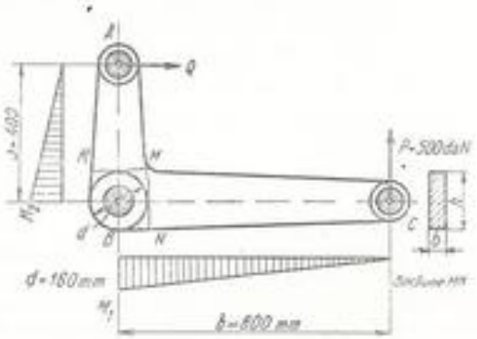


Fig. 4.10

Rezolvare. Considerînd braţele de pîrghie AB şi CB ca grinzi libere la un capăt şi încastrate în B, se construiesc diagramele de momente ca în figura 4.10. Se calculează momentele încovoietoare în secţiunile MN şi MR:

$$M_{MN} = P\left(b - \frac{d}{2}\right) = 500(80 - 8) = 36\,000 \text{ daNcm};$$

$$Pb = Qa = M_1 = M_2;\ Q = P\frac{b}{a} = 500\frac{800}{400} = 1\,000 \text{ daN};$$

$$M_{MR} = Q\left(a - \frac{d}{2}\right) = 1\,000(40 - 8) = 32\,000 \text{ daNcm}.$$

Formula (4.1) dă pentru cele două pîrghii:

$$W_{necMN} = \frac{M_{MN}}{\sigma_a} = \frac{36\,000}{600} = 60 \text{ cm}^3;$$

$$W_{necMR} = \frac{M_{MR}}{\sigma_a} = \frac{32\,000}{600} = 53{,}3 \text{ cm}^3.$$

Ambele pîrghii se construiesc astfel încît să aibă aceeaşi grosime b în secţiunile MN şi MR. Se ia în secţiunea MN: $h/b = 3$.

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{\frac{h}{3}h^2}{6} = \frac{h^3}{18};\quad W_{necMN} = \frac{h^3_{MN}}{18} = 60,$$

$$h_{MN} = \sqrt[3]{18 \cdot 60} = 10{,}25 \text{ cm};\qquad b = \frac{h_{MN}}{3} = \frac{10{,}25}{3} = 3{,}42 \text{ cm}.$$

Pentru secţiunea MR, b este acelaşi, deci:

$$W_{necMR} = \frac{bh^2_{MR}}{6} = \frac{3{,}42h^2_{MR}}{6} = 53{,}3;\quad h_{MR} = \sqrt{\frac{6 \cdot 53{,}3}{3{,}42}} = 9{,}66 \text{ cm}.$$

Se iau dimensiunile rotunjite:

$$b = 34 \text{ mm};\quad h_{MN} = 103 \text{ mm};\quad h_{MR} = 97 \text{ mm}.$$

4.11. Dacă lungimea totală $l + 2a$ a grinzii din figura 4.11 este dată, să se determine relaţia între lungimile a şi l, astfel încît efortul unitar care se produce în grindă să fie minim.

Rezolvare. Condiţia pusă este satisfăcută cînd momentul maxim negativ (pe reazem) este egal în valoare absolută cu cel pozitiv (în mijloc):

$$p\frac{a^2}{2} = \frac{p(l + 2a)}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{p\left(a + \frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{p}{2}\left(\frac{l^2}{4} - a^2\right),$$

$$a = \frac{l}{\sqrt{8}} = 0{,}354\ l.$$

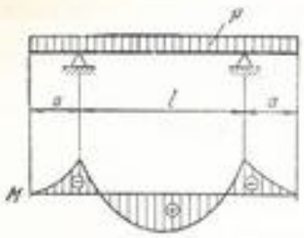


Fig. 4.11

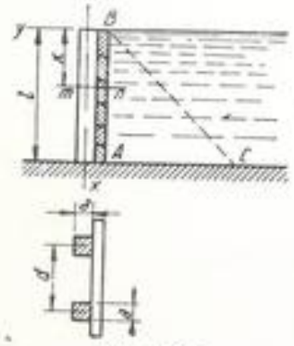


Fig. 4.12, *a*

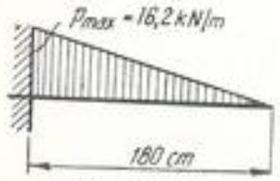


Fig. 4.12, *b*

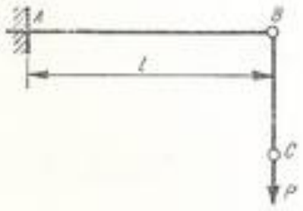


Fig. 4.13

4.12. Un baraj de lemn este alcătuit din scînduri aşezate orizontal, care se reazemă pe doi stîlpi de lemn încastraţi în pămînt, cum se arată în figura 4.12, *a*. Se cere dimensionarea stîlpilor, ştiind că distanţa dintre ei este $d = 0{,}9$ m, au lungimea $l = 1{,}80$ m şi $\sigma_a = 100$ daN/cm².

Rezolvare. Presiunea apei variază liniar cu adîncimea. În punctul A este $p_A = \gamma h = 18$ kN/m². Distanţa dintre stîlpii de susţinere fiind $d = 0{,}9$ m, fiecare stîlp va prelua o sarcină variind triunghiular, ca în figura 4.12, *b*, cu presiunea maximă

$$p = 18 \cdot 0{,}9 = 16{,}2 \text{ kN/m} = 16{,}2 \text{ daN/cm}.$$

$$|M_{max}| = \frac{P_{max} \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{3} = \frac{16{,}2 \cdot 180}{2} \cdot \frac{180}{3} =$$

$$= 87\,500 \text{ daN cm},$$

$$W_{nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{87\,500}{100} = 875 \text{ cm}^3 = \frac{a^3}{6},$$

$$a = \sqrt[3]{875 \cdot 6} = 17{,}4 \text{ cm} = 18 \text{ cm}.$$

4.13. De capătul liber al unei grinzi încastrate AB (Fig. 4.13) este prinsă o bară BC. Grinda are secţiunea inelară, cu $d = 5$ cm şi $D = 7$ cm şi lungimea $l = 2{,}4$ m; bara BC are secţiunea circulară, cu diametrul $d_1 = 3$ mm. Atît grinda AB cît şi bara BC sînt confecţionate dintr-un oţel care are limita de curgere $\sigma_c = 3\,200$ daN/cm². Pentru ce valoarea a forţei P, cu care se încarcă la întindere bara BC, se atinge în una din cele două piese limita de curgere?

Rezolvare. Se face ipoteza că datorită încărcării se atinge limita de curgere în una din bare (de exemplu BC); se verifică apoi cealaltă bară pentru a se vedea dacă efortul unitar are o valoare mai mică decît σ_c. Forţa la care se atinge limita de curgere în bara BC este: $P_c = \sigma_c A = 0{,}0708 \cdot 3\,200 = 226$ daN, unde:

$$A = 0{,}0708 \text{ cm}^2.$$

Momentul încovoietor produs în încastrare de această forţă este:

$$M_i = P_c \cdot l = 226 \cdot 2{,}4 = 542 \text{ daNm} =$$

$$= 54\,200 \text{ daNcm}.$$

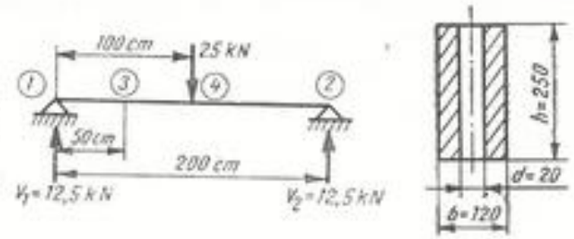


Fig. 4.14

Se calculează efortul unitar maxim în grinda AB

$$\sigma_{ef} = \frac{M_i}{W} = \frac{M_i}{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32\,D}} = \frac{54\,200}{\frac{\pi(7^4 - 5^4)}{32 \cdot 7}} = 2\,160 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_c.$$

Deci limita de curgere se atinge mai întîi în bara BC.

4.14. Să se verifice grinda de lemn din figura 4.14, de secţiune $12 \cdot 25$ cm², avînd deschiderea $l = 2$ m şi la mijloc o sarcină concentrată $P = 25$ kN. Grinda este slăbită prin o gaură vetricală cu diametrul de 20 mm în secţiunea 3 situată la 0,5 m de reazemul 1. Se dă $\sigma_a = 110$ daN/cm².

Rezolvare. a) Verificarea în secţiunea slăbită (3):

$$M = 1\,250 \cdot 50 = 62\,500 \text{ daNcm},$$

$$W_{ef3} = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{\frac{bh^3}{12} - \frac{dh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{(12 - 2) \cdot 25^2}{6} = 1\,040 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma_{ef3} = \frac{M}{W_{ef}} = \frac{62\,500}{1\,040} = 60 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

b) Verificarea grinzii în secţiunea de aplicare a sarcinii (4):

$$M_4 = 1\,250 \cdot 100 = 125\,000 \text{ daNcm},$$

$$\sigma_{ef4} = \frac{6 \cdot 125\,000}{12 \cdot 25^2} = 100 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

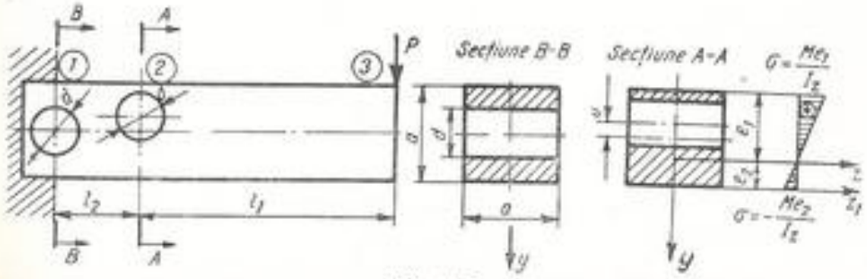


Fig. 4.15

4.15. Să se verifice grinda de lemn de secţiune pătrată din figura 4.15, ştiind că $P = 600$ daN, $l_1 = 150$ cm, $l_2 = 50$ cm, $a = 20$ cm. În secţiunile *1* şi *2* grinda are două găuri de diametru $d = 10$ cm.

Axa găurii din secţiunea *1* este pe axa grinzii, iar a celei din secţiunea *2*, deplasată la distanţa $b = 2$ cm deasupra axei grinzii. Se dă $\sigma_a = 110$ daN/cm².

Rezolvare. a) Verificarea secţiunii *1*:

$$M_1 = 600 \cdot 200 = 120\,000 \text{ daNcm},$$

$$W_1 = \left(\frac{a^4}{12} - \frac{d^3a}{12}\right)\frac{1}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3 - d^3}{6} = \frac{20^3 - 10^3}{6} = 1\,167 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma_{1ef} = \frac{M_1}{W_1} = \frac{120\,000}{1\,167} = 103 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

b) Verificarea secţiunii *2*:

$$M_2 = 600 \cdot 150 = 90\,000 \text{ daN cm}.$$

Secţiunea 2 este nesimetrică, din cauza găurii deplasate faţă de axa grinzii. Poziţia centrului de greutate al secţiunii găurite, în raport cu axa z_1 este:

$$e_2 = \frac{a^2 \cdot \frac{a}{2} - ad\left(\frac{a}{2} + b\right)}{a^2 - ad} = \frac{\frac{a^3}{2} - d\left(\frac{a}{2} + b\right)}{a - d} = \frac{\frac{20^3}{2} - 10\left(\frac{20}{2} + 2\right)}{20 - 10} = 8 \text{ cm}.$$

Momentul de inerţie al suprafeţei secţiunii găurite în raport cu axa z este:

$$I_z = \frac{a^4}{12} + a^2 \cdot \left(\frac{a}{2} - e_2\right)^2 - \left[\frac{a \cdot d^3}{12} + ad \cdot \left(\frac{a}{2} + b - e_2\right)^2\right] =$$

$$= \frac{20^4}{12} + 20^2\left(\frac{20}{2} - 8\right)^2 - \left[\frac{20 \cdot 10^3}{12} + 20 \cdot 10\left(\frac{20}{3} + 2 - 8\right)^2\right] \approx 10\,066 \text{ cm}^4.$$

Efortul unitar maxim în secţiunea *2* este:

$$\sigma_{max} = \frac{Me_1}{I_z} = \frac{90\,000 \cdot 12}{10\,066} \approx 107 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

4.16. Ce forţă concentrată, aşezată în capătul consolei, poate suporta o grindă de oţel slăbită ca în figura 4.16, ştiind că $\sigma_a = 1\,100$ daN/cm²?

Rezolvare. Efortul unitar maxim poate apărea fie în secţiunea *2*, unde momentul încovoietor este maxim, fie în secţiunea *3*, unde modulul de rezistenţă este minim. Forţa capabilă se calculează admiţînd că una dintre secţiuni este periculoasă şi verificînd efortul unitar în cea de-a doua. Considerînd ca periculoasă secţiunea de pe reazemul *2*, rezultă:

$$M_{cap} = \sigma_a W_{ef} = M_{12}; \quad \sigma_a \frac{\pi d^3}{32} = P'_{cap} \cdot a,$$

$$P'_{cap} = \frac{\pi \cdot \sigma_a d^3}{32\,a} = \frac{\pi \cdot 1\,100 \cdot 5^3}{32 \cdot 40} = 337 \text{ daN}.$$

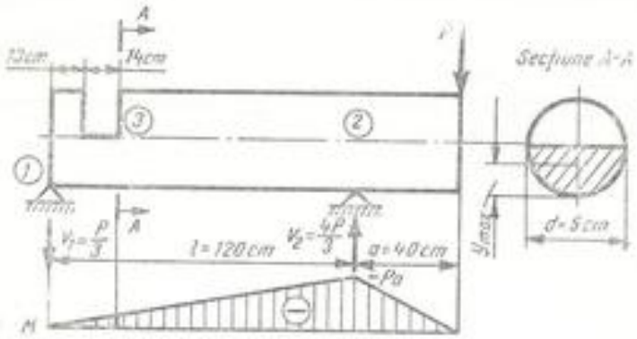


Fig. 4.16

Verificarea secţiunii slăbite *3*:

$$M_{i3} = \frac{337}{3} \cdot 27 = 3\,030 \text{ daNcm}; \qquad I_{z3} = 0{,}0068\ d^4, \text{ (v. cap. 2)}$$

$$W_{z3} = \frac{I_{z3}}{y_{3max}} = \frac{0{,}0068d^4}{\frac{d}{2} - \frac{2d}{3\pi}} = 0{,}0236\ d^3,$$

$$\sigma_{ef\,max} = \frac{M_{i3}}{W_{z3}} = \frac{3\,030}{0{,}0236 \cdot 5^3} = 1\,030 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

Secţiunea *2* este deci periculoasă, forţa capabilă fiind $P_{cap} = 337$ daN.

4.17. O macara rotativă este sprijinită pe coloana *B* (Fig. 4.17, *a*) şi are lungimea $a + b$, unde $a = 8$ m şi $b = 5$ m; greutatea proprie este considerată ca o sarcină uniform repartizată $q = 20$ kN/m. Secţiunea grinzii este formată din patru profile LL $100 \times 150 \times 12$, aşezate ca în figura 4.17, *b*. Se cere:

a) forţa *P* care trebuie aplicată în *C*, spre a avea echilibru;
b) reacţiunea din coloana *B*;
c) momentul încovoietor maxim şi secţiunea unde are loc acest moment.
d) determinarea dimensiunii *d* din figura 4.17, *b*, considerînd $\sigma_a = 1\,000$ daN/cm².

Rezolvare. a) Se scrie ecuaţia de momente faţă de *B*:

$$qa \cdot \frac{a}{2} - qb \cdot \frac{b}{2} - P \cdot b = 0; \quad P = \frac{q(a^2 - b^2)}{2b} = \frac{20(8^2 - 5^2)}{2 \cdot 5} = 78 \text{ kN}. \quad (1)$$

b) Ecuaţia de proiecţii pe verticală:

$$q(a + b) + P - R_B = 0;$$

$$R_B = q(a + b) + P = 20(8 + 5) + 78 = 338 \text{ kN}. \quad (2)$$

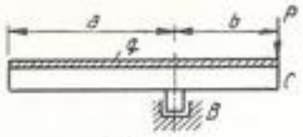


Fig. 4.17, *a*

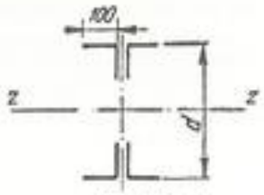


Fig. 4.17, *b*

c) Momentul maxim are loc în reazem:

$$M_{max} = M_B = q\frac{a^2}{2} = \frac{20 \cdot 8^2}{2} = 640 \text{ kNm} = 6\,400\,000 \text{ daN cm}. \quad (3)$$

$$d)\ W_{nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{6\,400\,000}{1\,000} = 6\,400 \text{ cm}^3. \quad (4)$$

Pentru a determina modulul de rezistenţă al secţiunii, se calculează, în prealabil, momentul de inerţie.

Pentru un singur profil se găseşte în anexa 8:

$$I_{x1} = 650 \text{ cm}^4; \quad A_1 = 28{,}7 \text{ cm}^2; \quad e = 4{,}89 \text{ cm}.$$

Pentru întreg ansamblul de patru corniere, momentul de inerţie este:

$$I_x = 4\left[I_{x1} + A_1\left(\frac{d}{2} - e\right)^2\right].$$

Rezultă modulul de rezistenţă:

$$W_x = \frac{I_x}{\frac{d}{2}} = \frac{2I_x}{d} = \frac{8}{d}\left[I_{x1} + A_1\left(\frac{d}{2} - e\right)^2\right],$$

de unde:

$$W_x = \frac{8}{d}\left[650 + 28{,}7\left(\frac{d}{2} - 4{,}89\right)^2\right] = \frac{10\,688 + 57{,}4d^2 - 1\,123\,d}{d}. \quad (5)$$

Egalînd valorile (4) şi (5), rezultă:

$$\frac{10\,688 + 57{,}4d^2 - 1\,123d}{d} = 6\,400 \text{ sau } 57{,}4\,d^2 - 7\,523\,d + 10\,688 = 0.$$

Soluţiile ecuaţiei sînt:

$$d_1 = 129{,}5 \text{ cm}; \quad d_2 = 1{,}5 \text{ cm}.$$

Se vede că numai prima rădăcină, adică $d_1 = 129{,}5$ cm, este valabilă, cealaltă necorespunzînd desenului.

4.18. O macara ca în figura 4.18, *a* se poate deplasa pe două şine simplu rezemate, formate din profile I. Să se determine poziţia cea mai defavorabilă a macaralei pe calea de rulare şi apoi să se dimensioneze şinele dacă $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm², $l = 9$ m, $a = 3{,}6$ m, $d = 1{,}8$ m. Greutatea proprie a macaralei este $G = 4\,500$ daN, iar sarcina ridicată este $P = 900$ daN. Se admite că forţele sînt cuprinse în planul de simetrie al celor două şine şi, în consecinţă, se repartizează egal asupra celor două şine.

Fig. 4.18, *a*

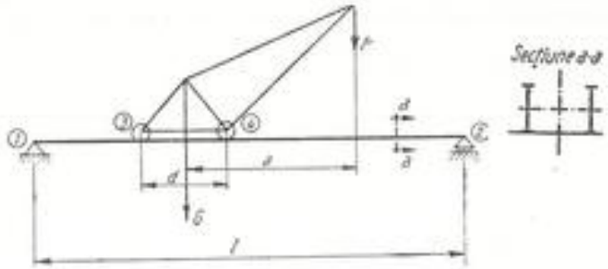
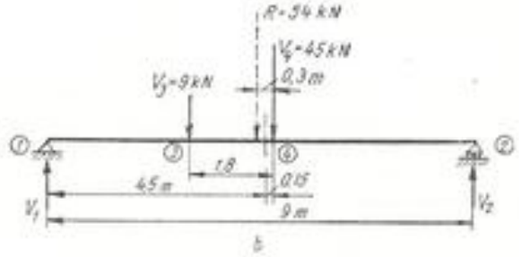


Fig. 4.18, *b*



Rezolvare. Pentru dimensionarea grinzilor este necesar să se stabilească momentul maxim maximorum. Se calculează mărimea sarcinilor care se transmit grinzii prin roţile 3 şi 4. Ecuaţia de momente, faţă de roata 4, dă:

$$1{,}8\,V_3 - \frac{1{,}8}{2} \cdot 45 + \left(3{,}6 - \frac{1{,}8}{2}\right)9 = 0; \quad V_3 = 9 \text{ kN}; \quad V_4 = 45 \text{ kN}.$$

Schema de calcul a grinzii este reprezentată în figura 4.18, *b*.

Se stabileşte poziţia rezultantei convoiului, prin distanţa ei b la roata 4, scriind momentele faţă de 4:

$$b = \frac{V_3 d}{R} = \frac{9 \cdot 1{,}8}{54} = 0{,}3 \text{ m}.$$

Poziţia care dă moment maxim maximorum este aceea pentru care mijlocul grinzii este simetric aşezat faţă de sarcina V_4 şi de rezultanta R, ca în figura 4.18, *b*. Reacţiunile sînt:

$$V_1 = \frac{45 \cdot 4{,}35 + 9 \cdot 6{,}15}{9} = \frac{196 + 55{,}3}{9} = 28 \text{ kN}; \quad V_2 = 26 \text{ kN}.$$

Momentul maxim maximorum este în dreptul forţei V_4:

$$M_{max\,max} = V_2\left(\frac{l}{2} - \frac{b}{2}\right) = 26\left(\frac{9}{2} - \frac{0{,}3}{2}\right) = 113 \text{ kNm}.$$

Întrucît cele două grinzi sînt egal încărcate, fiecare suportă un moment încovoietor:

$$M_1 = \frac{1}{2} M_{max\,max} = 56{,}5 \text{ kNm}; \quad W_{nec} = \frac{565\,000}{1\,400} \approx 404 \text{ cm}^3.$$

Se alege I 26, cu $W_{ef} = 442$ cm³ (v. tabela 10).

Se face o verificare:

$$\sigma_{ef} = \frac{M_1}{W_{ef}} = \frac{565\,000}{442} = 1\,278 \text{ daN/cm}^2 < 1\,400 \text{ daN/cm}^2.$$

4.19. O grindă de lemn de secţiune dreptunghiulară 20 · 30 cm cu lungimea $l = 2$ m este solicitată de o sarcină $P = 6\,000$ daN, aplicată la mijlocul ei. Se cere să se calculeze eforturile σ şi τ care apar într-un punct M, din grindă, de coordonate $x_M = 50$ cm, $y_M = -6$ cm; $z_M = 0$, precum şi eforturile unitare principale din acel punct (Fig. 4.19).

Rezolvare. Momentul încovoietor în secţiunea $x_M = 50$ cm este: $M = V_0 x_M = 3\,000 \cdot 50 = 150\,000$ daNcm. Rezultă:

$$\sigma = \frac{M \cdot y_M}{I_z} = \frac{150\,000 \cdot (-6)}{45\,000} = -20 \text{ daN/cm}^2,$$

unde:

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45\,000 \text{ cm}^4.$$

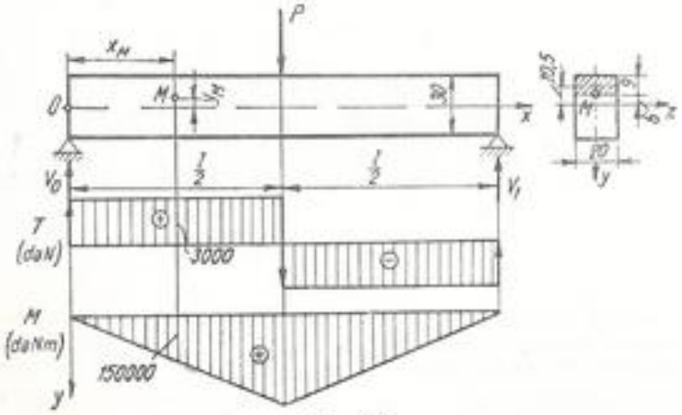


Fig. 4.19.

1 cm = 10 mm
1 cm² = 10² mm²

Eforturi unitar tangenţial se calculează cu relaţia (4.11):

$$\tau = \frac{T \cdot S}{bI_z} = \frac{3\,000 \cdot 1\,890}{20 \cdot 45\,000} = 6{,}3 \text{ daN/cm}^2,$$

$\tau = \frac{T}{A} = \frac{3000}{20 \cdot 30} = \frac{3000}{600}$

$\tau = \frac{30}{6} = \frac{10}{2} = 5 \frac{daN}{cm^2} = 5 \frac{10\ N}{100\ mm^2} = 0.5\ MPa$

unde:

$T = 3\,000$ daN; $S = 20 \cdot 9 \cdot 10{,}5 = 1\,890$ cm³; $b = 20$ cm.

Eforturile unitare principale sînt date de relaţia (7.3), unde $\sigma_x = -20$ daN/cm², $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 6{,}3$ daN/cm²:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} =$$

$$= -\frac{20}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-20)^2 + 4 \cdot 6{,}3^2} = -10 \pm 11{,}8,$$

$$\sigma_1 = 1{,}8 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = -21{,}8 \text{ daN/cm}^2.$$

4.20. O grindă simplu rezemată de lungime $l = 8$ m, formată dintr-un profil I 14, suportă o sarcină uniform distribuită q. Cunoscînd că rezistenţa admisibilă este $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm², se cere să se calculeze mărimea sarcinii q pe care o poate suporta grinda.

Dacă această grindă, în stare neîncărcată, este consolidată prin sudarea la talpa de jos a unei platbande de grosime $t = 10$ mm (Fig. 4.20), se cere să se calculeze suplimentul de încărcare pe care îl poate prelua grinda.

Rezolvare. Sarcina maximă admisibilă q rezultă din formula (4.3) şi din formula momentului maxim la o grindă rezemată la capete, încărcată cu o sarcină uniform repartizată:

$$M_{max} = \frac{1}{8} ql^2; \quad q = \frac{8M_{max}}{l^2},$$

$$M_{cap} = \sigma_a \cdot W_{ef} = 1\,400 \cdot 81{,}9 = 114\,660 \text{ daNcm},$$

$$q = \frac{8 \cdot 1146{,}6}{8^2} = 143{,}3 \text{ daN/m}.$$

Prin adăugarea unei platbande 66 · 10 mm, modulul de rezistenţă al grinzii se măreşte.

Se determină poziţia centrului de greutate al secţiunii consolidate faţă de centrul de greutate al profilului I neconsolidat:

$$y = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{6{,}6 \cdot 1 \cdot 7{,}5}{6{,}6 \cdot 1 + 18{,}3} \approx 2 \text{ cm}.$$

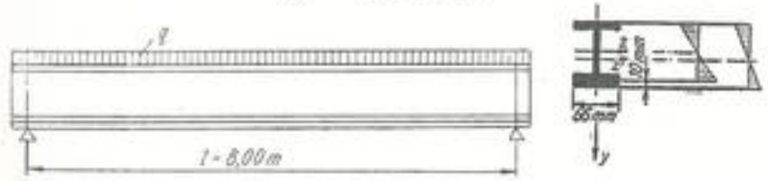


Fig. 4.20

Momentul de inerţie faţă de noua axă neutră este:

$$I_z' = 573 + 18{,}3 \cdot 2^2 + \frac{6{,}6 \cdot 1^3}{12} + 6{,}6 \cdot 1 \cdot (7{,}5 - 2)^2 = 846 \text{ cm}^4.$$

Distanţele fibrelor extreme la noua axă neutră sînt:

$$y_1 = 7 + 2 = 9 \text{ cm} = y_{max}; \quad y_2 = 7 - 2 + 1 = 6 \text{ cm}.$$

Modulul de rezistenţă este:

$$W_z' = \frac{I_z'}{y_{max}} = \frac{846}{9} = 94 \text{ cm}^3.$$

Sarcina capabilă după consolidare este:

$$M_{cap}' = W_z' \cdot \sigma_a = 94 \cdot 1\,400 = 131\,600 \text{ daNcm} = 1\,316 \text{ daNm},$$

$$q' = \frac{8 \cdot 1316}{8^2} = 165 \text{ daN/m}.$$

În concluzie, un spor de 36% al secţiunii, deci al greutăţii grinzii, duce la o creştere de 15% a sarcinii capabile.

4.21. Să se verifice grinda de fontă din figura 4.21, ştiind că $\sigma_{at} = 300$ daN/cm² şi $\sigma_{ac} = 1\,000$ daN/cm². Să se traseze apoi diagrama de variaţie a eforturilor unitare tangenţiale pe secţiunea din încastrare.

Rezolvare.

$$y_1 = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{10 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 30 \cdot 1 \cdot 19}{10 \cdot 4 + 2 \cdot 30 \cdot 1} = 12{,}2 \text{ cm}; \quad y_2 = 21{,}8 \text{ cm},$$

$$I_z = \frac{10 \cdot 4^3}{12} + 10 \cdot 4 \cdot 10{,}2^2 + 2\left(\frac{1 \cdot 30^3}{12} + 1 \cdot 30 \cdot 6{,}8^2\right) = 11\,485 \text{ cm}^4,$$

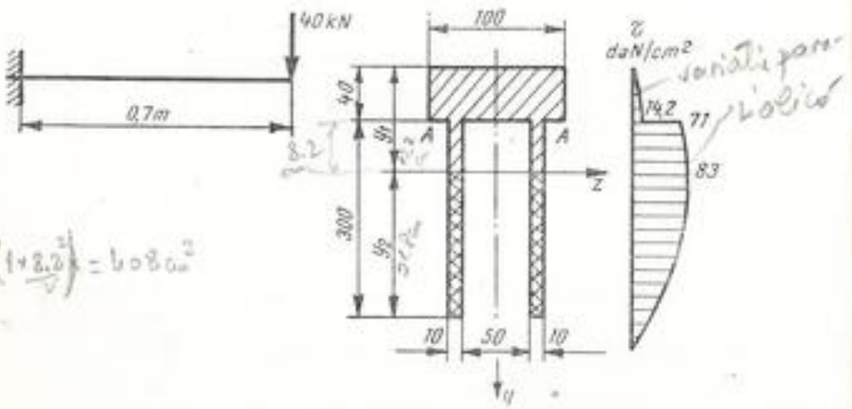
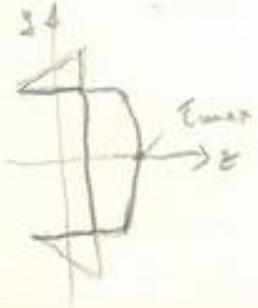


Fig. 4.21

$S_{AA} = 475 - 2\left(1 \cdot \frac{8{,}2^2}{2}\right) = 408 \text{ cm}^3$



Latura profilului ⊥ pe axa z are variaţie parabolică a momentului static

$$|M_i|_{max} = 40 \cdot 0{,}7 = 28 \text{ kNm} = 2{,}8 \cdot 10^5 \text{ daN cm},$$

$$\sigma_{max\,sf_1} = \frac{M_i y_1}{I_z} = \frac{2{,}8 \cdot 10^5 \cdot 12{,}2}{11\,485} = 298 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{at},$$

$$\sigma_{max\,sf_2} = \frac{M_i y_2}{I_z} = \frac{2{,}8 \cdot 10^5 \cdot 21{,}8}{11\,485} = 532 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ac}.$$

Efortul unitar tangenţial maxim apare în axa neutră:

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot S}{bI_z} = \frac{4\,000 \cdot 475}{2 \cdot 11\,485} = 83 \text{ daN/cm}^2,$$

unde:

$$S = 2(1 \cdot 21{,}8 \cdot 10{,}9) = 475 \text{ cm}^3 \quad (475.24 \text{ cm}^3)$$

reprezintă momentul static faţă de axa neutră al suprafeţei haşurate dublu, iar $b = 2 \cdot 1 = 2$ cm este lăţimea efectivă a grinzii în axa neutră. Efortul unitar tangenţial în fibra $A-A$ are o discontinuitate determinată de variaţia lăţimii grinzii de la $b' = 2$ cm la $b'' = 10$ cm. Momentul static S' al suprafeţei de deasupra fibrei $A - A$ în raport cu axa neutră este $S' = 10 \cdot 4 \cdot 10{,}2 = 408$ cm³.

Eforturile unitare sînt:

$S_{A-A} = 4 \times 10 \times (12{,}2 - 2) = 40 \times 10{,}2 = 408 \text{ cm}^3$

$$\tau_A' = \frac{TS'}{b'I_z} = \frac{4\,000 \cdot 408}{2 \cdot 11\,485} = 71 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau_A'' = \frac{TS'}{b''I_z} = \frac{4\,000 \cdot 408}{10 \cdot 11\,485} = 14{,}2 \text{ daN/cm}^2.$$

4.22. Să se calculeze dimensiunea x a grinzii de fontă reprezentată în figura 4.22, *a*, solicitată la încovoiere, astfel încît efortul unitar maxim de întindere să fie 1/4 din efortul unitar maxim de compresiune. Înălţimea grinzii este $h = 100$ mm, iar grosimea inimii şi a aripii, $t = 25$ mm.

Rezolvare. Variaţia eforturilor unitare pe secţiune este reprezentată în figura 4.22, *b*. Cu datele din figură se scriu relaţiile:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{e_2}{e_1} = 4,$$

Fig. 4.22, *a*

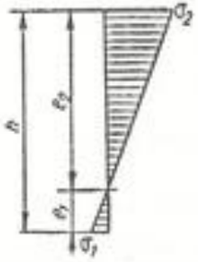


Fig. 4.22, *b*

unde $e_2 = 4e_1$.

$$e_1 + e_2 = h; \quad 4e_1 = e_2; \quad e_1 = \frac{h}{5} = \frac{100}{5} = 20 \text{ mm}; \quad e_2 = 80 \text{ mm}.$$

Poziția centrului de greutate este dată de relația:

$$e_1 = \frac{x\frac{t^2}{2} + t(h-t)\left(\frac{h-t}{2} + t\right)}{xt + t(h-t)} = \frac{h}{5}$$

sau:

$$\frac{h}{5} = \frac{\frac{xt}{2} + \frac{1}{2}(h^2 - t^2)}{x + h - t}.$$

Pentru $h = 10$ cm, $t = 2{,}5$ cm se obține:

$$1{,}25\,x + \frac{100 - 6{,}25}{2} = 2x + 20 - 5, \text{ de unde } x = 42{,}5 \text{ cm}.$$

4.23. Se cere dimensionarea grinzii de rulare din figura 4.23, *a*, construită ca grindă cu inima plină. Din motive constructive, înălțimea grinzii este limitată la $h = 600$ mm. Se va studia așezarea niturilor. Rezistențele admisibile sînt: $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm² și $\tau_a = 1\,120$ daN/cm². Greutatea proprie pe unitatea de lungime se apreciază cu formula $g = k \cdot l$, unde $k = 15\ldots30$ daN/m², iar l este deschiderea grinzii în m.

Rezolvare. Pentru greutatea proprie, luînd $k = 20$, se obține:

$$g = 20 \cdot 10 = 200 \text{ daN/m}.$$

Sarcinile care solicită grinda sînt:

a) două sarcini mobile de cîte 122 kN la distanță de 2 m una de alta;

b) greutatea proprie $g = 200$ daN/m.

Momentul maxim maximorum are loc pentru poziția convoiului la care mijlocul grinzii împarte în două părți egale distanța dintre rezultanta convoiului și forța în dreptul căreia se produce momentul maxim maximorum.

În cazul de față, avînd două forțe egale, $M_{max\,max}$ poate avea loc în dreptul oricăreia dintre ele. Se alege poziția din figura 4.23, *b* și se calculează $M_{max\,max}$ dat atît de convoiul mobil cît și de sarcina uniform distribuită:

$$V_1' = \frac{122(3{,}5 + 5{,}5)}{10} = 110 \text{ kN}; \quad V_1'' = \frac{gl}{2} = \frac{2 \cdot 10}{2} = 10 \text{ kN};$$

$$V_1 = V_1' + V_1'' = 120 \text{ kN}.$$

$$M_{max\,max} = 120 \cdot 4{,}5 - \frac{2 \cdot 4{,}5^2}{2} \approx 520 \text{ kNm}.$$

$$W_{net} = \frac{M_{max\,max}}{\sigma_a} = \frac{5\,200\,000}{1\,400} = 3\,714 \text{ cm}^3.$$

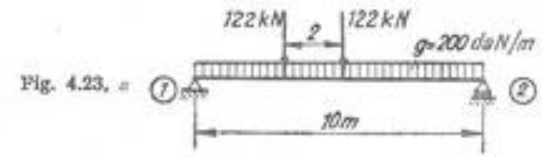


Fig. 4.23, *a*

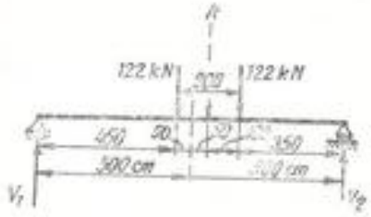


Fig. 4.23, *b*

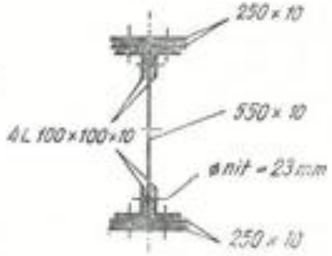


Fig. 4.23, *c*

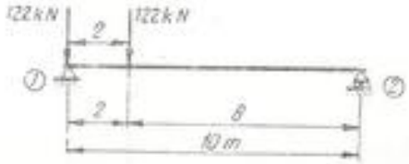


Fig. 4.23, *d*

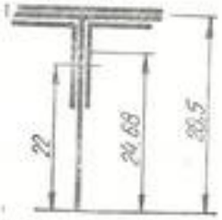


Fig. 4.23, *e*

Întrucît secțiunea este slăbită de găurile niturilor, pentru a calcula momentul de inerție brut al secțiunii, se consideră în calcul o slăbire de aproximativ 20%: $I_{brut} = 1{,}2\ W_{net}\ h/2$. Înălțimea fiind limitată și considerînd că se pun cîte două platbande de 10 mm sus și jos și că inima grinzii este (Fig. 4.23, *c*) de 550 mm înălțime, rezultă:

$$I_{brut} = 1{,}2 \cdot 3\,714 \cdot \frac{59}{2} \approx 131\,500 \text{ cm}^4.$$

Prin încercări se obține secțiunea din figura 4.23, *c* cu următoarele caracteristici:

$$I_{brut} = 131\,500 \text{ cm}^4; \quad W_{net} = 4\,457 \text{ cm}^3; \quad g = 182 \text{ daN/m}; \quad d_{nit} = 23 \text{ mm}.$$

Se vede că, pentru greutatea proprie, valoarea obținută este foarte apropiată de cea luată inițial, deci putem păstra valorile obținute pentru momente și reacțiuni.

Pentru calculul nituirii trebuie aflată valoarea forţei de lunecare care revine unui nit.

Forţa de lunecare pe unitatea de lungime este $N_1 = TS/I_x$, în care T este forţa tăietoare, S — momentul static al suprafeţei care lunecă şi I_x — momentul de inerţie brut al secţiunii. Dacă niturile sînt aşezate între ele la distanţa e, trebuie ca un nit să fie capabil să preia forţa de lunecare ce-i revine pe intervalul dintre două nituri, adică (4.12):

$$N_1 = \frac{eTS}{I_x}.$$

Cunoscînd efortul capabil al nitului, la presiune pe gaură sau la forfecare, se determină distanţa dintre nituri:

$$e = \frac{L_1 I_x}{TS},$$

care se calculează pentru forţa tăietoare maximă. Din motive constructive este bine ca distanţa e să fie aceeaşi pentru întreaga grindă.

Forţa tăietoare în reazem va fi maximă, pentru poziţia în care convoiul se va găsi la marginea grinzii (Fig. 4.23, *d*):

$$V_1' = \frac{122 \cdot (10 + 8)}{10} \approx 220 \text{ kN}; \quad V_1'' = \frac{gl}{2} = \frac{2 \cdot 10}{2} = 10 \text{ kN};$$

$$V_1 = T_{max} = 230 \text{ kN}.$$

Forţa capabilă a nitului cu două secţiuni de forfecare este:

$$N_{2f} = \frac{2\pi d^2}{4}\tau_a = 2 \cdot 4{,}15 \cdot 1\,120 = 9\,300 \text{ daN};$$

$$N_{2g} = dt\sigma_{ag} = 2{,}3 \cdot 1 \cdot 2\,800 = 6\,440 \text{ daN}.$$

În cazul niturilor pe inimă, pentru calculul lui S_1, se consideră că lunecă pachetul de platbande şi cele două corniere, iar pentru niturile pe talpă, la calculul lui S_2 se consideră că lunecă pachetul de platbande. Ca forţă de lunecare, N_1, între două nituri, se va lua cea mai mică dintre valorile de mai sus, adică N_{2g}.

Conform figurilor 4.23, *c* şi 4.23, *e* rezultă:

$$S_1 = 2 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 28{,}5 + 2 \cdot 19{,}2 \cdot 24{,}68 - 2{,}3 \cdot 2 \cdot 22 \approx 2\,272 \text{ cm}^3.$$

$$S_2 = 2 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 28{,}5 - 2 \cdot 2 \cdot 2{,}3 \cdot 28{,}5 = 1\,163 \text{ cm}^3.$$

Distanţele dintre nituri pentru cele două nituiri sînt:

$$e_1 = \frac{N_{2g} I_{brut}}{TS_1} = \frac{6\,440 \cdot 131\,500}{23\,000 \cdot 2\,272} = 16{,}2 \approx 16{,}5 \text{ cm},$$

$$e_2 = \frac{N_{2g} I_{brut}}{TS_2} = \frac{6\,440 \cdot 131\,500}{23\,000 \cdot 1\,163} = 31{,}7 \text{ cm}.$$

Se recomandă ca distanţa dintre nituri să fie cuprinsă între 3 *d* şi 8 *d*. Se vede că e_1 satisface această condiţie:

$$3d = 6{,}9 < 16{,}5 < 18{,}4 = 8d,$$

pe cînd $e_2 > 8\,d$. Se vor aşeza ambele feluri de nituri la aceeaşi distanţă, $e = 16{,}5$ cm în mod alternat.

4.24. Să se dimensioneze grinda de rulare din problema 4.23 construită ca grindă cu inimă plină, sudată. Se va studia aşezarea cordoanelor de sudură. Rezistenţele admisibile sînt: $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm², şi $\tau_{as} = 910$ daN/cm².

Rezolvare. Se consideră, într-o primă aproximaţie, valoarea greutăţii proprii a grinzii aceeaşi ca în problema precedentă, astfel încît se obţine acelaşi modul de rezistenţă necesar, şi anume:

$$W_{nec} = 3\,714 \text{ cm}^3.$$

Înălţimea grinzii fiind impusă (v. problema 4.23) la $h = 60$ cm, rezultă momentul de inerţie necesar al secţiunii:

$$I_{x\,nec} = 3\,714 \cdot \frac{60}{2} = 111\,420 \text{ cm}^4.$$

Prin încercări se alcătuieşte secţiunea cu dimensiunile din figura 4.24 al cărei moment de inerţie este:

$$I_x = \frac{1 \cdot 56^3}{12} + 2 \cdot \left[\frac{30 \cdot 2^3}{12} + 30 \cdot 2 \cdot 29^2\right] = 115\,590 \text{ cm}^4 > I_{x\,nec}.$$

Greutatea proprie a acestei grinzi este:

$$g = [2 \cdot 2 \cdot 30 + 1 \cdot 56] \cdot 100 \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-3} = 138 \text{ daN/m}.$$

Reacţiunea datorită greutăţii proprii este:

$$V_1'' = \frac{138 \cdot 10}{2} = 690 \text{ daN},$$

iar reacţiunea totală:

$$V_1 = V_1' + V_1'' = 110 + 6{,}9 = 116{,}9 \text{ kN}.$$

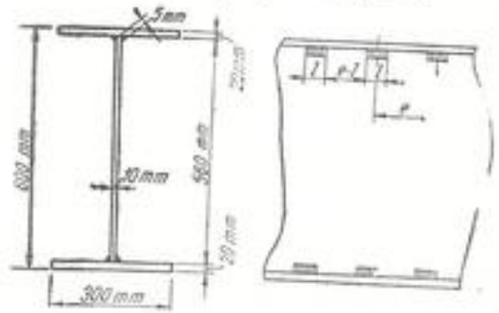


Fig. 4.24

de unde:

$$M_{max\ nec} = 116{,}9 \cdot 4{,}5 - \frac{1{,}38 \cdot 4{,}5^2}{2} = 511 \text{ kNm}.$$

$$W_{nec} = \frac{5\,110\,000}{1\,400} = 3\,600 \text{ cm}^3; \qquad I_{x\ nec} = 3\,660 \cdot 30 = 110\,000 \text{ cm}^4.$$

Se vede că valoarea momentului de inerţie este apropiată de cea a secţiunii alese, astfel încît nu este necesară modificarea secţiunii.

Pentru prinderea platbandelor de inimă se aleg cordoane de sudură cu grosimea de 5 mm şi lungimea de 40 mm.

Efortul capabil a două cordoane de sudură aşezate de o parte şi de cealaltă a inimii este:

$$N_s = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 4 \cdot 910 = 3\,640 \text{ daN}.$$

Pentru stabilirea distanţei dintre cordoanele de sudură, aplicăm formula stabilită la problema 4.23, înlocuind efortul capabil al nitului cu cel al cordoanelor de sudură:

$$e = \frac{N_s I_x}{TS}.$$

Întrucît, din motive constructive este bine ca distanţa e să fie aceeaşi pentru întreaga grindă, se va calcula pentru valoarea maximă a forţei tăietoare, corespunzătoare poziţiei din figura 4.23, d a convoiului. Rezultă (v. problema 4.23):

$$V_1' \approx 220 \text{ kN}.$$

Reacţiunea datorită greutăţii este $V_1'' = 6{,}9$ kN.
Prin urmare: $T_{max} = 220 + 6{,}9 = 226{,}9$ kN.

$$S = 30 \cdot 2 \cdot 29 = 1\,740 \text{ cm}^3.$$

$$e = \frac{3\,640 \cdot 115\,590}{22\,690 \cdot 1\,740} = 10{,}7 \text{ cm} \approx 10 \text{ cm}.$$

4.25. O grindă simplu rezemată, formată dintr-un profil I 18 şi un profil ⋃ 14, aşezate ca în figura 4.25 şi solidarizate prin sudură, suportă o sarcină P la mijlocul deschiderii. Se cere:

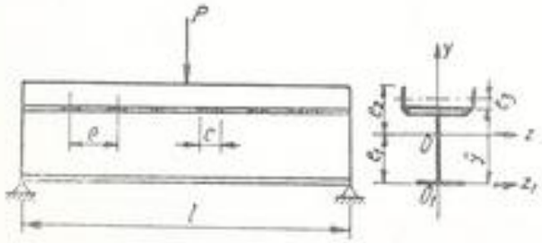


Fig. 4.25

1. Sarcina maximă P care se poate aşeza pe grindă, dacă lungimea este $l = 4$ m şi rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

2. Să se dimensioneze sudura care solidarizează cele două profile, cu $\tau_{as} = 910$ daN/cm².

Rezolvare. a) Din anexele 9 şi 10 se obţin caracteristicile celor două profile:

$$\text{I } 18: A = 27{,}9 \text{ cm}^2;\ I_x = 1\,450 \text{ cm}^4;\ h = 18 \text{ cm}.$$

$$\cup\, 14: A = 20{,}4 \text{ cm}^2;\ I_y = 62{,}7 \text{ cm}^4;\ e = 1{,}75 \text{ cm}.$$

Coordonatele centrului de greutate al ansamblului, faţă de axele O_1z_1 şi O_1y sînt:

$$\bar{z} = 0,\ \bar{y} = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{27{,}9 \cdot 9 + 20{,}4 \cdot (18 + 1{,}75)}{27{,}9 + 20{,}4} = 13{,}5 \text{ cm}.$$

Momentul de inerţie faţă de axa care trece prin centrul de greutate:

$$I_x = 1\,450 + 4{,}5^2 \cdot 27{,}9 + 62{,}7 + 6{,}25^2 \cdot 20{,}4 = 2\,875 \text{ cm}^4.$$

Distanţele de la axa neutră la fibrele cele mai depărtate sînt:

$$e_1 = 13{,}5 \text{ cm};\ e_2 = 4{,}5 + 6 = 10{,}5 \text{ cm}.$$

Efortul unitar maxim este (4.8):

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot e_2}{I_x} = \frac{Pl \cdot e_2}{4I_x} = \sigma_a.$$

Sarcina maximă pe care o poate suporta grinda este:

$$P = \frac{4 \cdot I_x \cdot \sigma_a}{le_2} = \frac{4 \cdot 2\,875 \cdot 1\,400}{400 \cdot 13{,}5} = 2\,980 \text{ daN}.$$

b) Forţa tăietoare maximă este:

$$T_{max} = V_1 = \frac{P}{2} = \frac{2\,980}{2} = 1\,490 \text{ daN}.$$

Forţa de lunecare longitudinală pe distanţa e între două cordoane de sudură este (4.12):

$$N_l = \frac{STe}{I_x},$$

unde S este momentul static al părţii de secţiune care caută să alunece (în cazul problemei este momentul static al suprafeţei profilului ⋃ 14 faţă de axa z). Forţa de lunecare trebuie preluată de către sudură:

$$N_l = 2\,ac\tau_{as} = \frac{STe}{I_x},$$

unde c este lungimea cordonului de sudură. Se obţine raportul:

$$\frac{e}{c} = \frac{2a\tau_{as} I_x}{ST}.$$

Momentul static al profilului ∪ 14 este:

$$S = 20{,}4 \cdot 6{,}25 = 127{,}5 \text{ cm}^3.$$

Alegînd grosimea cordonului de sudură $a = 5$ mm, se obține:

$$\frac{e}{c} = \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 910 \cdot 2\,875}{127{,}5 \cdot 1\,490} = 13{,}8.$$

Alegînd lungimea cordonului de sudură:

$$c = 4 \text{ cm},$$

rezultă distanța între cordoanele de sudură:

$$e = 13{,}8 \cdot 4 = 55{,}2 \text{ cm}.$$

Se alege distanța mai mică:

$$e = 55 \text{ cm}.$$

4.26. O grindă de lemn avînd deschiderea $l = 4$ m și secțiunea 18×24 cm², așezată pe două reazeme, este înclinată, față de orizontală cu unghiul $\alpha = 30°$ (Fig. 4.26). Grinda este solicitată la mijloc de sarcina $P = 10$ kN. Știind că $\tau_a = 100$ daN/cm², să se arate dacă grinda rezistă sau nu.

Rezolvare.

$$M_{max} = \frac{Pl}{4} = \frac{10 \cdot 4}{4} = 10 \text{ kNm},$$

$$M_z = M \cos 30° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8{,}66 \text{ kNm},$$

$$M_y = M \sin 30° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5{,}00 \text{ kNm}.$$

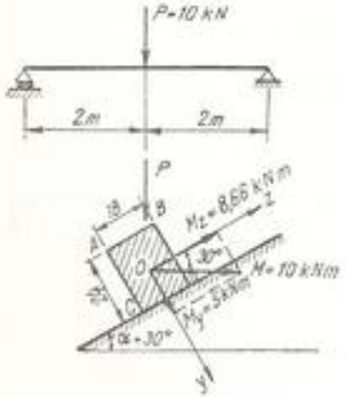


Fig. 4.26

Eforturile unitare maxime se produc în punctele B (compresiune) și C (întindere) și sînt date de formula (4.10):

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y};$$

$$W_z = \frac{18 \cdot 24^2}{6} = 1\,728 \text{ cm}^3;$$

$$W_y = \frac{24 \cdot 18^2}{6} = 1\,296 \text{ cm}^3.$$

$$\sigma_{min} = \sigma_B = -\frac{86\,600}{1\,728} - \frac{50\,000}{1\,296} \approx$$

$$\approx -50 - 38{,}6 = -88{,}6 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{max} = \sigma_C = +\frac{86\,600}{1\,728} + \frac{50\,000}{1\,296} \approx$$

$$\approx 50 + 38{,}6 = +88{,}6 \text{ daN/cm}^2.$$

Eforturile unitare, în valoare absolută, nu depășesc rezistența admisibilă, deci grinda rezistă în bune condiții.

4.27. O grindă încastrată de 2,5 m lungime este alcătuită dintr-un profil ⅂, cu înălțimea de 20 cm (Fig. 4.27, *a*). Grinda este solicitată la capătul liber de o forță concentrată $P = 400$ daN. Să se determine valorile eforturilor unitare maxime și minime.

Rezolvare. Poziția axelor principale de inerție este dată de unghiul $\alpha = 17°20'$ pe care axa *1* îl face cu axa Ox. Pentru a aplica formula (4.9), se observă că, în cazul de față, M_z și M_y sînt componentele momentului încovoietor M_x pe axele *0—1* și *0—2*, respectiv M_1 și M_2, y și z — distanțele de la aceste axe la muchiile cele mai solicitate, iar I_y și I_z — momentele de inerție principale, respectiv I_1 și I_2.

Valorile lui I_1 și I_2 sînt:

$$I_1 = 2\,510 \text{ cm}^4; \quad I_2 = 147 \text{ cm}^4;$$

$$\cos \alpha = \cos 17°20' = 0{,}954;$$

$$\sin \alpha = \sin 17°20' = 0{,}297.$$

Momentul din încastrare este:

$$M_x = Pl = 400 \cdot 2{,}5 = 1\,000 \text{ daNm}.$$

Componentele sale pe axele principale sînt:

$$M_1 = M_x \cos \alpha = 1\,000 \cdot 0{,}954 = 954 \text{ daNm};$$

$$M_2 = M_x \sin \alpha = 1000 \cdot 0{,}297 = 297 \text{ daNm}.$$

Interesează punctele unde se cumulează eforturile unitare de întindere, respectiv de compresiune.

Ținînd seama de semnul momentului (negativ, fiind vorba de grindă încastrată) și notînd întinderea cu plus și compresiunea cu minus, se obți-

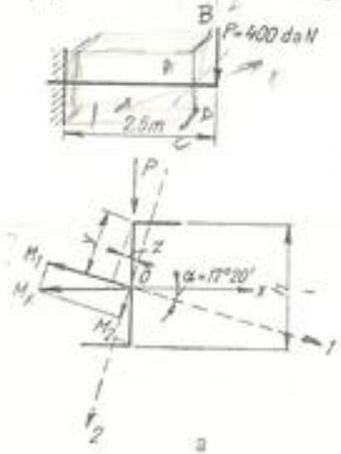


Fig. 4.27, *a*

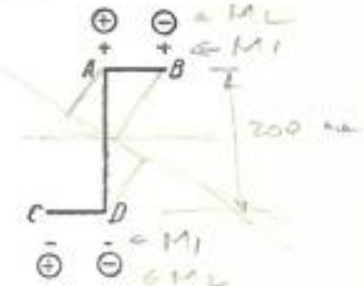


Fig. 4.27, *b*

ne schema din figura 4.27, *b*. Astfel M_1 (moment negativ) produce întindere în punctele A şi B şi compresiune în C şi D. În schemă s-au notat semnele + respectiv —.

Momentul M_2 (moment pozitiv) produce întindere în punctele C şi A şi compresiune în punctele D şi B. Pe schemă s-au notat semnele + respectiv — în cerculeţe. Se vede că punctele în care eforturile unitare sînt de acelaşi semn, deci se adună, sînt A şi D.

Distanţele de la axele principale pînă la aceste puncte, notate în figura 4.27, *a* cu y şi z, sînt:

$$y = \frac{h}{2}\cos\alpha = 10 \cdot 0{,}954 = 9{,}54 \text{ cm}; \; z = \frac{h}{2}\sin\alpha = 10 \cdot 0{,}297 = 2{,}97 \text{ cm},$$

$$\sigma_{max} = \sigma_A = \frac{M_1 y}{I_1} + \frac{M_2 z}{I_2} = \frac{95\,400 \cdot 9{,}54}{2\,510} + \frac{29\,700 \cdot 2{,}97}{147} = 963 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{min} = \sigma_D = -963 \text{ daN/cm}^2.$$

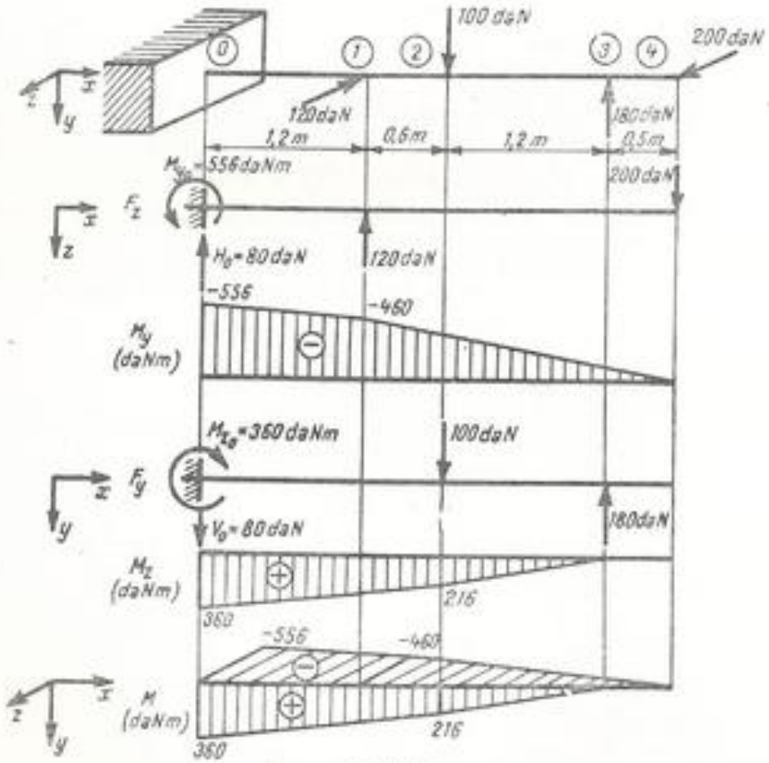


Fig. 4.28

4.28. Să se dimensioneze din lemn, cu secţiunea circulară, grinda încastrată la un capăt din figura 4.28 şi încărcată cu un sistem de sarcini cuprinse în două plane perpendiculare, luînd $\sigma_a = 90$ daN/cm².

Rezolvare. Se trasează diagramele de momente încovoietoare în planul orizontal, respectiv vertical şi se calculează momentul încovoietor rezultant maxim, ce apare în încastrare:

$$M_i = \sqrt{M_{iy}^2 + M_{iz}^2} = \sqrt{(556)^2 + (360)^2} = 662 \text{ daNm}.$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{i\,max}}{\pi \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6{,}62 \cdot 10^4}{\pi \cdot 90}} = 19{,}6 \text{ cm}.$$

Se va alege $d = 20$ cm.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

4.29. Se cere dimensionarea grinzii de rulare din figura 4.29, care este solicitată prin convoiul din desen, dacă $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

Răspuns: $W = 612$ cm³.

4.30. Ce moment încovoietor poate suporta o grindă de lemn de secţiune $15 \cdot 25$ cm² şi 2 m deschidere, ştiind că $\sigma_a = 100$ daN/cm²? Dar dacă deschiderea este de 4 m? Ce forţă concentrată, aşezată la mijloc, poate suporta grinda în ambele cazuri?

Răspuns: $M_1 = 156\,250$ daNcm, $M_2 = 156\,250$ daNcm,
$P_1 = 3\,125$ daN, $P_2 = 1\,562{,}5$ daN.

4.31. Un baraj de lemn este construit din stîlpi AB, rezemaţi la capete ca în figura 4.31. Secţiunea unui stîlp este dreptunghiulară, avînd înălţimea $h = 30$ cm. Să se determine efortul unitar maxim în stîlpi, ştiind că fiecare din ei are lungimea $l = 5{,}40$ m.

Indicaţie. Se procedează similar ca la problema 4.12, ţinînd seama de modul de rezemare.

Răspuns: $\sigma_{max} = 67{,}39$ daN/cm².

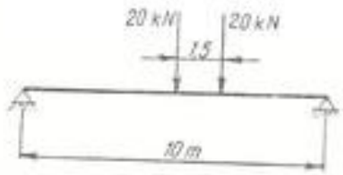


Fig. 4.29

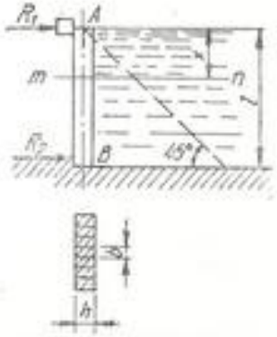


Fig. 4.31

CAPITOLUL 5

DEFORMAŢIILE BARELOR DREPTE SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. Ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate a unei bare solicitate la încovoiere este:

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M, \tag{5.1}$$

valabilă cu convenţia de axe din figura 5. *a*, M fiind momentul încovoietor într-o secţiune oarecare, funcţie de x.

2. Fibra medie este un *arc de cerc* pe porţiunea pe care momentul încovoietor este constant, deoarece ecuaţia exactă a fibrei medii deformate este:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \tag{5.2}$$

3. Ecuaţia (5.1) se integrează pe cale analitică, ţinînd seamă de expresia analitică a momentului încovoietor pe diferitele intervale ale barei şi de condiţiile pe reazeme. În general, se întîlnesc următoarele condiţii pe reazeme:

— reazem simplu: săgeata nulă;

— încastrare: săgeata şi unghiul format de tangenta în reazem la fibra medie deformată cu axa Ox, nule.

4. Ecuaţia (5.1) se poate integra prin metoda *grafoanalitică*, cu ajutorul relaţiilor:

$$EI_z \left(\frac{dv}{dx} - \operatorname{tg} \varphi_0\right) = -\Omega_{Ox}, \tag{5.3}$$

$$EI_z (v - v_0 - x \operatorname{tg} \varphi_0) = -S_{xO}, \tag{5.4}$$

în care s-au notat:

φ_0 — unghiul fibrei medii deformate în origine (la $x = 0$);

v_0 — săgeata în origine;

Ω_{Ox} — suprafaţa diagramei momentelor încovoietoare între origine şi secţiunea x care se studiază;

S_{xO} — momentul static al suprafeţei diagramei momentelor încovoietoare de pe intervalul dintre O şi x, luat faţă de secţiunea x.

Fig. 5. *a*

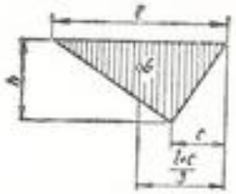


Fig. 5. *b*

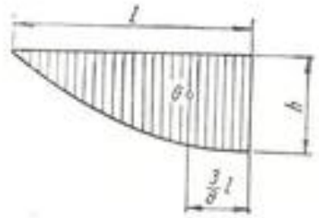


Fig. 5. *c*

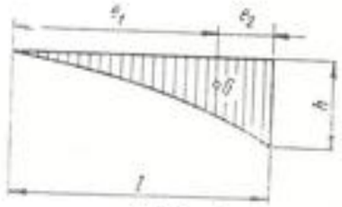


Fig. 5. *d*

Pentru calculul uşor al valorilor Ω_{Ox} şi S_{xO} la suprafeţe formate din triunghiuri sau parabole, se dau următoarele formule:

Triunghi, figura 5, *b*:

$$\Omega = \frac{lh}{2}. \tag{5.5}$$

Parabolă de gradul al doilea ca în figura 5. *c*:

$$\Omega = \frac{2}{3} lh. \tag{5.6}$$

Parabolă de gradul al doilea ca în figura 5. *d*:

$$\Omega = \frac{1}{3} lh, \tag{5.7}$$

$$e_2 = \frac{1}{4} l. \tag{5.8}$$

Parabolă cubică (de forma din fig. 5. *d*):

$$\Omega = \frac{1}{4} lh, \tag{5.9}$$

$$e_2 = \frac{1}{5} l. \tag{5.10}$$

5. O variantă a metodei grafoanalitice este metoda grinzii reciproce. Bara studiată se consideră încărcată cu o sarcină distribuită, care este diagrama de momente încovoietoare, numită sarcină fictivă. Grinda încărcată cu sarcină fictivă se numește grindă reciprocă a celei reale. Sarcina fictivă $M = p_f$ satisface condițiile:

$$\frac{d^2M_f}{dx^2} = \frac{dT_f}{dx} = -p_f$$

și, prin integrare, se obțin ecuațiile:

$$EI\frac{dv}{dx} = T_f; \quad EIv = M_f. \tag{5.11}$$

Din aceste relații rezultă că:

— unghiul fibrei medii deformate al grinzii reale într-o secțiune oarecare este egal cu forța tăietoare a grinzii reciproce, împărțită prin EI;

— săgeata grinzii reale într-o secțiune oarecare este egală cu momentul încovoietor al grinzii reciproce, împărțit prin EI.

La aplicarea acestei metode se ține seama de următoarele corespondențe:

— reciproca grinzii simplu rezemate la extremități este tot o grindă simplu rezemată la extremități;

— reciproca grinzii încastrate la o extremitate și liberă la cealaltă este o grindă la care reazemului încastrat de la prima îi corespunde un capăt liber, iar capătului liber de la prima îi corespunde o încastrare;

— reciproca grinzii cu două reazeme simple și o consolă este o grindă la care reazemul simplu de la o extremitate rămîne simplu, reazemul simplu intermediar se transformă în articulație, iar extremitatea liberă devine încastrare; analog pentru grinda cu două console.

6. Cînd de-a lungul unei bare momentul încovoietor are mai multe expresii analitice, metoda integrării analitice devine dificilă datorită numărului mare de relații ce trebuie stabilite și numărului mare de constante de integrare ce trebuie determinate. În astfel de cazuri se aplică metoda parametrilor inițiali, în care intervin totdeauna numai două constante de integrare: valorile inițiale (în origine) ale săgeții și unghiului de deformare.

Schema corespunzătoare acestei metode este arătată în figura 5. *e*. La bara schițată nu se precizează modul de rezemare. Se notează cu *a*, *b*, *c*, distanțele

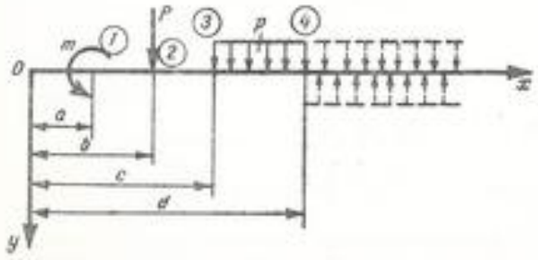


Fig. 5. *e*

de la origine la punctele unde expresia analitică a momentului încovoietor se schimbă. Pe intervalele de felul *4—5* nu există sarcină distribuită. Se stabilesc următoarele ecuații de deformații, pe care le comportă aplicarea acestei metode:

$$EI\varphi = EI\varphi_0\Big|_{01} + m(x-a)\Big|_{12} + P\frac{(x-b)^2}{2}\Big|_{23} + p\frac{(x-c)^3}{6}\Big|_{34} - p\frac{(x-d)^3}{6}\Big|_{45}; \tag{5.12}$$

$$EIv = EIv_0 + EI\varphi_0 x\Big|_{01} + m\frac{(x-a)^2}{2}\Big|_{12} + P\frac{(x-b)^3}{6}\Big|_{23} + p\frac{(x-c)^4}{24}\Big|_{34} - p\frac{(x-d)^4}{24}\Big|_{45}. \tag{5.13}$$

În aceste ecuații, un semn oarecare, de exemplu, $|_{23}$ arată că ecuația deformației pe intervalul *2—3* este dată de toți termenii care se află în stînga acestui semn.

La scrierea acestor ecuații apar cu semnul plus toți termenii care în secțiunea x dau moment încovoietor negativ și cu semnul minus ceilalți.

Ordinea termenilor în ecuațiile (5.12) și (5.13) corespunde succesiunii sarcinilor de pe bara respectivă.

Constantele de integrare φ_0 și v_0 se stabilesc după modul de rezemare a barei în origine.

7. Pentru barele cu moment de inerție variind în trepte, se aplică metoda celor trei necunoscute[1].

Se consideră bara solicitată prin forțe concentrate, uniform distribuite și cupluri, cu moment de inerție variind în trepte. Se împarte bara în o serie de intervale, determinate fie prin salturi ale momentului de inerție, fie prin discontinuități ale sarcinilor (puncte de aplicare a forțelor concentrate sau cuplurilor, de începere sau de terminare a sarcinilor distribuite).

Se consideră două astfel de intervale succesive, de lungimi l_k și l_{k+1}. Cu notațiile din figura 5. *f* se stabilește următoarea relație de recurență:

$$-v_{k-1}l_{k+1} + v_k(l_k + l_{k+1}) - v_{k+1}l_k = \frac{l_k l_{k+1}}{6E}\left[(M_{k-1} + 2M_k)\lambda_k + (M_{k+1} + 2M_k)\lambda_{k+1}\right] + \frac{l_k l_{k+1}}{24E}(p_{k+1}l_{k+1}^2\lambda_{k+1} + p_k l_k^2\lambda_k), \tag{5.14}$$

unde s-a notat:

$$\lambda_k = l_k / I_k; \; \lambda_{k+1} = l_{k+1} / I_{k+1}. \tag{5.15}$$

Unghiul de deformație în secțiunea k este dat de relația:

$$\varphi_k = \frac{v_{k+1} - v_k}{l_{k+1}} + \frac{(M_{k+1} + 2M_k)\lambda_{k+1}}{6E} + \frac{p_{k+1}l_{k+1}^2\lambda_{k+1}}{24E}. \tag{5.16}$$

[1] Stabilită de prof. dr. ing. M. Blumenfeld de la catedra de Rezistența materialelor a Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej".

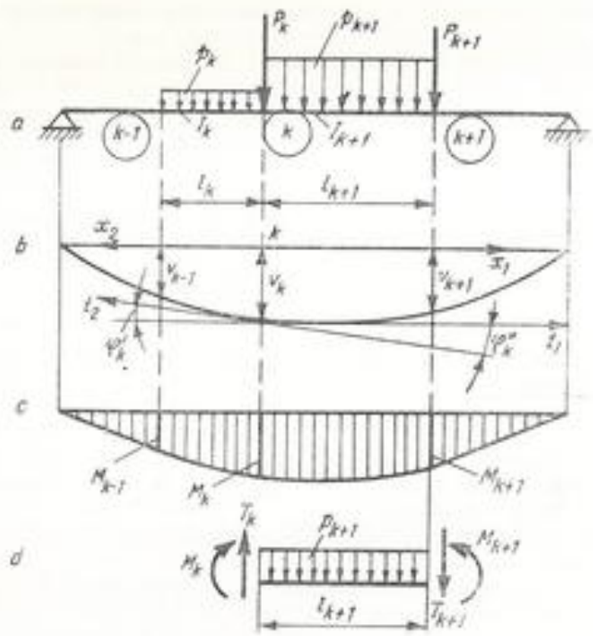


Fig. 5. f

Ecuația (5.14) poartă numele de ecuația celor trei necunoscute. Ea este ecuația de recurență între mărimile v_{k-1}, v_k, v_{k+1} de la extremitățile celor două intervale considerate. Ea se scrie de atîtea ori cîte perechi de intervale se pot stabili pe bară.

B. PROBLEME REZOLVATE

5.1. Se dă o grindă încastrată solicitată cu o sarcină concentrată P și un cuplu $M = Pl$, conform figurii 5.1. Se cere să se determine valoarea săgeții maxime.

Rezolvare. a) Prin metoda integrării analitice:

$$M_{21} = -P(l - x).$$

$$M_{10} = -P(l - x) + Pl = Px.$$

Intervalul 1—2:

$$EI_z \frac{dv}{dx} = Plx - \frac{Px^2}{2} + C_1, \qquad (1)$$

$$EI_z v = \frac{Plx^2}{2} - \frac{Px^3}{6} + C_1 x + C_2. \qquad (2)$$

Intervalul 0—1:

$$EI_z \frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C_3, \qquad (3)$$

$$EI_z v = -\frac{Px^3}{6} + C_3 x + C_4. \qquad (4)$$

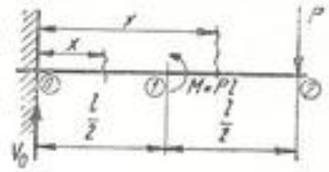


Fig. 5.1

Pentru determinarea constantelor de integrare se pun condițiile la limită. În (3) pentru $x = 0$; $dv/dx = 0$; $C_3 = 0$. În (4) pentru $x = 0$; $v = 0$; $C_4 = 0$.

Pentru $x = l/2$, săgețile și unghiurile date de cele două perechi de ecuații sînt egale:

$$\frac{Pl^2}{2} - \frac{Pl^2}{8} + C_1 = -\frac{Pl^2}{8}\ ;\ \text{din (1) și (3)}\ ;\ C_1 = -\frac{Pl^2}{2},$$

$$\frac{Pl^3}{8} - \frac{Pl^3}{48} - \frac{Pl^3}{4} + C_2 = \frac{Pl^3}{48}\ ;\ \text{din (2) și (4)}\ ;\ C_2 = \frac{Pl^3}{8}.$$

Pe intervalul 1—2, săgeata maximă va avea loc în punctul unde panta tangentei este nulă:

$$EI_z \frac{dv}{dx} = Plx - \frac{Px^2}{2} - \frac{Pl^2}{2} = 0;\quad x = l.$$

Înlocuind în (2), rezultă:

$$EI_z f_2 = \frac{Pl^3}{2} - \frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl^3}{2} + \frac{Pl^3}{8} = -\frac{Pl^3}{24}\ ;\ f_2 = -\frac{Pl^3}{24EI_z}.$$

Pe intervalul 0—1, valoarea maximă a săgeții este la $x = l/2$:

$$EI_z f_1 = -\frac{P}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3 = -\frac{Pl^3}{48}\ ;\quad f_1 = -\frac{Pl^3}{48EI_z}.$$

$f_2 > f_1$, săgeata maximă este cea din capătul liber al grinzii.

b) Prin metoda parametrilor inițiali. În 0 apare numai reacțiunea verticală pozitivă $V_0 = P$.

Se aplică formulele (5.12), (5.13) cu $\varphi_0 = 0$ și $v_0 = 0$. Rezultă:

$$EI\varphi = EI_z \frac{dv}{dx} = -P\frac{x^2}{2}\Big|_{01} + Pl\left(x - \frac{l}{2}\right)\Big|_{12},$$

$$EI_z v = -\frac{Px^3}{6}\Big|_{01} + Pl\frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2}{2}\Big|_{12}.$$

Pe intervalul 0—1:

$$EI_z \frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2},$$

$$EI_z v = -\frac{Px^3}{6}.$$

Pe intervalul 1—2:

$$EI_z \frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + Pl\left(x - \frac{l}{2}\right) = -\frac{Px^2}{2} + Plx - \frac{Pl^2}{2},$$

$$EI_z v = -\frac{Px^3}{6} + Pl\frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2}{2} = -\frac{Px^3}{6} + \frac{Plx^2}{2} - \frac{Pl^2x}{2} + \frac{Pl^3}{8}.$$

Se obțin deci aceleași ecuații ca în prima soluție.

5.2. Să se scrie ecuația fibrei medii deformate pentru grinda din figura 5.2, solicitată la capete prin două cupluri, M_1 și M_2. Să se găsească unghiurile pe reazeme și săgeata la mijlocul grinzii.

Rezolvare. a) Prin metoda integrării analitice:

$$V_1 = \frac{M_2 - M_1}{l}; \quad V_2 = -\frac{M_2 - M_1}{l},$$

$$M = M_1 + V_1 x = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l} x.$$

Ecuația fibrei medii deformate:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -M = -M_1 - \frac{M_2 - M_1}{l} x;$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -M_1 x - \frac{M_2 - M_1}{l}\frac{x^2}{2} + C_1; \tag{1}$$

$$EIv = -\frac{M_1 x^2}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l}\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2. \tag{2}$$

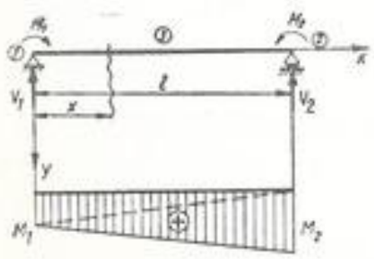


Fig. 5.2.

Condițiile la limită:

1) pentru $x = 0$, $v = 0$, $C_2 = 0$,
2) pentru $x = l$, $v = 0$. Din (2):

$$0 = -M_1\frac{l^2}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l}\frac{l^3}{6} + C_1 l;$$

$$C_1 = \frac{l(2M_1 + M_2)}{6}.$$

Înlocuind în (1) și (2), se obține:

$$EI\frac{dv}{dx} = -M_1 x - \frac{M_2 - M_1}{l}\frac{x^2}{2} + \frac{l(2M_1 + M_2)}{6}, \tag{3}$$

$$EIv = -M_1\frac{x^2}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l}\frac{x^3}{6} + \frac{l(2M_1 + M_2)}{6}x; \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = \frac{(2M_1 + M_2)l}{6EI};$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=l} = \left[-M_1 l - \frac{M_2 - M_1}{l}\frac{l^2}{2} + \frac{l(2M_1 + M_2)}{6}\right]\frac{1}{EI} =$$

$$= -\frac{(M_1 + 2M_2)l}{6EI}.$$

Săgeata la mijlocul grinzii [$x = l/2$ în (4)]:

$$v_3 = \frac{1}{EI}\left[-\frac{M_1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{M_2 - M_1}{6l}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{l(2M_1 + M_2)}{6}\cdot\frac{l}{2}\right] = \frac{l^2(M_1 + M_2)}{16EI}. \tag{5}$$

b) Prin metoda grafoanalitică:

Se aplică ecuația (5.4) în punctul 2, cu originea în 1:

$$EI(0 - l\operatorname{tg}\varphi_1) = -S_{21} = -\frac{1}{2}M_1 l\frac{2}{3}l - \frac{1}{2}M_2 l\cdot\frac{l}{3}, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{(2M_1 + M_2)l}{6EI}.$$

Se aplică ecuația (5.4) în punctul 1, cu originea în 2:

$$EI(0 - l\operatorname{tg}\varphi_2) = -S_{12} = -\frac{1}{2}M_1 l\frac{l}{3} - \frac{1}{2}M_2 l\frac{2l}{3}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{(M_1 + 2M_2)l}{6EI}.$$

Se aplică ecuația (5.4) în punctul 3:

$$EI\left(v_3 - \frac{l}{2}\operatorname{tg}\varphi_1\right) = -S_{31},$$

$$EI\left[v_3 - \frac{l}{2}\cdot\frac{(2M_1 + M_2)l}{6EI}\right] = -M_1\frac{l}{2}\frac{l}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{M_1 + M_2}{2} - M_1\right]\frac{l}{2}\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{2}.$$

$$EIv_3 = -\frac{M_1 l^2}{8} - \frac{M_1 l^2}{48} - \frac{M_2 l^2}{48} + \frac{M_1 l^2}{24} + \frac{M_1 l^2}{6} + \frac{M_2 l^2}{12} = \frac{(M_1 + M_2)l^2}{16}$$

$$v_3 = \frac{(M_1 + M_2)l^2}{16EI}$$

5.3. Să se scrie ecuația fibrei medii deformate pentru grinda din figura 5.3 și să se găsească unghiurile pe reazeme și săgeata în mijlocul grinzii.

Rezolvare: a) Prin metoda integrării analitice.

Datorită simetriei, calculele se efectuează pentru jumătate de grindă pe intervalele *1—3* și *3—5*:

$$V_1 = V_2 = P;$$

$$M_{13} = V_1 x = Px;$$

$$M_{35} = V_1 x - P(x - a) = Pa.$$

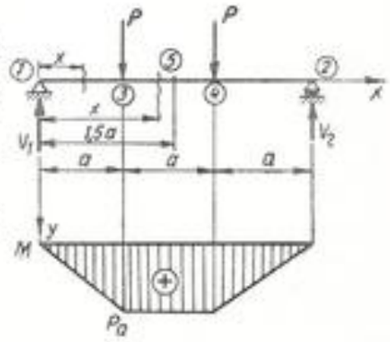


Fig. 5.3

Intervalul 1—3:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -M_{13} = -Px; \tag{1}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C_1;$$

$$EIv = -\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2. \tag{2}$$

Intervalul 3—5:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -M_{35} = -Pa;$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -Pax + C_3; \tag{3}$$

$$EIv = -\frac{Pax^2}{2} + C_3x + C_4. \tag{4}$$

Condițiile la limită pentru determinarea constantelor de integrare sînt:

1) Săgeata în *1* este nulă, pentru $x = 0$, $v = 0$; rezultă $C_2 = 0$.
2) Săgeata este maximă la mijloc, pentru $x = 3a/2$, $dv/dx = 0$; rezultă:

$$0 = -Pa\frac{3a}{2} + C_3; \quad C_3 = \frac{3Pa^2}{2}.$$

3) Tangentele la fibra medie din (1) și (3) trebuie să aibă pante egale în *3*.

$$-\frac{Pa^2}{2} + C_1 = -Pa^2 + \frac{3}{2}Pa^2; \quad C_1 = Pa^2.$$

4) Săgețile trebuie să fie egale în *3*.

$$-\frac{Pa^3}{6} + Pa^2 \cdot a = -\frac{Pa \cdot a^2}{2} + \frac{3Pa^2 \cdot a}{2} + C_4; C_4 = -\frac{Pa^3}{6}.$$

Ecuațiile (1), (2), (3) și (4) devin:

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{dv}{dx} &= -\frac{Px^2}{2} + Pa^2 && (5)\\ EIv &= -\frac{Px^3}{6} + Pa^2x && (6)\end{aligned}\right\} \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant a.$$

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{dv}{dx} &= -Pax + \frac{3Pa^2}{2} && (7)\\ EIv &= -\frac{Pax^2}{2} + \frac{3Pa^2x}{2} - \frac{Pa^3}{6} && (8)\end{aligned}\right\} a \leqslant x \leqslant \frac{3a}{2}.$$

Unghiul în reazemul *1:*

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{Pa^2}{EI}.$$

Săgeata maximă:

$$EIf_5 = -\frac{Pa}{2}\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \frac{3Pa^2}{2}\frac{3a}{2} - \frac{Pa^3}{6}; \; f_5 = \frac{23Pa^3}{24\,EI}.$$

b) Prin metoda grinzii reciproce:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot Pa\cdot a + Pa\frac{a}{2}\right) = \frac{Pa^2}{EI},$$

$$f_5 = \frac{1}{EI}\left[Pa^2\frac{3a}{2} - \frac{1}{2}Pa\cdot a\left(\frac{1}{3}a + \frac{a}{2}\right) - Pa\frac{a}{2}\frac{a}{4}\right] =$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{3Pa^3}{2} - \frac{5Pa^3}{12} - \frac{Pa^3}{8}\right] = \frac{23Pa^3}{24EI}.$$

5.4. Să se găsească ecuația fibrei medii deformate la grinda din figura 5.4, solicitată prin o sarcină uniform distribuită pe o parte din grindă. Să se calculeze unghiurile din reazeme și săgeata maximă.

Rezolvare. a) Prin metoda integrării analitice.

$$V_1 = V_2 = \frac{pc}{2}.$$

$$M_{13} = V_1x = \frac{pc}{2}x; \quad M_{35} = V_1x - \frac{p(x-a)^2}{2} = \frac{pc}{2}x - \frac{p(x-a)^2}{2}.$$

Intervalul 1—3:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{pc}{2}x; \; EI\frac{dv}{dx} = -\frac{pc}{2}\frac{x^2}{2} + C_1, \tag{1}$$

$$EIv = -\frac{pc}{2}\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2. \tag{2}$$

Intervalul 3—5:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{pc}{2}x + \frac{p(x-a)^2}{2}; \; EI\frac{dv}{dx} = -\frac{pc}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{p}{2}\frac{(x-a)^3}{3} + C_3 \tag{3}$$

$$EIv = -\frac{pc}{2}\frac{x^3}{6} + \frac{p}{2}\frac{(x-a)^4}{12} + C_3x + C_4. \tag{4}$$

Condițiile la limită sînt:

1) Săgeata în reazemul *1* este nulă, deci pentru $x = 0$, $v = 0$; rezultă $C_2 = 0$.
2) Săgeata este maximă la mijlocul grinzii, deci pentru $x = a + c/2$; $dv/dx = 0$.

$$0 = -\frac{pc}{4}\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{p}{6}\left(\frac{c}{2}\right)^3 + C_3; \quad C_3 = \frac{pc}{4}\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{pc^3}{48}.$$

3) Panta tangentei în *3* din ecuația (1) trebuie să fie egală cu cea din ecuația (3)

$$-\frac{pc}{4}\cdot a^2 + C_1 = -\frac{pc}{4}a^2 - \frac{pc^3}{48} + \frac{pc}{4}\left(a+\frac{c}{2}\right)^2,$$

$$C_1 = -\frac{pc^3}{48} + \frac{pc}{4}\left(a+\frac{c}{2}\right)^2 = C_2.$$

4) Săgeata în 3 din ecuațiile (2) și (4) trebuie să fie aceeași:

$$-\frac{pc}{2}\frac{a^3}{6} + C_1 a = -\frac{pc}{2}\frac{a^3}{6} + C_2 a + C_4;\ C_4 = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{dv}{dx} &= -\frac{pc}{4}x^2 + \frac{pc}{4}\left(a+\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{pc^3}{48} && (5)\\ EIv &= -\frac{pc}{12}x^3 + \left[\frac{pc}{4}\left(a+\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{pc^3}{48}\right]x && (6)\end{aligned}\right\} 0 \leqslant x \leqslant a.$$

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{dv}{dx} &= -\frac{pc}{4}x^2 + \frac{p}{6}(x-a)^3 + \frac{pc}{4}\left(a+\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{pc^3}{48} && (7)\\ EIv &= -\frac{pc}{12}x^3 + \frac{p}{24}(x-a)^4 + \left[\frac{pc}{4}\left(a+\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{pc^3}{48}\right]x && (8)\end{aligned}\right\} a \leqslant x \leqslant a+\frac{c}{2}.$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{EI}\left[\frac{pc}{4}\left(a+\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{pc^3}{48}\right] = \frac{1}{EI}\left(\frac{pca^2}{4} + \frac{pc^2a}{4} + \frac{pc^3}{24}\right).$$

Săgeata maximă se calculează din ecuația (8), înlocuind $x = a + c/2$.

$$v_{max} = \frac{1}{EI}\left[\frac{pc}{6}\left(a+\frac{c}{2}\right)^3 - \frac{pc^3}{48}\left(a+\frac{3}{8}c\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{pca^3}{6} + \frac{pc^2a^2}{4} + \frac{5pc^3a}{48} - \frac{5pc^4}{384}\right).$$

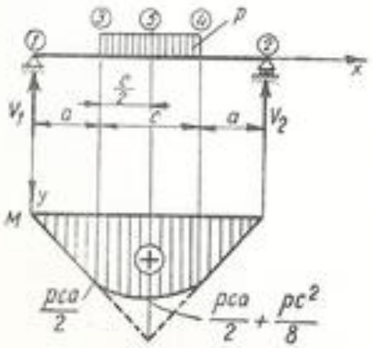


Fig. 5.4

b) Prin metoda grinzii reciproce:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\frac{pca}{2}a + \frac{pca}{2}\frac{c}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\left(\frac{pca}{2} + \frac{pc^2}{8} - \frac{pca}{2}\right)\frac{c}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{pca^2}{4} + \frac{pc^2a}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\cdot\frac{pc^2}{8}\frac{c}{2}\right] = \frac{1}{EI}\left[\frac{pca^2}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{pc^2a}{4} + \frac{pc^3}{24}\right].$$

$$v_{max} = f_5 = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{pca^2}{4} + \frac{pc^2a}{4} + \frac{pc^3}{24}\right)\left(a+\frac{c}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{pca}{2}a\left(\frac{a}{3}+\frac{c}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{pca}{2}\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{4} - \frac{2}{3}\frac{pc^3}{8}\cdot\frac{c}{2}\frac{3}{8}\frac{c}{2}\right] = \frac{1}{EI}\left(\frac{pca^3}{6} + \frac{pc^2a^2}{4} + \frac{5pc^3a}{48} - \frac{5pc^4}{384}\right).$$

5.5. La grinda din figura 5.5 să se calculeze raportul dintre sarcinile P și pl, astfel încît săgeata în punctul *3* să fie nulă.

Rezolvare: a) Prin metoda integrării analitice:

$$V_1 + V_2 - pl - P = 0,$$

$$pl\frac{l}{2} - V_2 l + P\cdot 2l = 0,$$

$$V_2 = 2P + \frac{pl}{2};\ V_1 = \frac{pl}{2} - P.$$

Momentul încovoietor într-o secțiune x, între *1* și *2*, este:

$$M_x = V_1 x - \frac{px^2}{2} = \left(\frac{pl}{2} - P\right)x - \frac{px^2}{2}. \qquad (1)$$

Ecuația fibrei deformate:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{pl}{2} - P\right)x - \frac{px^2}{2}\right], \qquad (2)$$

$$\frac{dv}{dx} - \operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{x^2}{2} - p\frac{x^3}{6}\right], \qquad (3)$$

$$v - v_1 - x\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{x^3}{6} - \frac{px^4}{24}\right]. \qquad (4)$$

Pe reazeme săgețile sînt nule:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0\\ x &= l\end{aligned}\right\} v = 0.$$

Din relația (4) se obține:

$$x = 0;\ v_1 = 0; \qquad (5)$$

$$x = l;\ -l\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{pl}{2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - P\right)\frac{l^3}{6} - \frac{pl^4}{24}\right]; \qquad (6)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{EI}\left(\frac{pl^3}{24} - \frac{Pl^2}{6}\right). \qquad (7)$$

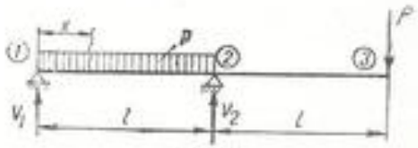


Fig. 5.5

Din relaţiile (3) şi (4) se obţine:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{pl^3}{24} - \frac{Pl^2}{6}\right) - \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{x^2}{2} - \frac{px^3}{6}\right], \tag{8}$$

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{pl^3x}{6} - \frac{Pl^2x}{6}\right) - \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{x^3}{6} - \frac{px^4}{24}\right]. \tag{9}$$

Cu $x = l$ în expresia (8):

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=l} = \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{pl^3}{24} - \frac{Pl^2}{6} - \left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{l^2}{2} + \frac{pl^3}{6}\right]; \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{1}{EI}\left(P\frac{l^2}{3} - \frac{pl^3}{24}\right). \tag{10}$$

Pe intervalul *2—3*, luînd variabila x de la *2* spre dreapta:

$$M = V_1(l + x) - pl\left(\frac{l}{2} + x\right) + V_2x;$$

$$M = \left(\frac{pl}{2} - P\right)(l + x) - pl\left(\frac{l}{2} + x\right) + \left(2P + \frac{pl}{2}\right)x;$$

$$M = P(-l + x);$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -M = P(l - x); \quad EI\frac{dv}{dx} = P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1; \tag{11}$$

$$EIv = P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1x + C_2. \tag{12}$$

În *2*, pentru $x = 0$, $v = 0$, deci $C_2 = 0$.

Înclinarea fibrei medii în *2* este cunoscută din formula (10). Rezultă:

$$EI \operatorname{tg}\varphi_2 = C_1 = \frac{Pl^2}{3} - \frac{pl^3}{24}.$$

Înlocuind în expresia (12):

$$EIv = P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \left(\frac{Pl^2}{3} - \frac{pl^3}{24}\right)x, \tag{13}$$

$$v_2 = \frac{1}{EI}\left(\frac{2Pl^3}{3} - \frac{pl^4}{24}\right).$$

Pentru ca săgeata în *3* să fie nulă, rezultă din relaţia (13):

$$P = \frac{pl}{16}. \tag{14}$$

b) Prin metoda parametrilor iniţiali:

$$EI\varphi = EI\varphi_1 - \left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{x^2}{2} + p\frac{x^3}{6}\Big|_{12} - p\frac{(x - l)^3}{6} - \left(2P + \frac{pl}{2}\right)\frac{(x - l)^2}{2}\Big|_{23},$$

$$EIv = EIv_1 + EI\varphi_1x - \left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{x^3}{6} + p\frac{x^4}{24}\Big|_{12} - p\frac{(x - l)^4}{24} - \left(2P + \frac{pl}{2}\right)\frac{(x - l)^3}{6}\Big|_{23}.$$

Pe *1—2*;

$$EI\varphi = EI\varphi_1 - \left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{x^2}{2} + p\frac{x^3}{6};$$

$$EIv = EI\varphi_1x - \left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{x^3}{6} + p\frac{x^4}{24};$$

$$x = l, \quad v = 0,$$

$$0 = EI\varphi_1l - \left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{l^3}{6} + p\frac{l^4}{24};$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{EI}\left(\frac{pl^3}{24} - \frac{Pl^2}{6}\right),$$

$$EI\varphi_2 = \frac{pl^3}{24} - \frac{Pl^2}{6} - \left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{l^2}{2} + p\frac{l^3}{6};$$

$$EI\varphi_2 = \frac{pl^3}{24} - \frac{Pl^2}{6} - \frac{pl^3}{4} + \frac{Pl^2}{2} + \frac{pl^3}{6} = Pl^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + pl^3\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right);$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI}\left(\frac{Pl^2}{3} - \frac{pl^3}{24}\right).$$

Pe *2—3*:

$$EI\varphi = \frac{pl^3}{24} - \frac{Pl^2}{6} - \left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{x^2}{2} + p\frac{x^3}{6} - p\frac{(x - l)^3}{6} - \left(\frac{pl}{2} + 2P\right)\frac{(x - l)^2}{2};$$

$$EIv = \left(\frac{pl^3}{24} - \frac{Pl^2}{6}\right)x - \left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{x^3}{6} + p\frac{x^4}{24} - p\frac{(x - l)^4}{24} - \left(\frac{pl}{2} + 2P\right)\frac{(x - l)^3}{6};$$

$$EIv_3 = \left(\frac{pl^3}{24} - \frac{Pl^2}{6}\right)2l - \left(\frac{pl}{2} - P\right)\frac{8l^3}{6} + p\frac{16l^4}{24} - \frac{pl^4}{24} - \left(\frac{pl}{2} + 2P\right)\frac{l^3}{6} =$$

$$= \frac{pl^4}{12} - \frac{Pl^3}{3} - \frac{2pl^4}{3} + \frac{4Pl^3}{3} + \frac{2pl^4}{3} -$$

$$- \frac{pl^4}{24} - \frac{pl^4}{12} - \frac{Pl^3}{3} = \frac{2Pl^3}{3} - \frac{pl^4}{24}.$$

5.6. Să se calculeze săgeata în punctul *4* la grinda din figura 5.6. Se dă $pa = P$.

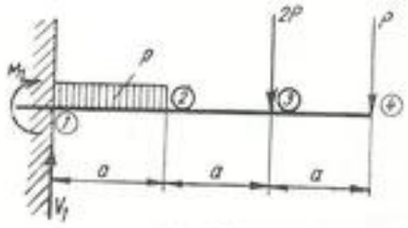


Fig. 5.6

Rezolvare. Prin metoda parametrilor inițiali:

$$V_1 = pa + 3P;$$

$$M_1 = -\left(\frac{pa}{2} + 7P\right)a;$$

$$\varphi_1 = 0;\ v_1 = 0.$$

$$EI\varphi = -(pa+3P)\frac{x^2}{2} + \left(\frac{pa}{2} + 7P\right)ax + p\,\frac{x^3}{6}\Big|_{12} - p\,\frac{(x-a)^3}{6}\Big|_{23} + 2P\,\frac{(x-2a)^2}{2}\Big|_{34};$$

$$EIv = -(pa+3P)\frac{x^3}{6} + \left(\frac{pa}{2} + 7P\right)a\,\frac{x^2}{2} + \frac{px^4}{24}\Big|_{12} - \frac{p(x-a)^4}{24}\Big|_{23} + 2P\,\frac{(x-2a)^3}{6}\Big|_{34};$$

Cu $pa = P$.

Pe intervalul *1–2*:

$$EI\varphi = -2\,Px^2 + \frac{15\,Pax}{2} + \frac{Px^3}{6a};$$

$$EIv = P\left(\frac{x^4}{24a} - \frac{2x^3}{3} + \frac{15\,ax^2}{4}\right);$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{17Pa^2}{3EI};\quad v_2 = \frac{25\,Pa^3}{8EI}.$$

Pe intervalul *2–3*:

$$EI\varphi = -2Px^2 + \frac{15Pax}{2} + \frac{Px^3}{6a} - \frac{P(x-a)^3}{6a};$$

$$EIv = -\frac{2\,Px^3}{3} + \frac{15\,Pax^2}{4} + \frac{Px^4}{24\,a} - \frac{P(x-a)^4}{24a};$$

$$EI\varphi_3 = -2P\cdot 4a^2 + \frac{15\,Pa}{2}\cdot 2a + \frac{P}{6a}8a^3 - \frac{P}{6a}a^3 = Pa^2\left[-8 + 15 + \frac{4}{3} - \frac{1}{6}\right] = Pa^2\left[7 + \frac{4}{3} - \frac{1}{6}\right] = \frac{Pa^2}{6}(42 + 8 - 1) = \frac{49\,Pa^2}{6};$$

$$EIv_3 = -\frac{2P}{3}8a^3 + \frac{15\,Pa}{4}4a^2 + \frac{P}{24a}16a^4 - \frac{Pa^4}{24a} = Pa^3\left[-\frac{16}{3} + 15 + \frac{2}{3} - \frac{1}{24}\right] = Pa^3\left[15 - \frac{14}{3} - \frac{1}{24}\right] = Pa^3\,\frac{360 - 112 - 1}{24} = \frac{247\,Pa^3}{24}.$$

Pe intervalul *3–4*:

$$EI\varphi = -2Px^2 + \frac{15\,Pax}{2} + \frac{Px^3}{6a} - P\,\frac{(x-a)^3}{6a} + P(x-2a)^2;$$

$$EIv = -\frac{2\,Px^3}{3} + \frac{15\,Pax^2}{4} + \frac{Px^4}{24a} - \frac{P(x-a)^4}{24a} + P\,\frac{(x-2a)^3}{3};$$

$$EI\varphi_4 = -2P\cdot 9a^2 + \frac{15\,Pa}{2}3a + \frac{P}{6a}27a^3 - \frac{P}{6a}8a^3 + Pa^2 = \frac{26Pa^2}{3};$$

$$EIv_4 = -\frac{2P}{3}\cdot 27\,a^3 + \frac{15\,Pa}{4}9a^2 + \frac{P}{24a}81\,a^4 - \frac{P}{24a}16a^4 + \frac{P}{3}\,a^3 = \frac{451Pa^3}{24}.$$

5.7. Să se calculeze unghiul fibrei medii deformate în punctele *2* și *3* și săgeata în punctul *4*, la grinda din figura 5.7, articulată în punctul *2*.

Rezolvare. Se aplică metoda parametrilor inițiali:

$$\varphi_1 = 0,$$

$$v_1 = 0.$$

Reacțiunile se determină separînd bara în articulație:

$$V_2 = V_3 = \frac{pl}{2};\quad V_1 = \frac{pl}{2};$$

$$M_1 = -\frac{pl^2}{2}.$$

$$EI\varphi = \frac{pl^2}{2}x - \frac{pl}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{12} - EI\alpha_2 + p\,\frac{(x-l)^3}{6}\Big|_{23};$$

$$EIv = \frac{pl^2x^2}{4} - \frac{plx^3}{12}\Big|_{12} - EI\alpha_2(x-l) + p\,\frac{(x-l)^4}{24}\Big|_{23}.$$

În secțiunea *2* s-a introdus un salt de pantă (variație a unghiului tangentei la fibra medie deformată) considerat negativ.

Valoarea acestui salt se determină scriind că pe reazemul *3* săgeata este nulă, pentru $x = 2l$:

$$0 = \frac{pl^2}{4}\cdot 4l^2 - \frac{pl}{12}\cdot 8l^3 - EI\alpha_2 l + p\,\frac{l^4}{24};$$

$$EI\alpha_2 l = pl^4\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{24}\right) = \frac{3pl^4}{8};$$

$$\alpha_2 = \frac{3pl^3}{8EI}.$$

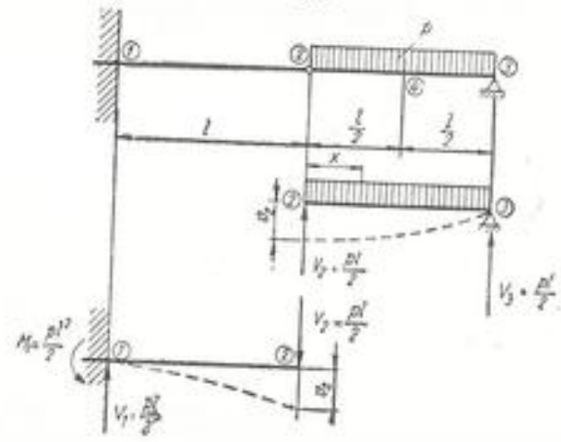


Fig. 5.7

Pe *1–2*:

$$EI\varphi = -\frac{plx^2}{4} + \frac{pl^2x}{2};$$

$$EIv = -\frac{plx^3}{12} + \frac{pl^2x^2}{4}.$$

Pe *2–3*:

$$EI\varphi = -\frac{plx^2}{4} + \frac{pl^2x}{2} - \frac{3pl^3}{8} + p\frac{(x-l)^3}{6};$$

$$EIv = -\frac{plx^3}{12} + \frac{pl^2x^2}{4} - \frac{3pl^3}{8}(x-l) + p\frac{(x-l)^4}{24};$$

$$EIv_2 = -\frac{pl^4}{12} + \frac{pl^4}{4} = \frac{pl^4}{6};$$

$$EIv_4 = -\frac{pl}{12}\frac{27l^3}{8} + \frac{pl^3}{4}\cdot\frac{9l^2}{4} - \frac{3pl^3}{8}\frac{l}{2} +$$

$$+\frac{p}{24}\cdot\frac{l^4}{16} = pl^4\left(-\frac{9}{32} + \frac{9}{16} - \frac{3}{16} + \frac{1}{384}\right) = \frac{37pl^4}{384};$$

$$EI\varphi_2 = -\frac{pl}{4}l^2 + \frac{pl^2}{2}l - \frac{3pl^3}{8} = pl^3\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) = -\frac{pl^3}{8};$$

$$EI\varphi_3 = -\frac{pl}{4}4l^2 + \frac{pl^2}{2}2l - \frac{3pl^3}{8} + \frac{pl^3}{6} = pl^3\left[-1 + 1 - \frac{3}{8} + \frac{1}{6}\right] = -\frac{5pl^3}{24}.$$

5.8. Să se determine ecuația fibrei medii deformate a unei grinzi simplu rezemate, încărcată cu o sarcină distribuită sinusoidal, așa cum se arată în figura 5.8.

Rezolvare. Într-o secțiune de abscisă x, $p_x = p_0 \sin \alpha x$; α se determină prin condiția: pentru $x = l$, $p_x = 0$; $p_0 \sin \alpha l = 0$, $\alpha l = 0, \pi, 2\pi$ etc. Pentru cazul din figura 5.8 corespunde valoarea $\alpha l = \pi$, deci $\alpha = \pi/l$:

$$p_x = p_0 \sin\frac{\pi x}{l}.$$

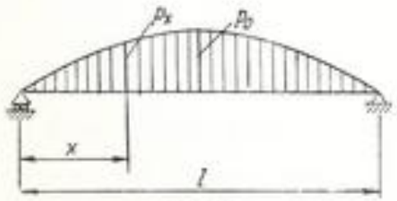


Fig. 5.8

Între săgeata v și sarcina p_x există relația:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{p_x}{EI};\ \frac{d^4v}{dx^4} = \frac{p_0}{EI}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Integrînd de patru ori:

$$v = \frac{p_0 l^4}{\pi^4 EI}\sin\frac{\pi x}{l} + C_1x^3 + C_2x^2 +$$

$$+ C_3x + C_4.$$

Condițiile la limită: $v = 0$ pentru $x = 0$ și $x = l$ și $v'' = 0$ pentru $x = 0$ și $x = l$ (pe reazeme, momentele încovoietoare fiind nule, fibra medie deformată are puncte de inflexiune).

$$C_4 = 0;\ C_1l^3 + C_2l^2 + C_3l + C_4 = 0;\ C_2 = 0;\ 6C_1l + 2C_2 = 0.$$

$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Ecuația fibrei medii deformate:

$$v = \frac{p_0 l^4}{\pi^4 EI}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

5.9. Să se calculeze săgeata în capătul liber *3* la grinda încastrată din figura 5.9, dacă momentele de inerție pe cele două intervale sînt I_1 și I_2.

Rezolvare. Integrarea ecuației fibrei medii deformate se face separat pe cele două intervale.

$$M_{23} = -P(l - x);\ M_{12} = -P(l - x).$$

Intervalul *1–2*:

$$EI_1\frac{d^2v}{dx^2} = -M_{12} = P(l - x),$$

$$EI_1\frac{dv}{dx} = P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1, \tag{1}$$

$$EI_1v = P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1x + C_2. \tag{2}$$

Intervalul *2–3*:

$$EI_2\frac{d^2v}{dx^2} = -M_{23} = P(l - x),$$

$$EI_2\frac{dv}{dx} = P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_3, \tag{3}$$

$$EI_2v = P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_3x + C_4. \tag{4}$$

Condițiile la limită:

1) $x = 0$, $v = 0$; din expresia (2) rezultă: $C_2 = 0$,

2) $x = 0$, $dv/dx = 0$; din relația (1) se obține: $C_1 = 0$,

3) unghiul tangentei la fibra medie în *2*, pentru $x = a$, din relația (1) și (3), este același:

$$\frac{P}{EI_1}\left(la - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{P}{EI_2}\left(la - \frac{a^2}{2}\right) +$$

$$+ \frac{C_3}{EI_2},\ C_3 = Pa\left(l - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right).$$

Fig. 5.9

4) În *2*, săgețile date de ecuațiile (2) și (4) sînt egale:

$$\frac{P}{EI_1}\left(\frac{la^2}{2}-\frac{a^3}{6}\right)=\frac{P}{EI_2}\left(\frac{la^2}{2}-\frac{a^3}{6}\right)+\frac{Pa}{EI_2}\left(l-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{I_2}{I_1}-1\right)a+\frac{C_4}{EI_2},$$

$$C_4=-Pa^2\left(\frac{I_2}{I_1}-1\right)\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{3}\right).$$

Ecuația (4) devine:

$$EI_2v=P\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+Pa\left(l-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{I_2}{I_1}-1\right)x-Pa^2\left(\frac{I_2}{I_1}-1\right)\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{3}\right).$$

Făcînd $x=l$ în această ecuație, se obține săgeata la capătul liber:

$$v_3=f=\frac{Pl^3}{3EI_2}+\frac{Pa}{EI_2}\left(\frac{I_2}{I_1}-1\right)\left(l^2-al+\frac{a^2}{3}\right).$$

5.10. Să se calculeze săgeata maximă f și raza de curbură ρ a arcului de cerc dintre reazeme, la grinda cu secțiune circulară din figura 5.10.

Aplicație numerică: $P=70$ kN, $a=300$ mm, $l=1\,500$ mm, $d=200$ mm.

Rezolvare. Între reazeme, grinda are moment încovoietor constant, deci se deformează după un arc de cerc a cărui rază se obține din relația (5.2):

$$\rho=\frac{EI_z}{M};\ M=Pa=7\,000\cdot 30=210\,000\ \text{daNcm},$$

$$I_z=\frac{\pi d^4}{64}=\frac{\pi\cdot 20^4}{64}=7854\ \text{cm}^4.$$

$$\rho=\frac{EI_z}{M}=\frac{2{,}1\cdot 10^6\cdot 7\,854}{210\,000}=78\,540\ \text{cm}=785{,}4\ \text{m}.$$

Efortul unitar de încovoiere maxim în grindă:

$$\sigma=\frac{M}{W}=\frac{M}{\frac{\pi d^3}{32}}=\frac{210\,000\cdot 32}{\pi\cdot 20^3}=268\ \text{daN/cm}^2.$$

Pentru calculul săgeții maxime f, se scrie relația:

$$\overline{1A}^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2=f(2\rho-f).$$

f fiind neglijabilă față de 2ρ,

$$f=\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2\rho}=\frac{l^2}{8\rho}=\frac{1{,}5^2}{8\cdot 785}=0{,}000\,358\ \text{m}=0{,}358\ \text{mm}.$$

O b s e r v a ț i e. La același rezultat se ajunge și pe calea integrării ecuației diferențiale a fibrei medii deformate. Porțiunea dintre reazeme poate fi asimilată cu grinda de la problema 5.2, unde $M_1=M_2=M$:

$$v=\frac{2l^2M}{16EI}=\frac{l^2M}{8EI}.$$

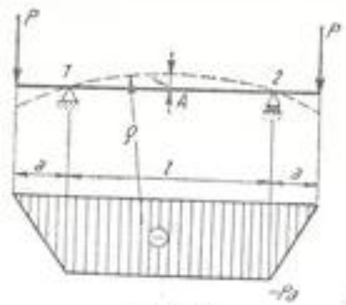


Fig. 5.10

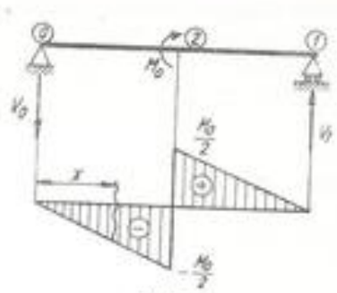


Fig. 5.11

Utilizînd (5.2):

$$v=\frac{l^2}{8\rho}.$$

Grinda studiată este osia unui vagon de cale ferată.

5.11. O grindă simplu rezemată la capete este solicitată la mijlocul deschiderii de un cuplu M_0, ca în figura 5.11. Se cere:

a) săgeata și unghiul la mijlocul grinzii;

b) săgeata maximă.

Rezolvare. Problema se poate rezolva prin metoda grafoanalitică, aplicînd ecuațiile (5.3) și (5.4):

$$EI\left(\frac{dv}{dx}-\text{tg}\ \varphi_0\right)=-\Omega_{0x};\qquad(1)$$

$$EI(v-v_0-x\ \text{tg}\ \varphi_0)=-S_{x0};\qquad(2)$$

$$v_0=0.$$

Aplicînd ecuația (2) în punctul *1*, rezultă:

$$EI(0-l\ \text{tg}\ \varphi_0)=-S_{10};$$

$$\text{tg}\ \varphi_0=\frac{S_{10}}{lEI}.\qquad(3)$$

$$S_{10}=\frac{1}{2}\frac{M_0}{2}\frac{l}{2}\frac{2}{3}\frac{l}{2}-\frac{1}{2}\frac{M_0}{2}\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{3}\frac{l}{2}\right)=-\frac{M_0l^2}{24};$$

$$\text{tg}\ \varphi_0=\frac{S_{10}}{lEI}=-\frac{M_0l}{24EI}.\qquad(4)$$

Înlocuind constantele în (1) și (2), rezultă:

$$EI\left(\frac{dv}{dx}+\frac{M_0l}{24EI}\right)=-\Omega_{0x};\qquad(5)$$

$$EI\left(v+x\frac{M_0l}{24EI}\right)=-S_{x0}.\qquad(6)$$

Se aplică relația (5) în 2, la $x = l/2$:

$$EI\left(\operatorname{tg}\varphi_2 + \frac{M_0 l}{24\,EI}\right) = -\Omega_{02} = -\left(-\frac{1}{2}\,\frac{M_0}{2}\,\frac{l}{2}\right) = \frac{M_0 l}{8}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{M_0 l}{12\,EI}.$$

Se aplică relația (6) în mijlocul grinzii, la $x = l/2$:

$$EI\left(v_2 + \frac{l}{2}\,\frac{M_0 l}{24\,EI}\right) = -S_{20} = -\left[-\frac{1}{2}\,\frac{M_0}{2}\,\frac{l}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{l}{2}\right] = \frac{M_0 l^2}{48},$$

$$v_2 = 0.$$

Săgeata la mijlocul grinzii este nulă.

Pentru găsirea săgeții maxime se scrie ecuația fibrei medii deformate, într-un punct oarecare, la distanța x de origine:

$$M_x = -V_0 x = -\frac{M_0}{l}\,x;$$

$$EI\left(v + x\,\frac{M_0 l}{24\,EI}\right) = -S_{x0} = -\left[-\frac{1}{2}\,\frac{M_0}{l}\,x \cdot x\,\frac{1}{3}\,x\right] = \frac{M_0 x^3}{6l},$$

$$v = \frac{M_0 x^3}{6\,EIl} - \frac{M_0 l x}{24\,EI}. \tag{7}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{M_0 x^2}{2\,EIl} - \frac{M_0 l}{24\,EI} = 0,$$

$$x^2 = \frac{l^2}{12};\quad x = \frac{l}{\sqrt{12}} = 0{,}289\ l, \tag{8}$$

$$v_{max} = \frac{M_0(0{,}289\ l)^3}{6l\,EI} - \frac{M_0 l(0{,}289\ l)}{24\,EI} = -0{,}00804\,\frac{M_0 l^2}{EI}.$$

5.12. O grindă de lemn de secțiune 25 × 38 cm² și lungime 2 m este încastrată la un capăt și solicitată de două forțe $P = 20$ kN, conform figurii 5.12. Se cere săgeata și unghiul în extremitatea grinzii, dacă $E = 10^5$ daN/cm².

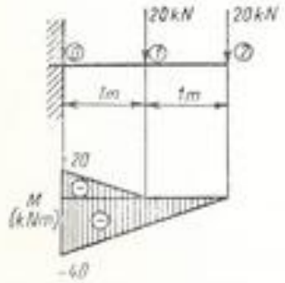


Fig. 5.12

Rezolvare.

$$EI_z\left(\frac{dv}{dx} - \operatorname{tg}\varphi_0\right) = -\Omega_{0x},$$

$$EI_z(v - v_0 - x\operatorname{tg}\varphi_0) = -S_{x0},$$

$$v_0 = 0 \text{ și } \operatorname{tg}\varphi_0 = 0,$$

$$EI_z\frac{dv}{dx} = -\Omega_{0x},$$

$$EI_z v = -S_{x0}.$$

$$-\Omega_{02} = -\left[-\frac{20\cdot 1}{2} - \frac{40\cdot 2}{2}\right]\cdot 10^4\cdot 10^2 = 5\cdot 10^7 \text{ daNcm}^2,$$

$$-S_{20} = -\left[-\frac{20\cdot 1}{2}\left(1+\frac{2}{3}\right) - \frac{40\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\right]\cdot 10^4\cdot 10^4 = 7\cdot 10^9 \text{ daNcm}^3,$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{25\cdot 38^3}{12} = 114\,317 \text{ cm}^4,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{\Omega_{02}}{EI_z} = \frac{5\cdot 10^7}{10^5\cdot 114\,317} = 0{,}0044,$$

$$\varphi_2 \approx \operatorname{tg}\varphi_2 = 0{,}0044 \text{ rad} = 0{,}0044\cdot\frac{180}{\pi} = 0{,}25^\circ = 15',$$

$$v_2 = -\frac{S_{20}}{EI_z} = \frac{7\cdot 10^9}{10^5\cdot 114\,317} = 0{,}614 \text{ cm}.$$

5.13. Să se determine x (fiind cunoscute L și p) pentru grinda din figura 5.13 astfel ca:

a) săgeata în jos să fie maximă;
b) săgeata în jos să fie minimă;
c) săgeata în sus să fie maximă.

Rezolvare. Datorită simetriei grinzii, valorile extreme ale săgeților au loc în secțiunile A sau B. Calculul săgeților v_A și v_B se face cu metoda parametrilor inițiali (ecuația 5.12). Originea sistemului este considerată în secțiunea A, iar parametrii inițiali φ_A și v_A se determină din condițiile:

$$EIv_1 = EIv_A + EI\varphi_A\,\frac{L-x}{2} + p\,\frac{\left(\frac{L-x}{2}\right)^4}{24} = 0 \tag{1}$$

$$EI\varphi_B = EI\varphi_A + p\,\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3}{6} - \frac{pL}{2}\,\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = 0. \tag{2}$$

Se obține:

$$EI\varphi_A = \frac{pLx^2}{16} - \frac{pL^3}{48} \tag{3}$$

$$EIv_A = \frac{pLx^3}{24} - \frac{3pL^2x^2}{64} + \frac{pL^4}{128} \tag{4}$$

$$EIv_B = -\frac{px^4}{384} + \frac{pLx^3}{32} - \frac{pL^2x^2}{64}. \tag{5}$$

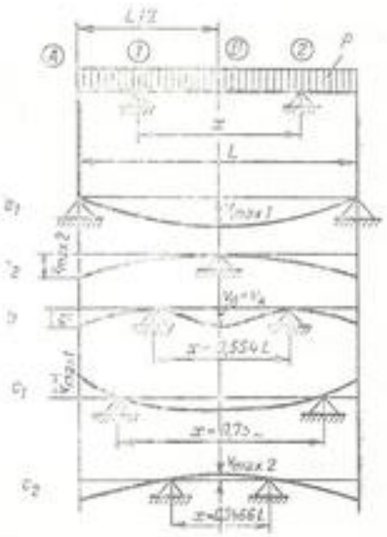


Fig. 5.13

Săgeata în jos este maximă în unul din următoarele cazuri limită:

a_1) reazemele *1* și *2* se află la extremitățile grinzii (Fig. 5.13, a_1; $x = L$):

$$v_{max_1} = v_B = \frac{5pL^4}{384EI}; \tag{6}$$

a_2) reazemele *1* și *2* se suprapun pe mijlocul grinzii (Fig. 5.13, a_2, $x = 0$):

$$v_{max_2} = v_A = \frac{3pL^4}{384\,EI}. \tag{7}$$

Comparînd valorile (6) și (7) rezultă:

$$v_{max} = \frac{5pL^4}{384\,EI},$$

deci condiția este: $x = L$.

b) Săgeata în jos are valoarea minimă dacă este îndeplinită condiția (Fig. 5.13, *b*):

$$v_A = v_B. \tag{8}$$

Înlocuind expresiile (4) și (5) în relația (8) și notînd $\frac{x}{L} = \alpha$, se obține ecuația:

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 0{,}75 = 0 \tag{9}$$

a cărei soluție reală, obținută prin încercări este:

$$\alpha = 0{,}554.$$

Se obține, deci, $x = 0{,}554\ L$.

c) Săgeata în sus maximă se poate realiza fie în secțiunea *A* (Fig. 5.13, c_1), fie în secțiunea *B* (Fig. 5.13, c_2).

c_1) săgeata v_A ca funcție de x are o valoare extremă dacă este îndeplinită condiția:

$$\frac{dv_A}{dx} = \frac{1}{EI}\left(p\frac{Lx^2}{8} - \frac{3pL^2x}{32}\right) = 0. \tag{10}$$

Ecuația are două rădăcini:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0{,}75\ L.$$

Prima rădăcină corespunde cazului a_2 prezentat anterior; a doua rădăcină, înlocuită în expresia (4), dă:

$$v_{max_1} = -\frac{1}{1\,024}\frac{pL^4}{EI} = -9{,}766 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{pL^4}{EI}. \tag{11}$$

c_2) Săgeata v_B ca funcție de x are o valoare extremă dacă este îndeplinită condiția:

$$\frac{dv_B}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{px^3}{96} + \frac{3pLx^2}{32} - \frac{pL^2x}{32}\right) = 0. \tag{12}$$

Ecuația are trei rădăcini:

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 0{,}3466\ L,$$

$$x_3 = 8{,}653\ L.$$

Rădăcina x_3 nu satisface condiția problemei $x \leqslant L$; pentru $x = x_1$ săgeata v_B este nulă și pentru $x = x_2$, săgeata v_B are valoarea:

$$v_{max_2} = -6{,}134 \cdot 10^{-4}\frac{pL^4}{EI}. \tag{13}$$

Comparînd valorile (11) și (13) se constată că săgeata maximă în sus se realizează în secțiunea *A*, pentru $x = 0{,}75\ L$.

5.14. Să se calculeze săgeata și unghiul fibrei medii deformate în punctul *4*, la grinda din figura 5.14.

Rezolvare. Izolînd grinda *2—4*, rezultă reacțiunea:

$$V_2 = P.$$

Asupra grinzii *1—2* va acționa o forță *P*, care va produce o deformație:

$$v_2 = -\frac{Pl^3}{3EI}. \tag{1}$$

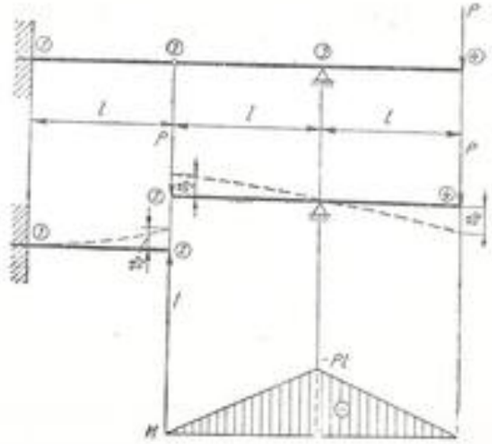


Fig. 5.14

Se aplică ecuațiile (5.3) și (5.4) cu originea în punctul *2* și se notează cu φ_2'', unghiul de deformație în punctul *2*, pe grinda din dreapta articulației.

$$EI\left(\frac{dv}{dx} - \operatorname{tg}\varphi_2''\right) = -\Omega_{2x}, \tag{2}$$

$$EI(v - v_2 - x\operatorname{tg}\varphi_2'') = -S_{x2}. \tag{3}$$

Săgeata în *2* este dată de relația (1). Ecuația (3) devine:

$$EI\left(v + \frac{Pl^3}{3EI} - x\operatorname{tg}\varphi_2''\right) = -S_{x2}. \tag{4}$$

Se aplică ecuația (4) în reazemul *3*, ($x = l$ și $v_3 = 0$):

$$EI\left(\frac{Pl^3}{3EI} - l\operatorname{tg}\varphi_2''\right) = -S_{32} = -\left(-Pl\frac{l}{2}\frac{l}{3}\right),$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2'' = \frac{Pl^3}{6EI}. \tag{5}$$

Înlocuind valoarea (5) în (2) și (4), se obține:

$$EI\left(\frac{dv}{dx} - \frac{Pl^3}{6EI}\right) = -\Omega_{2x}, \tag{6}$$

$$EI\left(v + \frac{Pl^3}{3EI} - x\frac{Pl^2}{6EI}\right) = -S_{x2}. \tag{7}$$

Unghiul și săgeata în capătul grinzii se obțin aplicînd ecuațiile (6) și (7), în *4*, ($x = 2l$):

$$EI\left(\operatorname{tg}\varphi_4 - \frac{Pl^3}{6EI}\right) = -\Omega_{24} = -\left(-Pl\frac{2l}{2}\right) = Pl^2; \quad \operatorname{tg}\varphi_4 = \frac{7Pl^3}{6EI};$$

$$EI\left(v_4 + \frac{Pl^3}{3EI} - 2l\frac{Pl^2}{6EI}\right) = -S_{42} = -\left(-Pl\frac{2l}{2}l\right) = Pl^3; \quad v_4 = \frac{Pl^3}{EI}.$$

Prin metoda parametrilor inițiali:

$$V_1 = -P;\ M_1 = Pl;\ \varphi_1 = 0;\ v_1 = 0;$$

$$EI\varphi = -Plx + P\frac{x^2}{2}\Big|_{12} + EI\alpha_2\Big|_{23} - 2P\frac{(x-2l)^2}{2}\Big|_{34};$$

$$EIv = -Pl\frac{x^2}{2} + P\frac{x^3}{6}\Big|_{12} + EI\alpha_2(x-l)\Big|_{23} - 2P\frac{(x-2l)^3}{6}\Big|_{34}.$$

În aceste relații $\alpha_2 = \varphi_2'' - \varphi_2'$, reprezintă saltul de pantă în punctul *2*; s-a notat cu φ_2' unghiul de deformație în punctul *2*, pe grinda din stînga articulației.

În *3* ($x = 2l$), săgeata este nulă.

$$0 = -Pl\cdot\frac{4l^2}{2} + P\frac{8l^3}{6} + E\alpha_2(2l - l);$$

$$EI\alpha_2 l = 2Pl^3 - \frac{4Pl^3}{3} = \frac{2Pl^3}{3};$$

$$\alpha_2 = \frac{2Pl^2}{3EI}.$$

Pe *1–2*:

$$EI\varphi = -Plx + P\frac{x^2}{2};$$

$$EIv = -Pl\frac{x^2}{2} + P\frac{x^3}{6};$$

$$EI\varphi_2' = -Pl^2 + P\frac{l^2}{2} = -\frac{Pl^2}{2};$$

$$EIv_2 = -P\frac{l^3}{2} + P\frac{l^3}{6} = -\frac{Pl^3}{3};$$

$$\varphi_2' = -\frac{Pl^2}{2EI};\ v_2 = -\frac{Pl^3}{3EI}.$$

Pe *2–3*:

$$EI\varphi = -Plx + P\frac{x^2}{2} + \frac{2Pl^2}{3};$$

$$EIv = -Pl\frac{x^2}{2} + P\frac{x^3}{6} + \frac{2Pl^2}{3}(x - l).$$

Pe *3–4*:

$$EI\varphi = -Plx + P\frac{x^2}{2} + \frac{2Pl^2}{3} - 2P\frac{(x-2l)^2}{2},$$

$$EIv = -Pl\frac{x^2}{2} + P\frac{x^3}{6} + \frac{2Pl^2}{3}(x - l) - 2P\frac{(x-2l)^3}{6}.$$

În *4* ($x = 3l$):

$$EI\varphi_4 = -Pl\cdot 3l + P\frac{9l^2}{2} + \frac{2Pl^2}{3} - Pl^2 = Pl^2\left(-3 + \frac{9}{2} + \frac{2}{3} - 1\right) =$$

$$= \frac{Pl^2}{6}(-18 + 27 + 4 - 6) = \frac{Pl^2}{6}(31 - 24) = \frac{7Pl^2}{6};$$

$$\varphi_4 = \frac{7Pl^2}{6EI};$$

$$EIv_4 = -Pl\frac{9l^2}{2} + P\frac{27l^3}{6} + \frac{2Pl^2}{3}2l - P\frac{l^3}{3} =$$

$$= Pl^3\left(-\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) = Pl^3;$$

$$v_4 = \frac{Pl^3}{EI}.$$

5.15. Pentru grinda cu încărcările și dimensiunile din figura 5.15, se cere să se scrie expresiile deformației unghiulare și săgeții în general și să se calculeze valorile lor la mijlocul deschiderii dintre reazeme.

Rezolvare. Se aplică metoda parametrilor inițiali.

$$V_1 = \frac{11}{4} qa;$$

$$EI\varphi = EI\varphi_0 + q\frac{x^3}{6}\Big|_{31} - \frac{11}{4} qa\frac{(x-a)^2}{2} - q\frac{(x-a)^3}{6}\Big|_{14} + 4qa\frac{(x-2a)^2}{2}\Big|_{42};$$

$$EIv = EIv_0 + EI\varphi_0 x + q\frac{x^4}{24}\Big|_{31} - \frac{11}{4} qa\frac{(x-a)^3}{6} - q\frac{(x-a)^4}{24}\Big|_{14} + 4qa\frac{(x-2a)^3}{6}\Big|_{42}.$$

Constantele φ_0, v_0 se determină prin ecuațiile de condiții la limită: în *1* și *2* săgețile sînt nule:

$$EIv_1 = EIv_0 + EI\varphi_0 a + q\frac{a^4}{24} = 0;$$

$$EIv_2 = EIv_0 + EI\varphi_0 \cdot 3a + q\frac{81}{24}a^4 - \frac{11}{4} qa \cdot \frac{8a^3}{6} - q\frac{16a^4}{24} + 4qa \cdot \frac{a^3}{6} = 0;$$

de unde:

$$EIv_0 + EIa\varphi_0 = -\frac{qa^4}{24};$$

$$EIv_0 + 3EIa\varphi_0 = \frac{7qa^4}{24}.$$

De aici:

$$\varphi_0 = \frac{qa^3}{6EI}; \quad v_0 = -\frac{5qa^4}{24EI},$$

$$EIv_4 = -\frac{5qa^4}{24} + \frac{qa^3}{6}2a + \frac{q16a^4}{24} - \frac{11}{4} qa \cdot \frac{a^3}{6} - \frac{q}{24} \cdot a^4 =$$

$$= \frac{qa^4}{24}(-5 + 8 + 16 - 11 - 1) = \frac{7qa^4}{24},$$

$$v_4 = \frac{7qa^4}{24EI}.$$

5.16. Pentru grinda cu încărcările și dimensiunile din figura 5.16 se cere să se scrie expresiile deformației unghiulare și săgeții în general și să se calculeze valorile lor în *3* și *4*.

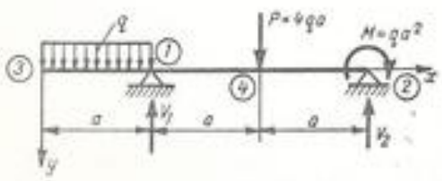


Fig. 5.15

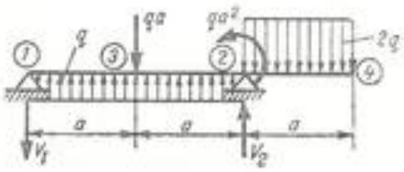


Fig. 5.16

Rezolvare.

$$-V_1 \cdot 2a + q \cdot 2a \cdot a - qa \cdot a - qa^2 + 2qa\frac{a}{2} = 0;$$

$$2V_1 - qa = 0;$$

$$V_1 = \frac{qa}{2}.$$

$$V_2 \cdot 2a - qa \cdot a + q \cdot 2a \cdot a + q \cdot a^2 - 2qa\frac{5a}{2} = 0;$$

$$2V_2 - 3qa = 0;$$

$$V_2 = \frac{3q}{2}a;$$

$$-V_1 + V_2 = qa.$$

Se aplică metoda parametrilor inițiali:
$v_0 = 0$,

$$EI\varphi = EI\varphi_0 + \frac{qa}{2}\frac{x^2}{2} - q\frac{x^3}{6}\Big|_{13} + qa\frac{(x-a)^2}{2}\Big|_{32} + q\frac{(x-2a)^3}{6} + qa^2(x-2a) -$$

$$-\frac{3qa}{2}\frac{(x-2a)^2}{2} + 2q\frac{(x-2a)^3}{6}\Big|_{24},$$

$$EIv = EI\varphi_0 x + \frac{qa}{2}\frac{x^3}{6} - q\frac{x^4}{24}\Big|_{13} + qa\frac{(x-a)^3}{6}\Big|_{32} + q\frac{(x-2a)^4}{24} +$$

$$+ qa^2\frac{(x-2a)^3}{2} - \frac{3qa}{2}\frac{(x-2a)^3}{6} + 2q\frac{(x-2a)^4}{24}\Big|_{24}.$$

Constanta φ_0 se determină prin condiția la limită: $v_2 = 0$;

$$EIv_2 = EI\varphi_0 \cdot 2a + \frac{qa}{2}\frac{8a^3}{6} - q\frac{16a^4}{24} + q\frac{a^4}{6} = 0;$$

$$2EI\varphi_0 + \frac{2qa^3}{3} - \frac{q2a^3}{3} + \frac{qa^3}{6} = 0;$$

$$\varphi_0 = -\frac{qa^3}{12EI};$$

$$EIv_3 = -\frac{qa^4}{12} + \frac{qa}{2}\frac{a^3}{6} - \frac{qa^4}{24} = -\frac{qa^4}{12} + \frac{qa^4}{12} - \frac{qa^4}{24} = -\frac{qa^4}{24}$$

$$v_3 = -\frac{qa^4}{24EI}.$$

5.17. Pentru grinda cu încărcările și dimensiunile din figura 5.17 se cere să se scrie expresia generală a deformației unghiulare și a săgeții și să se calculeze săgeata în punctul *6*.

Rezolvare. Se aplică metoda parametrilor inițiali.

$$V_2 l - 3\,ql\,\frac{3l}{4} + ql \cdot \frac{l}{2} = 0; \quad V_1 = \frac{7ql}{4} = \frac{28ql}{16},$$

$$A_6 l + ql\,\frac{l}{2} - 3ql \cdot \frac{l}{4} = 0; \quad A_6 = \frac{ql}{4},$$

$$V_3 l - \frac{ql}{4} \cdot \frac{5l}{4} - ql \cdot \frac{l}{2} - 2ql\,\frac{l}{4} = 0; \quad V_3 = \frac{21ql}{16},$$

$$V_3 l + \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{4} - ql\,\frac{l}{2} - 2ql\,\frac{3l}{4} = 0; \quad V_3 = \frac{31ql}{16},$$

$$EI\varphi = EI\varphi_1 - \frac{28ql}{16}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{14} + 3ql\,\frac{\left(x - \frac{l}{4}\right)^2}{2}\Big|_{45} -$$

$$- ql\,\frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2}{2}\Big|_{56} + EI\alpha_6\Big|_{62} - \frac{21ql}{16}\,\frac{\left(x - \frac{5l}{4}\right)^2}{2} +$$

$$+ \frac{q\left(x - \frac{5l}{4}\right)^3}{6}\Big|_{27} + 2ql\,\frac{(x - 2l)^2}{2}\Big|_{73}.$$

α_6 reprezintă saltul de pantă în articulația 6.

$$v_1 = 0,$$

$$EIv = EI\varphi_1 x - \frac{7ql}{4}\,\frac{x^3}{6}\Big|_{14} + 3ql\,\frac{\left(x - \frac{l}{4}\right)^3}{6}\Big|_{45} - ql\,\frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^3}{6}\Big|_{56} +$$

$$+ EI\alpha_6(x - l)\Big|_{62} - \frac{21ql}{4}\,\frac{\left(x - \frac{5l}{4}\right)^3}{6} + q\,\frac{\left(x - \frac{5l}{4}\right)^4}{24}\Big|_{27} + 2ql\,\frac{(x - 2l)^3}{6}\Big|_{73}$$

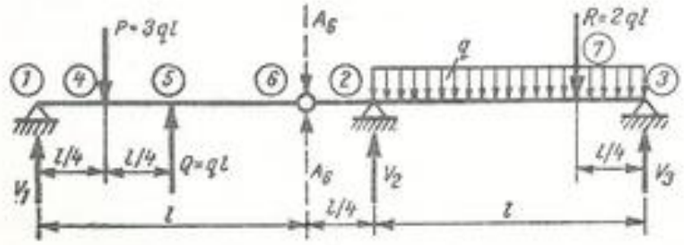


Fig. 5.17

Constantele φ_1 și α_6 se determină scriind că săgețile în *2* și *3* sînt nule, respectiv pentru $x = \frac{5l}{4}$ și $x = \frac{9l}{4}$.

$$EIv_2 = EI\varphi_1\,\frac{5l}{4} - \frac{7q}{4}\,\frac{125l^3}{384} + 3ql\,\frac{l^3}{6} - ql\,\frac{27l^3}{384} + EI\alpha_6\,\frac{l}{4} = 0,$$

$$EIv_3 = EI\varphi_1 \cdot \frac{9l}{4} - \frac{7ql}{4} \cdot \frac{729l^3}{384} + 3ql\,\frac{512l^3}{384} - ql\,\frac{343l^3}{384} +$$

$$+ EI\alpha_6\,\frac{5l}{4} - 21\,\frac{ql}{4}\,\frac{l^3}{6} + q \cdot \frac{l^4}{24} + 2ql \cdot \frac{l^3}{384} = 0.$$

De unde:

$$5EI\varphi_1 + EI\alpha_6 = -\frac{134ql^3}{384},$$

$$9EI\varphi_1 + 5EI\alpha_6 = -\frac{380}{384}\,ql^3.$$

De aici:

$$\varphi_1 = -0{,}047\,\frac{ql^3}{EI}; \quad \alpha_6 = -0{,}114\,\frac{ql^3}{EI}.$$

Săgeata în 6 $(x = l)$:

$$EIv_6 = -0{,}047ql^4 - \frac{7ql}{4} \cdot \frac{l^3}{6} + 3ql\,\frac{\left(\frac{3l}{4}\right)^3}{6} - ql \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6},$$

$$v_6 = 0{,}115\,\frac{ql^4}{EI}.$$

5.18. Să se calculeze săgeata maximă a unei grinzi de lemn, cu secțiunea dreptunghiulară, simplu rezemată la capete, încărcată cu o sarcină uniform repartizată $p = 400$ daN/m, avînd deschiderea $l = 5$ m, dimensionată cu $\sigma_a = 100$ daN/cm².

Rezolvare. Dimensionarea grinzii:

$$W_{nec} = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{pl^2}{8\sigma_a} = \frac{4 \cdot 500^2}{8 \cdot 100} = 1\,250 \text{ cm}^3 = \frac{bh^2}{6}$$

Cu $h/b = 1{,}5$:

$$\frac{b \cdot 2{,}25b^2}{6} = 1\,250; \quad b = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1\,250}{2{,}25}} = 14{,}95 \text{ cm}.$$

Se aleg dimensiunile:

$$b = 15 \text{ cm și } h = 23 \text{ cm}; \quad I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{15 \cdot 23^3}{12} = 15\,200 \text{ cm}^4.$$

Săgeata maximă:

$$f = \frac{5l^4p}{384EI_z} = \frac{5 \cdot 500^4 \cdot 4}{384 \cdot 10^6 \cdot 15\,200} = 2{,}14 \text{ cm}.$$

Față de deschiderea grinzii:

$$f = 2{,}14 \approx \frac{500}{235} \approx \frac{l}{235}.$$

5.19. O grindă simplu rezemată la capete, de lungime $l = 6$ m, formată dintr-un profil I 20, este solicitată la mijloc prin sarcina concentrată P. Să se calculeze:

a) Valoarea sarcinii P, dacă săgeata în dreptul ei este $f = 2$ cm.

b) Să se verifice grinda în acest caz, știind că $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

Rezolvare. a) Săgeata în mijlocul grinzii:

$$f = \frac{Pl^3}{48EI_z}.$$

În *anexa 10* pentru I 20: $I_z = 2\,140$ cm⁴ și $W_z = 214$ cm³:

$$P = \frac{48EI_zf}{l^3} = \frac{48 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 2\,140 \cdot 2}{600^3} \approx 2\,000 \text{ daN}.$$

b) Momentul maxim:

$$M_{max} = \frac{Pl}{4} = \frac{2\,000 \cdot 600}{4} = 3 \cdot 10^5 \text{ daNcm},$$

$$\sigma_{af} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{3 \cdot 10^5}{214} \approx 1\,400 \text{ daN/cm}^2 = \sigma_a.$$

5.20. Ce deschidere l poate avea un profil I 20 încastrat la un capăt și liber la celălalt, astfel încît sub greutatea proprie săgeata la capătul liber să nu depășească 5 mm?

Rezolvare. Valoarea săgeții:

$$f = \frac{pl^4}{8EI}; \quad l^4 = \frac{8EIf}{p}.$$

În *anexa 10* pentru I 20:

$$I_z = 2\,140 \text{ cm}^4; \quad p = 26{,}30 \text{ daN/m} = 0{,}263 \text{ daN/cm},$$

$$l^4 = \frac{8 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 2\,140 \cdot 0{,}5}{0{,}263} = 6{,}82 \cdot 10^{10} \text{cm}^4,$$

$$l = 511 \text{ cm}.$$

5.21. O țeavă de oțel, cu diametrul exterior $D = 60$ mm și cu diametrul interior $d = 51$ mm, este încastrată la un capăt și liberă la celălalt,

și prin ea curge apă. Să se determine lungimea l a țevii, astfel încît să nu se depășească rezistența admisibilă $\sigma_a = 800$ daN/cm² și să se afle săgeata f în capătul liber. Se dă $\gamma_{OL} = 7{,}8$ daN/dm³, $\gamma_{apă} = 1$ daN/dm³.

Rezolvare. Sarcina p, datorită greutății proprii a țevii și a apei din interiorul ei:

$$p = p_1 + p_2,$$

$$p_1 = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot 1 \cdot \gamma_{OL} = \frac{\pi}{4}(6^2 - 5{,}1^2) \cdot \frac{7{,}8}{1\,000} = 6{,}11 \cdot 10^{-2} \text{ daN/cm},$$

$$p_2 = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot 1 \cdot \gamma_{apă} = \frac{\pi}{4} \cdot 5{,}1^2 \cdot \frac{1}{1\,000} = 2{,}04 \cdot 10^{-2} \text{ daN/cm},$$

$$p = p_1 + p_2 = 6{,}11 \cdot 10^{-2} + 2{,}04 \cdot 10^{-2} = 8{,}15 \cdot 10^{-2} \text{ daN/cm},$$

$$W_{af} = \frac{I}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\pi(6^4 - 5{,}1^4)}{32 \cdot 6} = 10{,}13 \text{ cm}^3.$$

Momentul încovoietor maxim:

$$M_i = W_{af}\sigma_a = 10{,}13 \cdot 800 = 8\,104 \text{ daNcm},$$

$$M_i = \frac{pl^2}{2} = \frac{8{,}15 \cdot 10^{-2}l^2}{2} = 4{,}075 \cdot 10^{-2}l^2.$$

Egalînd cele două expresii:

$$M_i = 8\,104 = 4{,}075 \cdot 10^{-2}l^2; \quad l^2 = \frac{8\,104 \cdot 10^2}{4{,}075} = 199\,000 \text{ cm}^2;$$

$$l = 446 \text{ cm}.$$

Săgeata maximă este:

$$f = \frac{pl^4}{8EI}; \quad I = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi(6^4 - 5{,}1^4)}{64} = 30{,}4 \text{ cm}^4,$$

$$f = \frac{8{,}15 \cdot 10^{-2} \cdot 446^4}{8 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 30{,}4} = 6{,}32 \text{ cm}.$$

5.22. Să se dimensioneze o grindă dintr-un profil I, ca în figura 5.22, de lungime $l = 4$ m, încărcată cu o sarcină concentrată $P = 500$ daN, astfel încît săgeata în capătul liber să fie $f = \frac{1}{200}\,l$.

Rezolvare. $f = \frac{l}{200} = \frac{400}{200} = 2$ cm; $f = \frac{Pl^3}{3EI}$;

$$I_z = \frac{Pl^3}{3Ef} = \frac{500 \cdot 400^3}{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 2} = 2\,540 \text{ cm}^4.$$

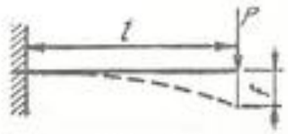


Fig. 5.22

Din *anexa 10* se alege un profil I 22 care are $I_x = 3\,060$ cm⁴ și $W_x = 278$ cm³. Efortul unitar în secțiunea din încastrare este:

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{500 \cdot 400}{278} = 720 \text{ daN/cm}^2.$$

5.23. Să se determine lungimea a a consolei în funcție de deschiderea l, la grinda din figura 5.23, astfel încît săgețile în capete să fie egale cu săgeata la mijlocul grinzii.

Rezolvare. Săgețile în A și C sînt:

$$f_A = \frac{P}{EI}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2 l}{2}\right); \; f_C = -\frac{Pl^2 a}{8EI}.$$

Egalînd cele două valori, fără a ține seamă de semn, rezultă:

$$\frac{P}{EI}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2 l}{2}\right) = \frac{Pl^2 a}{8EI}; \; 8a^3 + 12a^2 l - 3al^2 = 0,$$

$$8a^2 + 12al - 3l^2 = 0.$$

Soluția acceptabilă: $a = 0{,}218\ l$.

5.24. O grindă simplu rezemată la capete, de deschidere $l = 7{,}5$ m, este încărcată la mijloc cu o forță $P = 10$ kN (Fig. 5.24). Dacă se ia rezistența admisibilă $\sigma_a = 1\,200$ daN/cm², să se dimensioneze grinda din profil I și din oțel rotund. Să se scrie apoi raportul săgeților obținute în cele două cazuri.

Rezolvare. Dimensionarea grinzii:

$$W_{nec} = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{P\frac{l}{4}}{\sigma_a} = \frac{1\,000 \cdot 750}{4 \cdot 1\,200} = 156{,}25 \text{ cm}^3.$$

În prima alternativă se alege din *anexa 10* un profil I18, avînd $W_x = 161$ cm³ și $I_{x1} = 1\,450$ cm⁴.

Pentru secțiunea circulară:

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = 156{,}25 \text{ cm}^3;$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 156{,}25}{\pi}} = 11{,}66 \approx 12 \text{ cm};$$

$$I_{x2} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 12^4}{64} = 1\,018 \text{ cm}^4.$$

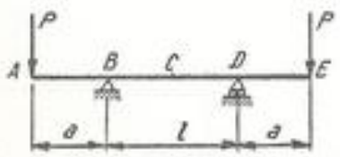


Fig. 5.23

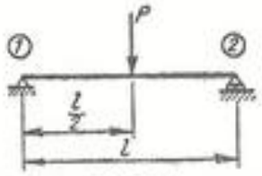


Fig. 5.24

Săgeata:

$$f = \frac{Pl^3}{48EI_x}.$$

Prin trecerea de la o soluție la alta:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{I_{x_1}}{I_{x_2}} = \frac{1\,450}{1\,018} = 1{,}43.$$

Secțiunea circulară dă o săgeată mai mare decît profilul I.

5.25. Să se determine săgeata unei grinzi simplu rezemate, de lungime l, în secțiunea i, atunci cînd în secțiunea k acționează o forță P (Fig. 5.25).

Rezolvare. Prin metoda parametrilor inițiali:

$$V_0 = \frac{Pb_k}{l}; \; V_1 = \frac{Pa_k}{l},$$

$$EI\varphi = EI\varphi_0 - P\frac{b_k}{l}\frac{x^2}{2}\Big|_{0k} + P\frac{(x-a_k)^2}{2}\Big|_{k1};$$

$$EIv = EIv_0 + EI\varphi_0 x - P\frac{b_k}{l}\frac{x^3}{6}\Big|_{0k} + P\frac{(x-a_k)^3}{6}\Big|_{k1};$$

$$v_0 = 0;$$

$$EIv_1 = EI\varphi_0 l - P\frac{b_k}{l}\frac{l^3}{6} + P\frac{b_k^3}{6} = 0;$$

$$\varphi_0 = \frac{Pb_k}{6EIl}(l^2 - b_k^2);$$

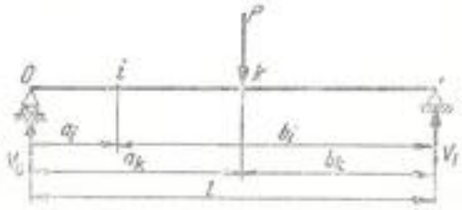
$$EIv = \frac{Pb_k}{6l}(l^2 - b_k^2)\,x - P\frac{b_k}{l}\frac{x^3}{6}\Big|_{0k};$$

$$EIv_i = \frac{Pb_k}{6l}(l^2 - b_k^2)\,a_i - P\frac{b_k}{l}\frac{a_i^3}{6};$$

$$v_i = \frac{Pa_ib_k}{6EIl}[l^2 - a_i^2 - b_k^2].$$

5.26. Să se determine săgeata la mijlocul unei grinzi de lemn, de secțiune 12 × 20 cm², acționată de trei sarcini concentrate, așa cum se arată în figura 5.26. Se va neglija greutatea proprie a grinzii și se va folosi formula

Fig. 5.25



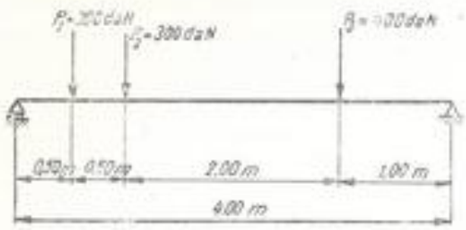


Fig. 5.26

stabilită la problema 5.25, aplicînd principiul suprapunerii efectelor.

P[daN]	b_k[m]	a_i[m]
$P_1 = 300$	0,5	2
$P_2 = 300$	1	2
$P_3 = 400$	1	2

Rezolvare. Mărimile a_i și b_k ce intervin în formula de la problema 5.25 au valorile înscrise în tabelă. Găsim săgeata la mijloc:

$$v = \frac{1}{6 \cdot 100\,000 \cdot 8\,000 \cdot 400}[300 \cdot 50 \cdot 200\,(400^2 - 50^2 - 200^2) + 300 \cdot 100 \cdot 200 \cdot$$

$$\cdot\,(400^2 - 100^2 - 200^2) + 400 \cdot 100 \cdot 200 \cdot (400^2 - 100^2 - 200^2)] \approx 0{,}98\,\text{cm}.$$

5.27. Să se determine săgeata în extremitatea liberă a unei grinzi încastrate atunci cînd într-o secțiune i acționează o sarcină concentrată P. Să se determine apoi săgeata în secțiunea i în ipoteza că sarcina concentrată ar acționa în extremitatea liberă a grinzii (Fig. 5.27).

Rezolvare. Prin metoda parametrilor inițiali.

$$\varphi_1 = 0,\ v_1 = 0,$$

$$V_1 = P,\ M_1 = -Pa_i.$$

$$EI\varphi = Pa_i x - P\frac{x^2}{2}\Big|_{1i} + P\frac{(x-a_i)^2}{2}\Big|_{ik};$$

$$EIv = Pa_i\frac{x^2}{2} - P\frac{x^3}{6}\Big|_{1i} + P\frac{(x-a_i)^3}{6}\Big|_{ik};$$

$$EIv_k = Pa_i\frac{l^2}{2} - P\frac{l^3}{6} + P\frac{(l-a_i)^3}{6} = Pa_i\frac{l^2}{2} - P\frac{l^3}{6} + \frac{P}{6}(l^3 - 3a_il^2 + 3a_i^2l -$$

$$- a_i^3) = \frac{Pa_il^2}{2} - \frac{Pl^3}{6} + \frac{Pl^3}{6} - \frac{Pa_il^2}{2} +$$

$$+ \frac{Pa_i^2l}{2} - \frac{Pa_i^3}{6} = \frac{Pa_i^2}{6}(3l - a_i),$$

$$v_k = \frac{Pa_i^2}{6EI}(3l - a_i).$$

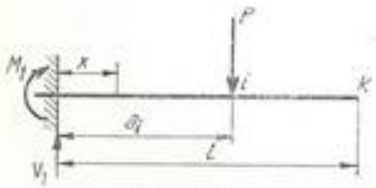


Fig. 5.27

5.28. Folosind rezultatul obținut la problema precedentă, să se determine săgeata în extremitatea liberă a unei grinzi încastrate, acționată de mai multe sarcini concentrate (Fig. 5.28).

Rezolvare. Vom folosi formula:

$$v_k = \frac{Pa_i^2}{6EI}[3l - a_i],$$

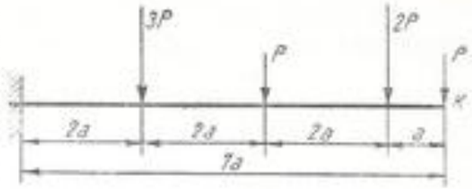


Fig. 5.28

și vom aplica principiul suprapunerii efectelor. Obținem:

$$v_k = \frac{P(7a)^2}{6EI}[3 \cdot 7a - 7a] + \frac{2P(6a)^2}{6EI}[3 \cdot 7a - 6a] +$$

$$+ \frac{P(4a)^2}{6EI} \cdot [3 \cdot 7a - 4a] + \frac{3P(2a)^2}{6EI}[3 \cdot 7a - 2a] = \frac{1\,133Pa^3}{3EI}.$$

5.29. Bara încastrată *1, 2, 3* din figura 5.29 se așază, în timpul deformației, pe un cilindru cu raza ρ. Dacă partea *1—2* este aplicată pe cilindru iar partea *2—3*, de lungime x, este liberă, se cere săgeata în capătul liber *3*, precum și lungimea liberă x.

Aplicație numerică: $E = 10^5$ daN/cm²; $I = 45\,000$ cm⁴; $P = 1\,500$ daN; $l = 2$ m; $\rho = 500$ m.

Rezolvare. Între momentul încovoietor M din secțiunea x și raza ρ a cilindrului trebuie să existe relația (5.2):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{Px}{EI},$$

$$x = \frac{EI}{P\rho}. \qquad (1)$$

Lungimea suprapusă pe cilindru:

$$s = l - x = l - \frac{EI}{P\rho}.$$

Săgeata din punctul 3 se compune din:

— săgeata $v_2 = \rho(1 - \cos\varphi_2)$;

— săgeata datorită rotirii secțiunii *2* cu unghiul φ_2;

— săgeata datorită aplicării forței P pe porțiunea de grindă de lungime x. Deoarece secțiunea *3* s-a rotit față de cea inițială, forța care intră în calcul este proiecția $P\cos\varphi_2$, a forței P pe perpendiculara pe grindă. Săgeata astfel obținută este:

$$v_3' = \frac{x^3P\cos\varphi_2}{3EI}.$$

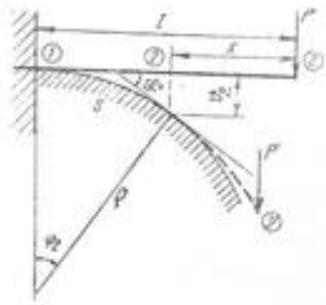


Fig. 5.29

Această săgeată este măsurată *față de secțiunea rotită*; pentru a măsura săgeata față de axele inițiale, ea trebuie proiectată pe verticală:

$$v_3'' = v_3' \cos \varphi_2 = \frac{x^3 P \cos^3 \varphi_2}{3EI}.$$

Săgeata totală în punctul *3* este:

$$v_3 = v_2 + x \sin \varphi_2 + v_3'',$$

$$v_3 = \rho(1 - \cos \varphi_2) + x \sin \varphi_2 + \frac{x^3 P \cos^3 \varphi_2}{3EI}. \qquad (2)$$

Aplicație numerică:

$$x = \frac{EI}{P\rho} = \frac{10^8 \cdot 45\,000}{1\,500 \cdot 50\,000} = 60 \text{ cm}; \quad \rho \sin \varphi_2 = l - x,$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{l - x}{\rho} = \frac{255 - 60}{50\,000} = 0{,}0028.$$

Unghiul φ_2 fiind foarte mic, rezultă:

$$\cos \varphi_2 \approx 1.$$

Săgeata maximă este dată de formula (2):

$$v_3 = \rho(1 - 1) + 60 \cdot 0{,}0028 + \frac{60^3 \cdot 1\,500 \cdot 1^3}{3 \cdot 10^8 \cdot 45\,000} = 0{,}192 \text{ cm}.$$

5.30. O bară de secțiune dreptunghiulară, de lățime și grosime constantă, este așezată pe un plan rigid. O porțiune de lungime a se găsește în consolă. Bara se deformează așa cum se arată în figura 5.30, *a*. Se cere să se determine lungimea l a porțiunii în care nu mai există contact între bară și planul rigid.

Rezolvare. Fibra medie a barei trebuie să aibă în A tangenta orizontală. Bara se comportă ca o grindă cu consolă, rezemată în A și B (Fig. 5.30, *b*) la care se cere îndeplinită această condiție.

Reacțiunea în A este:

$$V_1 = \frac{p(l^2 - a^2)}{2l}.$$

La distanța x de reazemul A, momentul încovoietor este:

$$M_x = \frac{p(l^2 - a^2)}{2l} x - \frac{px^2}{2}.$$

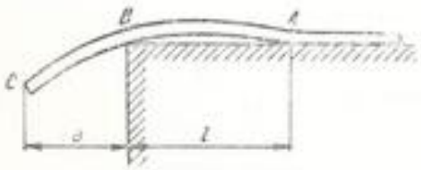


Fig. 5.30, *a*

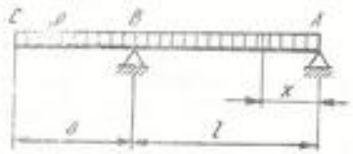


Fig. 5.30, *b*

Ecuația diferențială este:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{p(l^2 - a^2)}{2l} x + \frac{px^2}{2}.$$

Integrînd, se obține:

$$EIv = -\frac{p(l^2 - a^2)}{12l} x^3 + \frac{px^4}{24} + C_1 x + C_2.$$

Punînd condițiile: $v = 0$ pentru $x = 0$ și $x = l$, $v' = 0$ pentru $x = 0$, se obține: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ și:

$$-\frac{p(l^2 - a^2)}{12l} \cdot l^3 + \frac{pl^4}{24} = 0,$$

de unde: $l = a\sqrt{2}$.

5.31. Să se calculeze săgeata în punctul *3* la grinda din figura 5.31, *a*, dacă:

$$\frac{pl}{2} = P.$$

Rezolvare. Se aplică principiul suprapunerii efectelor:

— f', săgeata în *3*, datorită sarcinii P (Fig. 5.31, *c*);

— f'', săgeata în *2*, datorită sarcinii uniform distribuite (Fig. 5.31, *b*);

— f''', săgeata în *3*, provenită din rotirea secțiunii *2* cu unghiul φ_2, în urma aplicării sarcinii uniform distribuite.

$$f' = \frac{Pl^3}{3EI}; \; f'' = \frac{pL^4}{8EI} = \frac{p\left(\frac{l}{2}\right)^4}{8EI} = \frac{pl^4}{128EI},$$

$$\varphi_2 = \frac{pL^3}{6EI} = \frac{p\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6EI} = \frac{pl^3}{48EI}; \; f''' = \varphi_2 \frac{l}{2} = \frac{pl^3}{48EI} \frac{l}{2} = \frac{pl^4}{96EI},$$

$$f_3 = f' + f'' + f''' = \frac{Pl^3}{3\,EI} + \frac{pl^4}{128\,EI} + \frac{pl^4}{96\,EI} = \frac{71\,Pl^3}{192\,EI},$$

unde s-a înlocuit $pl/2 = P$.

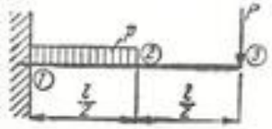


Fig. 5.31, *a*

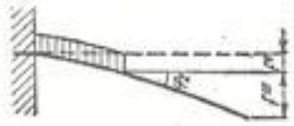


Fig. 5.31, *b*

Fig. 5.31, *c*

5.32. Să se calculeze săgeata maximă la grinda din figura 5.32.

Rezolvare. Săgeata maximă are loc în *4*.

$$V_1 = V_7 = \frac{5P}{2}\ ;\quad M_2 = V_1 a = \frac{5Pa}{2} = M_6\ ;$$

$$M_3 = 2V_1 a - Pa = 4Pa = M_5\ ;$$

$$M_4 = 3V_1 a - 2Pa - Pa = \frac{9Pa}{2}.$$

Pentru calculul săgeţii în *4*, se aplică metoda grafoanalitică.

$$\Omega_{14} = \frac{1}{2} a \cdot 2{,}5\ Pa + a \cdot 2{,}5\ Pa + \frac{1}{2} a \cdot 1{,}5\ Pa + a \cdot 4\ Pa +$$

$$+ \frac{1}{2} a \cdot 0{,}5\ Pa = 8{,}75\ Pa^2.$$

$$S_{41} = 1{,}25\ Pa^2 \cdot 2{,}33\ a + 2{,}5\ Pa^2 \cdot 1{,}5\ a + 0{,}75\ Pa^2 \cdot 1{,}33\ a +$$

$$+ 4\ Pa^2 \cdot 0{,}5\ a + 0{,}25\ Pa^2 \cdot 0{,}33\ a = 9{,}74\ Pa^3.$$

Se folosesc relaţiile:

$$EI\left(\frac{dv}{dx} - \operatorname{tg} \varphi_1\right) = -\Omega_{1x}, \tag{1}$$

$$EI(v - v_1 - x \operatorname{tg} \varphi_1) = -S_{x1}. \tag{2}$$

Pentru a găsi pe φ_1, se aplică prima relaţie în mijlocul grinzii, unde $dv/dx = 0$:

$$EI(-\operatorname{tg} \varphi_1) = -\Omega_{14} = -8{,}75\ Pa^2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{8{,}75 Pa^2}{EI}.$$

Întrucît $v_1 = 0$, se calculează săgeata $f = v_4$, din ecuaţia (2), cu $x = 3a$:

$$EI\left(f - 3a \frac{8{,}75 Pa^2}{EI}\right) = -9{,}74\ Pa^3,$$

$$f = \frac{16{,}51\ Pa^3}{EI}.$$

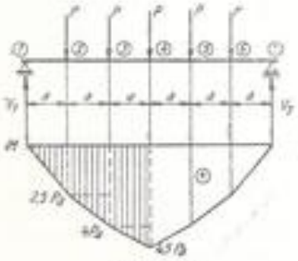


Fig. 5.32

O b s e r v a ţ i e. Problema se poate rezolva şi prin principiul suprapunerii efectelor, cunoscînd că o forţă P, aplicată pe grinda de deschidere l, într-un punct de coordonate $l - b$ şi b, dă în mijlocul grinzii o săgeată:

$$f = \frac{Pb}{12EI}\left(\frac{3}{4} l^2 - b^2\right).$$

Calculînd pe b la fiecare forţă şi însumînd efectele, se ajunge la acelaşi rezultat (v. problema 5.26).

5.33. Grinzile de lemn AC şi ED din figura 5.33, *a* sînt încastrate la cîte un capăt, ca în desen, şi legate între ele cu un bulon BD. Ştiind că grinzile au aceeaşi secţiune, se cere să fie dimensionate, cu secţiune dreptunghiulară, dacă în capătul grinzii AC este aplicată o forţă P. Deformaţia bulonului BD este neglijabilă. Se dă: $l = 2$ m, $P = 36$ kN, $\sigma_a = 100$ daN/cm².

Rezolvare. Problema este static nedeterminată. Dacă se notează cu Q efortul din bulon, cu V_C şi M_C, reacţiunea şi momentul din încastrare al grinzii AC, apar trei necunoscute şi numai două ecuaţii (proiecţii pe verticală şi momente).

Pentru calculul forţei Q trebuie luată în considerare deformaţia ansamblului celor două bare.

Deoarece bulonul BD nu se deformează, trebuie ca săgeata grinzii ED în punctul D să fie egală cu săgeata grinzii AC în punctul B.

$$f_D = \frac{Ql^3}{3EI}. \tag{1}$$

Săgeata în punctul B se poate obţine suprapunînd efectele forţelor P şi Q. Datorită forţei Q:

$$v'_B = -\frac{Q\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} = -\frac{Ql^3}{24EI}.$$

Datorită forţei P:

$$v''_B = \frac{5Pl^3}{48EI}\ ;\quad v_B = v'_B + v''_B = \frac{5Pl^3}{48EI} - \frac{Ql^3}{24EI}. \tag{2}$$

Egalînd relaţiile (1) şi (2), se obţine:

$$\frac{Ql^3}{3EI} = \frac{5Pl^3}{48\,EI} - \frac{Ql^3}{24\,EI}\ ;\quad Q = \frac{5P}{18} = \frac{5 \cdot 3\,600}{18} = 1\,000 \text{ daN}. \tag{3}$$

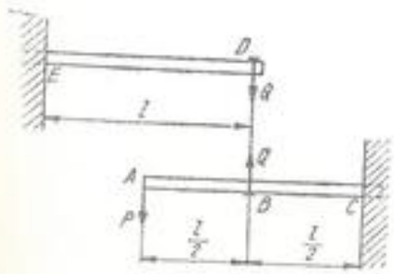


Fig. 5.33, *a*

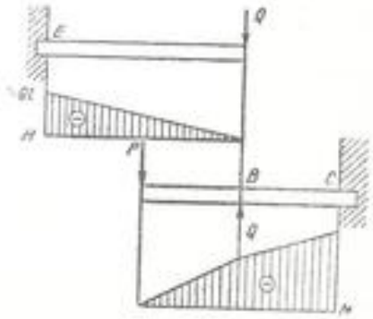


Fig. 5.33, *b*

Diagramele momentelor încovoietoare au forma din figura 5.33, *b*:

$$M_E = -Ql = -1\,000 \cdot 200 = -200\,000 \text{ daNcm},$$

$$M_B = -P\frac{l}{2} = -3\,600 \cdot \frac{200}{2} = -360\,000 \text{ daNcm},$$

$$M_C = -Pl + Q\frac{l}{2} = -3\,600 \cdot 200 + 1\,000 \cdot \frac{200}{2} = -620\,000 \text{ daN cm}$$

Momentul maxim este M_C:

$$W_{nec} = \frac{M_C}{\sigma_a} = \frac{620\,000}{100} = 6\,200 \text{ cm}^3.$$

Luînd $h = 1{,}5\ b$:

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{2{,}25b^3}{6} = 6\,200;\ b = 26 \text{ cm};\ h = 39 \text{ cm}.$$

5.34. Se cere să se calculeze reacţiunea pe reazemul din interior la grinda din figura 5.34, *a*.

Rezolvare. Grinda este static nedeterminată, pentru că numărul reacţiunilor V_0, V_1, V_2 întrece cu o unitate numărul ecuaţiilor de echilibru.

Problema se poate rezolva luînd în considerare modul cum se deformează grinda.

Dacă se suprimă reazemul *1*, grinda devine static determinată. Săgeata luată de grinda static determinată în punctul *1* se poate calcula cu ajutorul ecuaţiei (Fig. 5.34, *b*)

$$v = \frac{pl^4}{24\,EI}\left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right).$$

$$f_1 = \frac{p(l_1 + l_2)^4}{24EI}\left[\frac{l_1}{l_1 + l_2} - \frac{2l_1^3}{(l_1 + l_2)^3} + \frac{l_1^4}{(l_1 + l_2)^4}\right].$$

Această săgeată este anulată de efectul reacţiunii V_1, lucrînd de jos în sus, în reazemul *1*.

Săgeata f_1' dată de forţa V_1, are expresia (Fig. 5.34, *c*):

$$f_1' = \frac{V_1 l_1^3 l_2^3}{3EI\,(l_1 + l_2)}.$$

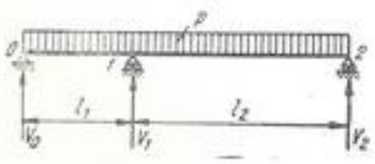


Fig. 5.34, *a*

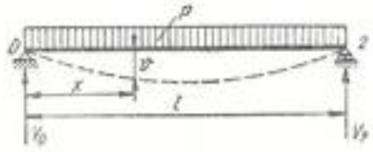


Fig. 5.34, *b*

Egalînd valorile celor două săgeţi, se obţine:

$$\frac{p(l_1 + l_2)^4}{24EI}\left[\frac{l_1}{l_1 + l_2} - 2\frac{l_1^3}{(l_1 + l_2)^3} + \frac{l_1^4}{(l_1 + l_2)^4}\right] = \frac{V_1 l_1^3 l_2^3}{3EI\,(l_1 + l_2)}.$$

Din această ecuaţie rezultă valoarea lui V_1:

$$V_1 = \frac{p(l_1 + l_2)(l_1^3 + 3l_1 l_2 + l_2^3)}{8l_1 l_2},$$

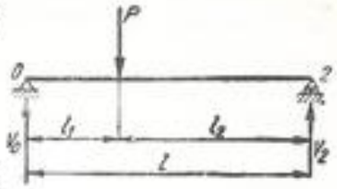


Fig. 5.34, *c*

În cazul particular: $l_1 = l_2 = l$, se obţine:

$$V_1 = \frac{5}{4}pl.$$

5.35. Se dă sistemul de grinzi din figura 5.35 şi se cere să se determine efortul în bara *BD*.

Rezolvare. Fie *X* efortul necunoscut din bara *BD*.

Expresia deplasării pe verticală a punctului *B* este:

$$\delta_B = \frac{(P + X \sin \alpha)l^3}{3EI}.$$

Expresia deplasării pe verticală a punctului *D* este:

$$\delta_D = \frac{(Q - X \sin \alpha)l_1^3}{3EI_1}.$$

Barele *BA* şi *DC* sînt din acelaşi material, dar au momente de inerţie diferite.

Neglijînd scurtarea barei *BD*, se poate admite că cele două deplasări pe verticală sînt egale:

$$\delta_B = \delta_D;\ \frac{(P + X \sin \alpha)l^3}{3EI} = \frac{(Q - X \sin \alpha)l_1^3}{3EI_1},$$

$$X = \frac{\frac{Ql_1^3}{I_1} - \frac{Pl^3}{I}}{\left(\frac{l^3}{I} + \frac{l_1^3}{I_1}\right)\sin \alpha}.$$

Deplasările pe verticală ale punctelor *B* şi *D* au valoarea:

$$\delta_B = \delta_D = \delta = \frac{(P + Q)\frac{Pl_1^3}{II_1}}{3E\left(\frac{l^3}{I} + \frac{l_1^3}{I_1}\right)}.$$

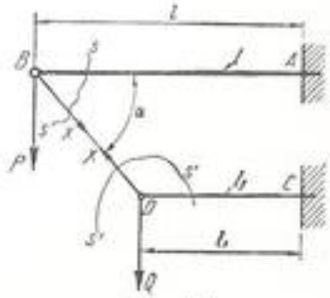


Fig. 5.35

Fig. 5.36, *a*

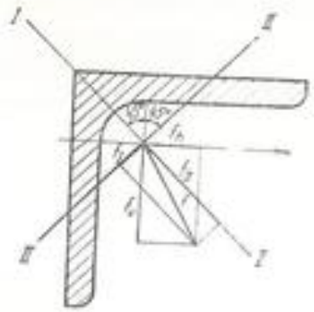


Fig. 5.36, *b*

5.36. Să se determine în mărime și direcție săgeata unei grinzi încastrate la o extremitate și acționată la extremitatea liberă de o sarcină concentrată verticală $P = 200$ daN (Fig. 5.36, *a*), știind că lungimea grinzii este $l = 1{,}50$ m, iar secțiunea transversală, o cornieră $80 \times 80 \times 10$ (Fig. 5.36, *b*).

Rezolvare. Se determină, în prealabil, deplasările extremității libere, pe direcțiile principale ale secțiunii. Corniera, avînd aripi egale, direcțiile principale vor face unghiuri de 45° cu suportul forței. Descompunînd forța P, după aceste direcții, se obțin componentele:

$$P_1 = P_2 = P\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 200 \cdot 0{,}707 = 141{,}4 \text{ daN}.$$

Săgeata unei grinzi încastrate fiind dată de expresia:

$$v = \frac{Pl^3}{3EI},$$

se obține pentru cele două componente f_I și f_{II} ale săgeții (în cazul de față $I_1 = 139$ cm⁴, $I_2 = 35{,}9$ cm⁴):

$$f_I = \frac{141{,}4 \cdot 150^3}{3 \cdot 2\,100\,000 \cdot 139} \approx 0{,}55 \text{ cm},$$

$$f_{II} = \frac{141{,}4 \cdot 150^3}{3 \cdot 2\,100\,000 \cdot 35{,}9} \approx 2{,}11 \text{ cm}.$$

Mărimea săgeții totale va fi:

$$f = \sqrt{0{,}55^2 + 2{,}11^2} \approx 2{,}18 \text{ cm}.$$

Deplasările pe orizontală și pe verticală (Fig. 5.36, *b*):

$$f_h = 2{,}11 \cos 45° - 0{,}55 \sin 45° \approx 1{,}1 \text{ cm},$$

$$f_v = 2{,}11 \sin 45° + 0{,}55 \cos 45° \approx 1{,}88 \text{ cm}.$$

5.37. Panele unui acoperiș se sprijină pe ferme de lemn situate la 4 m distanță una de alta. Pe o pană se sprijină căpriorii la 0,80 m distanță unul de altul (Fig. 5.37, *a*). Căpriorii transmit panei sarcini concentrate $P = 500$ daN. Secțiunea transversală a panei fiind 16×24 cm², iar panta acoperișului fiind de 30° (Fig. 5.37, *b*), se cere să se determine mărimea săgeții maxime a penei.

Rezolvare. Se descompun forțele P după axele principale ale secțiunii:

$$P_1 = P \cos 30° \approx 433 \text{ daN}; \quad P_2 = P \sin 30° = 250 \text{ daN}.$$

Momentele principale de inerție:

$$I_1 = \frac{16 \cdot 24^3}{12} = 18\,432 \text{ cm}^4 \text{ și } I_2 = \frac{24 \cdot 16^3}{12} = 8\,192 \text{ cm}^4.$$

Determinarea componentelor săgeții maxime, pe direcțiile principale, se face folosind formula:

$$v = \frac{Pa_i b_k}{6EI \cdot l}\left[l^2 - a_i^2 - b_k^2\right],$$

stabilită la problema 5.25 și aplicînd principiul suprapunerii efectelor:

$$f_I = 2\left[\frac{433 \cdot 80 \cdot 200}{6 \cdot 18\,432 \cdot 100\,000 \cdot 400}(400^2 - 80^2 - 200^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{433 \cdot 160 \cdot 200}{6 \cdot 18\,432 \cdot 100\,000 \cdot 400}(400^2 - 160^2 - 200^2)\right] = 0{,}946 \text{ cm}.$$

$$f_{II} = 2\left[\frac{250 \cdot 80 \cdot 200}{6 \cdot 8\,192 \cdot 100\,000 \cdot 400}(400^2 - 80^2 - 200^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{250 \cdot 160 \cdot 200}{6 \cdot 8\,192 \cdot 100\,000 \cdot 400}(400^2 - 160^2 - 200^2)\right] = 1{,}230 \text{ cm}.$$

Mărimea săgeții maxime va fi:

$$f_{max} = \sqrt{0{,}946^2 + 1{,}230^2} = 1{,}55 \text{ cm}.$$

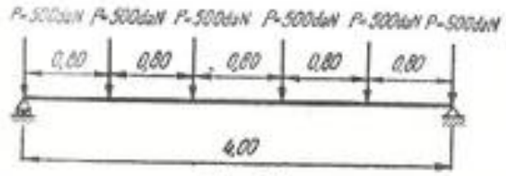


Fig. 5.37, *a*

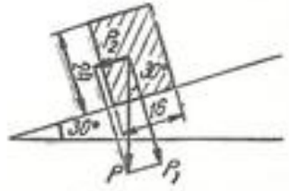


Fig. 5.37, *b*

5.38. Să se calculeze săgeţile în punctele *2* şi *4* şi unghiul de deformaţie din punctul *1*, la grinda din figura 5.38, dacă $I_2 = 2I$, $I_3 = 3I$ şi $I_4 = I$.

Rezolvare. Se aplică relaţia (5.14) de două ori, pe intervalele *1—2—3* şi *2—3—4*, înlocuindu-se în această relaţie, pe rînd, $k = 2$ şi $k = 3$; deoarece nu există sarcină uniform distribuită $p_k = p_{k+1} = 0$.

Intervalul 1—2—3 ($k = 2$)

$$-v_1 l_2 + v_2(l_2 + l_3) - v_3 l_3 = \frac{l_2 l_3}{6E}\left[(M_1 + 2M_2)\lambda_2 + (2M_2 + M_3)\lambda_3\right].$$

Intervalul 2—3—4 ($k = 3$)

$$-v_3 l_4 + v_3(l_3 + l_4) - v_4 l_3 = \frac{l_3 l_4}{6E} \cdot \left[(M_2 + 2M_3)\lambda_3 + (2M_3 + M_4)\lambda_4\right].$$

Efectuînd înlocuirile:

$$v_1 = 0;\ v_3 = 0;\ l_2 = l_3 = l/2;\ l_4 = l/4;\ \lambda_2 = \frac{l_2}{I_2} = \frac{l}{4I},$$

$$\lambda_1 = \frac{l_2}{I_2} = \frac{l}{6I};\ \lambda_4 = \frac{l_4}{I_4} = \frac{l}{4I};\ M_1 = 0;\ M_3 = \frac{3Pl}{8},$$

$$M_2 = -\frac{Pl}{4};\ M_4 = 0,$$

se obţine:

$$v_2\left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\right) = \frac{\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}}{6E}\left[2 \cdot \frac{3Pl}{8} \cdot \frac{l}{4I} + \left(2 \cdot \frac{3Pl}{8} - \frac{Pl}{4}\right)\frac{l}{6I}\right],$$

$$-v_2\frac{l}{4} - v_4\frac{l}{2} = \frac{\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4}}{6E}\left[\left(3\frac{Pl}{8} - 2\frac{Pl}{4}\right)\frac{l}{6I} - 2\frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{4I}\right].$$

Din prima relaţie se obţine: $v_2 = \frac{13\,Pl^3}{1\,152\,EI}$, pe care înlocuind-o în a doua se determină $v_4 = \frac{Pl^3}{2\,304\,EI}$.

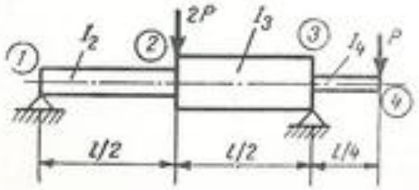


Fig. 5.38

Unghiul de deformaţie în *1* se calculează cu relaţia (5.16), înlocuind $k = 1$ şi $p_{k+1} = 0$:

$$\varphi_1 = \frac{v_2 - v_1}{l_2} + \frac{(M_2 + 2M_1)\lambda_2}{6E}.$$

Se obţine:

$$\varphi_1 = \frac{v_2}{l_2} + \frac{M_2 l}{24\,EI} = \frac{13\,Pl^3}{1\,152\,EI} \cdot \frac{1}{l/2} + \frac{\frac{3Pl}{8}\cdot l}{24\,EI} = \frac{11\,Pl^2}{288\,EI}.$$

5.39. Să se calculeze, pentru grinda din figura 5.39, săgeţile în punctele *2*, *3* şi *4*, ştiind că:

$$I_2 = 2I_3 = 3I_4 = I \text{ şi } pa = P.$$

Rezolvare. Deoarece se cunosc $v_1 = 0$ şi $\varphi_1 = 0$, se aplică relaţia (5.16), cu ajutorul căreia se determină săgeata în punctul *2*. Se va avea în vedere că sarcina p este nulă.

$$v_2 = -\frac{(M_2 + 2M_1)l_2\lambda_2}{6E} = -\frac{(-5\,Pa - 2 \cdot 10\,Pa)a\,\frac{a}{I}}{6E} = \frac{25\,Pa^3}{6EI},$$

unde:

$$M_1 = -2Pa - p\,.\,2a\,.\,2a - P \cdot 4a = -10\,Pa,$$

$$M_2 = -p \cdot 2a \cdot a - P \cdot 3a = -5Pa,$$

$$l_2 = a;\quad \lambda_2 = \frac{l_2}{I_2} = \frac{a}{I}.$$

Săgeţile v_1 şi v_2 fiind acum cunoscute, se aplică de două ori relaţia (5.14) sub forma:

$$v_{k+1} = -v_{k-1}\frac{l_{k+1}}{l_k} + v_k\frac{l_k + l_{k+1}}{l_k} - \frac{l_{k+1}}{6E}\left[(M_{k-1} + 2M_k)\lambda_k + \right.$$

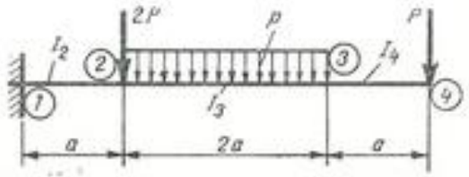
$$\left. + (M_{k+1} + 2M_k)\lambda_{k+1}\right] - \frac{l_{k+1}}{24\,E}(p_{k+1}l_{k+1}^2\lambda_{k+1} + p_k l_k^2\lambda_k). \qquad (1)$$

Pentru determinarea săgeţii în punctul *3* se înlocuieşte $k = 2$ în (1):

$$v_3 = -v_1\frac{l_2}{l_2} + v_2\frac{(l_2 + l_3)}{l_2} - \frac{l_3}{6E}\left[(M_1 + 2M_2)\lambda_2 + (M_3 + 2M_2)\lambda_3\right] -$$

$$-\frac{l_3}{24\,E}\left[p_3 l_3^2\lambda_3 + p_2 l_2^2\lambda_2\right].$$

Fig. 5.39



unde

$$M_2 = -Pa;\ p_2 = 0;\ p_3 = p,\ l_3 = 2a;\ \lambda_3 = \frac{l_3}{I_3} = \frac{2a}{\frac{I}{2}} = \frac{4a}{I},$$

$$v_3 = \frac{25\,Pa^3}{6\,EI}\cdot\frac{3a}{a} - \frac{2a}{6\,E}\left[(-10\,Pa - 2\cdot 5\,Pa)\frac{a}{I} + (-Pa - 2\cdot 5\,Pa)\frac{4a}{I}\right] -$$

$$-\frac{2\,a}{24\,E}\cdot p(2a)^2\cdot\frac{4\,a}{I} = \frac{65\,Pa^3}{2\,EI}.$$

Pentru determinarea săgeții în *4* se înlocuiește $k = 3$ în (1):

$$v_4 = -v_3\frac{l_4}{l_3} + v_3\frac{(l_3 + l_4)}{l_3} - \frac{l_4}{6\,E}\left[(M_3 + 2\,M_2)\lambda_3 + (M_4 + 2\,M_3)\lambda_4\right] -$$

$$-\frac{l_4}{24\,E}\left[p_4 l_4^3\lambda_4 + p_3 l_3^3\lambda_3\right] = -\frac{25\,Pa^3}{6\,EI}\cdot\frac{a}{2a} + \frac{65\,Pa^3}{2\,EI}\,\frac{2a + a}{2a} -$$

$$-\frac{a}{6\,E}\cdot\left[(-5\,Pa - 2\,Pa)\frac{4a}{I} + (-2\,Pa)\frac{3a}{I}\right] - \frac{a}{24\,E}\cdot p(2a)^2\cdot\frac{4a}{I} = \frac{155\,Pa^3}{3\,EI},$$

unde:

$$M_4 = 0;\ p_3 = p;\ p_4 = 0;\ l_4 = a;\ \lambda_4 = \frac{l_4}{I_4} = \frac{3a}{I}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

5.40. Să se calculeze săgeata și unghiul fibrei medii deformate în punctul *3* la grinda din figura 5.40.

Răspuns: $f_3 = \frac{41}{384}\frac{pl^4}{EI};\quad \varphi_3 = \frac{7}{48}\frac{pl^3}{EI}.$

5.41. O grindă încastrată, de lungime l și moment de inerție I (Fig.5.41) este solicitată la extremitatea liberă de o sarcină P și un cuplu M_1. Se cere să se stabilească relația dintre M_1 și P, astfel încît săgeata în capătul liber să fie nulă:

Răspuns: $M_1 = \frac{2}{3}\,Pl.$

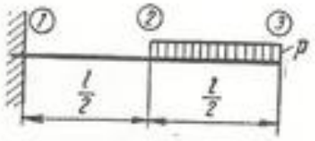


Fig. 5.40

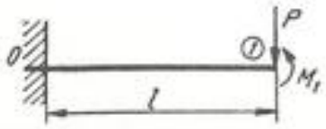


Fig. 5.41

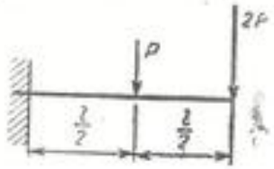


Fig. 5.42

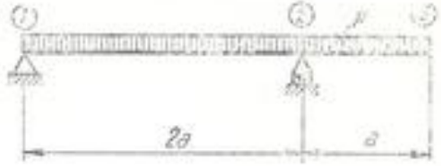


Fig. 5.43

5.42. Să se găsească săgeata în capătul liber al grinzii din figura 5.42 solicitată de forțele concentrate P și $2P$.
Indicație: Se va utiliza metoda grafoanalitică.

Răspuns: $f = \frac{37}{48}\cdot\frac{Pl^3}{EI}.$

5.43. Să se determine săgeata în punctul *3* la grinda din figura 5.43.

Răspuns: $f_3 = \frac{pa^4}{8\,EI}.$

5.44. Să se determine săgeata în punctele *1* și *2* la grinda din figura 5.44.

Răspuns: $f_1 = \frac{P}{EI}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2 l}{2}\right);\quad f_2 = -\frac{Pla}{8\,EI}.$

5.45. Să se calculeze săgeata în mijlocul grinzii din figura 5.45.

Răspuns: $f = 0.$

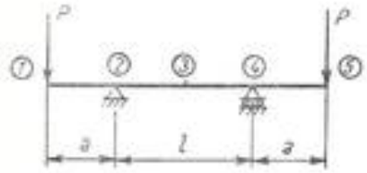


Fig. 5.44

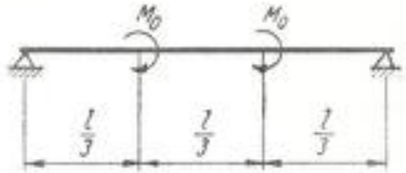


Fig. 5.45

CAPITOLUL 6

RĂSUCIRE

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. Formulele de dimensionare şi verificare — din punctul de vedere al rezistenţei — ale unui arbore de secţiune circulară, supus la răsucire printr-un moment M_t, sînt:

$$W_{p\,nec} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{\pi d^3}{16}, \tag{6.1}$$

$$\tau_{ef} = \frac{M_t}{W_{p\,ef}}, \tag{6.2}$$

$$M_{t\,cap} = W_{p\,ef}\,\tau_a. \tag{6.3}$$

2. Formulele de dimensionare şi verificare — din punctul de vedere al deformaţiei — ale unui arbore de secţiune circulară, supus la răsucire printr-un moment M_t sînt:

$$I_{p\,nec} = \frac{M_t}{G\theta_a}, \tag{6.4}$$

$$\theta_{ef} = \frac{M_t}{GI_p} \leqslant \theta_a, \tag{6.5}$$

unde:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \tag{6.6}$$

este răsucirea specifică, iar θ_a răsucirea specifică admisibilă.

3. În cazul secţiunii inelare, modulul de rezistenţă polar este:

$$W_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}. \tag{6.7}$$

4. Cînd se dă puterea N, în kW, a unui motor şi turaţia sa n în rot/min, momentul de răsucire este:

$$M_t\ \text{daNcm} = 95\,500\,\frac{N\text{kW}}{n_{\text{rot/min}}}. \tag{6.8}$$

5. Deformaţia unui arbore de secţiune circulară, produsă de momentul M_t, măsurată în radiani, este:

$$\Delta\varphi = \frac{M_t l}{GI_p}, \tag{6.9}$$

cu condiţia ca pe lungimea l momentul de răsucire să fie constant.

6. Dacă se ia rezistenţa admisibilă pentru arbori de oţel moale $\tau_a = 280$ daN/cm², diametrul se poate calcula cu relaţia:

$$d = 12\sqrt[3]{\frac{N}{n}}, \tag{6.10}$$

unde N se măsoară în kW, n în rot/min, iar d rezultă în cm.

7. Dacă se impune o deformaţie maximă admisibilă de $\frac{1}{3}$ °/m, diametrul arborelui rezultă din relaţia:

$$d = 12\sqrt[4]{\frac{N}{n}}. \tag{6.11}$$

8. Formula de dimensionare a unui arc elicoidal, cu notaţiile din figura 6. *a*, este:

$$W_{p\,nec} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{PR}{\tau_a}, \tag{6.12}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16PR}{\pi\tau_a}}. \tag{6.13}$$

Pentru τ_a, la oţelul de arcuri, se iau valori de:

$$\tau_a = 4\,000 \ldots 6\,000 \text{ daN/cm}^2.$$

Săgeata arcului elicoidal cu n spire este:

$$f = \frac{64PR^3n}{Gd^4}, \tag{6.14}$$

unde $G = 810\,000$ daN/cm².

9. Dacă se ţine seamă şi de efectul forţei tăietoare, efortul unitar maxim într-un arc elicoidal se stabileşte astfel:

Efortul unitar maxim, datorit răsucirii, este:

$$\tau_1 = \frac{16PR}{\pi d^3}.$$

Efortul unitar maxim, datorit forfecării, este:

$$\tau_2 = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}.$$

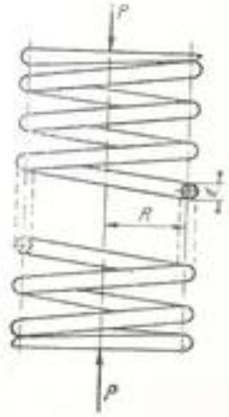


Fig. 6. *a*

Fig. 6. *b*

Efortul unitar maxim total este:

$$\tau_{max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16\,PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4\,R}\right). \qquad (6.15)$$

10. La o bară de secţiune dreptunghiulară (Fig. 6. *b*), efortul unitar maxim şi răsucirea specifică θ se calculează cu formulele lui *Saint-Vénant*:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha\, h b^2}, \qquad (6.16)$$

$$\theta = \frac{M_t}{\beta\, h b^3 G}, \qquad (6.17)$$

Tabela 6.1

$\frac{h}{b}$	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

11. La profilele ∪ sau I, reprezentate schematic în figura 6.*c*, sînt valabile relaţiile:

$$\tau_{max} = \frac{3M_t\delta_1}{2b\delta_1^2 + h_1\delta_1^2}, \qquad (6.18)$$

$$\theta = \frac{M_t}{\frac{1}{3}G(2b\delta_1^3 + h_1\delta_1^3)}. \qquad (6.19)$$

12. La o cornieră cu aripi egale, ca în figura 6.*d*, se poate scrie:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3}\delta^3(2b - \delta)}, \qquad (6.20)$$

Fig. 6. *c*

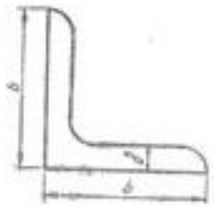


Fig. 6. *d*

$$\theta = \frac{M_t}{\frac{1}{3}G\,\delta^3(2b - \delta)}. \qquad (6.21)$$

13. Pentru alte forme de secţiuni, formulele de calcul sînt trecute în *anexa* 11.

14. La un profil subţire deschis, care poate fi descompus într-o serie de dreptunghiuri avînd grosimea b_i şi înălţimea h_i, efortul unitar maxim şi răsucirea specifică se calculează cu relaţiile:

$$\tau_{max} = \frac{M_t b_{max}}{\frac{1}{2}\Sigma b_i^2 h_i}, \qquad (6.22)$$

$$\theta = \frac{M_t}{\frac{1}{3}G\,\Sigma b_i^3 h_i}. \qquad (6.23)$$

15. În cazul unui profil subţire închis, de grosime δ, efortul unitar maxim şi răsucirea specifică sînt date de relaţiile:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2\,\Omega\,\delta_{min}}, \qquad (6.24)$$

$$\theta = \frac{M_t}{4\,G\,\Omega^2}\oint\frac{ds}{\delta}, \qquad (6.25)$$

unde Ω este aria închisă de linia mediană a profilului. Integrala $\oint\frac{ds}{\delta}$ se efectuează pe întreaga linie mediană s a profilului.

B. PROBLEME REZOLVATE

6.1. Să se traseze diagrama momentelor de răsucire pentru arborele din figura 6.1, *a*.

Rezolvare.

$M_{t01} = 0$; $M_{t12} = 2 \cdot 1 = 2$ daNm; $M_{t23} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -2$daNm;
$M_{t34} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 8$ daNm;
$M_{t45} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 18$ daNm;
$M_{t56} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 - 12 \cdot 1{,}5 = 0$.

6.2. Un arbore de transmisie ca în figura 6.2 are cinci roţi de curea. La prima roată, el primeşte o putere $N_1 = 20$ kW. Prin celelalte patru roţi, arborele acţionează patru maşini care consumă puterile: $N_2 = 5$kW, $N_3 = 8$ kW, $N_4 = 5$ kW, $N_5 = 2$kW. Arborele se roteşte cu $n = 100$ rot/min. Să se traseze diagrama momentelor de răsucire.

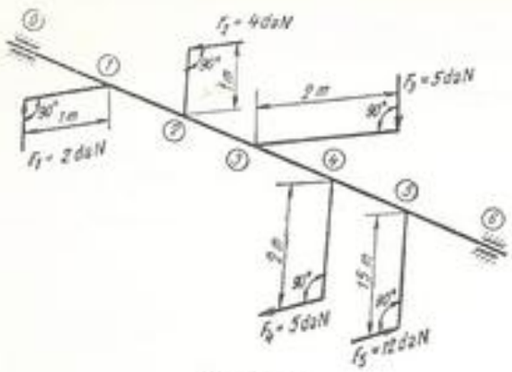


Fig. 6.1, *a*

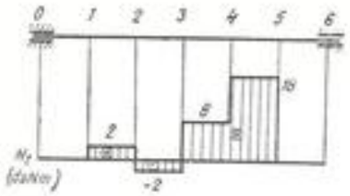


Fig. 6.1, *b*

Rezolvare. Cuplurile pe roţi sînt date de formula (6.8):

$$M_1 = 95\,500\,\frac{20}{100} = 19\,100 \text{ daNcm},$$

$$M_2 = 95\,500\,\frac{5}{100} = 4\,775 \text{ daNcm}; \quad M_3 = 95\,500\,\frac{8}{100} = 7\,640 \text{ daNcm},$$

$$M_4 = 95\,500\,\frac{5}{100} = 4\,775 \text{ daNcm}; \quad M_5 = 95\,550\,\frac{2}{100} = 1\,910 \text{ daNcm}.$$

Momentele de răsucire aplicate arborelui sînt:

$$M_{t01} = 0; \quad M_{t12} = 19\,100 \text{ daNcm};$$
$$M_{t23} = 19\,100 - 4\,775 = 14\,325 \text{ daNcm};$$
$$M_{t34} = 14\,325 - 7\,640 = 6\,685 \text{ daNcm};$$
$$M_{t45} = 6\,685 - 4\,775 = 1\,910 \text{ daNcm};$$
$$M_{t56} = 0.$$

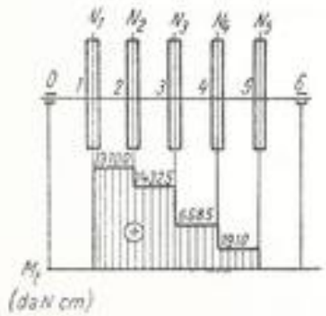


Fig. 6.2

6.3. Să se dimensioneze un arbore cu secţiune circulară, care transmite o putere $N = 75$ kW, sub o turaţie $n = 1\,000$ rot/min, pentru a satisface simultan criteriile de rezistenţă şi rigiditate. Se dau $\tau_a = 300$ daN/cm² şi $\theta_a = 0{,}3°/\text{m}$.

Rezolvare.

a) Criteriul de rezistenţă.

Se aplică formula (6.1):

$$M_t = 95\,500\,\frac{N}{n} = 95\,500 \cdot \frac{75}{1\,000} = 7\,162 \text{ daNcm}.$$

$$W_p = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{7\,162}{300} = 23{,}87 \text{ cm}^3 = \frac{\pi d'^3}{16},$$

$$d' = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 23{,}87}{\pi}} = 4{,}96 \text{ cm. Se alege } d' = 5 \text{ cm}.$$

b) Criteriul de deformaţie.

$$\theta_{af} = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{7\,162 \cdot 32}{8{,}1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 5^4} = 1{,}44 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}. \quad (1)$$

$$\theta_a = 0{,}3°/\text{m} = \frac{\frac{0{,}3 \cdot \frac{\pi}{180}}{100}}{} \text{ rad/cm} = 0{,}0000524 \text{rad/cm} = 5{,}24 \cdot 10^{-5} \text{rad/cm}. \quad (2)$$

Se vede că deformaţia dată de relaţia (1) este mai mare ca deformaţia admisibilă, dată de relaţia (2). Pentru a nu se depăşi această deformaţie, se face dimensionarea pornind de la condiţia de deformaţie, cu ajutorul relaţiei (1). Se aplică formula (6.4):

$$I_p = \frac{M_t}{G\theta_a} = \frac{7\,162}{8{,}1 \cdot 10^5 \cdot 5{,}24 \cdot 10^{-5}} = 169 \text{ cm}^4 = \frac{\pi d''^4}{32},$$

$$d'' = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 169}{\pi}} = 6{,}45 \text{ cm}.$$

Se alege din anexa 2: $d = 65$ mm. Efortul unitar maxim efectiv este:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{7\,162}{\frac{\pi \cdot 6{,}5^3}{16}} = 133 \text{ daN/cm}^2 < \tau_a.$$

6.4. Un motor de 16,5 kW antrenează două maşini ca în figura 6.4, prima consumînd 9,75 kW iar a doua 6,75 kW, turaţia fiind de 600 rot/min.

Să se dimensioneze arborele, din oţel, cu secţiunea circulară, în următoarele variante:

a) $\tau_a = 280$ daN/cm²,

b) $\theta_a = 1/3°/\text{m}$,

c) $\tau_a = 350$ daN/cm².

Rezolvare.

$$M_{t12} = 95\,500\,\frac{N_1}{n} = 95\,500 \cdot \frac{16{,}5}{600} = 2\,630 \text{ daNcm},$$

$$M_{t23} = 95\,500\,\frac{6{,}75}{600} = 1070 \text{ daNcm}.$$

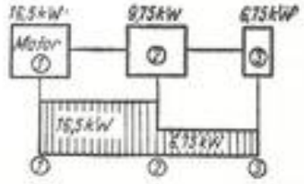


Fig. 6.4

a) Se aplică relaţia simplificată (6.10):

$$d_{12} = 12\sqrt[3]{\frac{N_{12}}{n}} = 12\sqrt[3]{\frac{16,5}{600}} = 3,63 \text{ cm};$$

$$d_{22}' = 12\sqrt[3]{\frac{6,75}{600}} = 2,69 \text{ cm}.$$

b) Se aplică relaţia simplificată (6.11):

$$d_{12} = 12\sqrt[4]{\frac{N_{12}}{n}} = 12\sqrt[4]{\frac{16,5}{600}} = 4,89 \text{ cm};$$

$$d_{22} = 12\sqrt[4]{\frac{6,75}{600}} = 3,91 \text{ cm}.$$

c) Se aplică relaţia generală (6.1):

$$d_{12} = \sqrt[3]{\frac{16M_{t12}}{\pi\tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2\,630}{\pi \cdot 350}} = \sqrt[3]{38,2} = 3,47 \text{ cm};$$

$$d_{22} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1\,070}{\pi \cdot 350}} = \sqrt[3]{15,5} = 2,5 \text{ cm}.$$

6.5. Să se dimensioneze un arbore inelar al unei maşini, cu $N = 2\,250$kW şi $n = 300$ rot/min, luînd $d = 0,8D$, dacă rezistenţa admisibilă este $\tau_a = 400$ daN/cm² şi răsucirea specifică admisibilă $\theta_a = 0,3°/$m. Să se calculeze unghiul de deformaţie al arborelui, ştiind că lungimea sa este $l = 3$ m ($G = 8,1 \cdot 10^5$ daN/cm²).

Rezolvare.

a) Criteriul de rezistenţă.

Se aplică formula de dimensionare (6.1) şi formula (6.4):

$$W_{p\,nec} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{95\,500\,\frac{N}{n}}{\tau_a} = \frac{95\,500\,\frac{2\,250}{300}}{400} = 1\,790 \text{ cm}^3,$$

$$W_p = \frac{\pi(D'^4 - d'^4)}{16D'} = \frac{\pi D'^4(1 - 0,8^4)}{16D'} = \frac{0,59\pi D'^3}{16},$$

$$D' = \sqrt[3]{\frac{1\,790 \cdot 16}{0,59\pi}} = 24,9 \text{ cm}; \; d' = 0,8 \cdot D' = 19,92 \text{ cm}.$$

b) Criteriul de deformaţie:

$$\theta_a = 0,3°/\text{m} = 5,24 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm}.$$

Se aplică formula (6.4):

$$I_{p\,nec} = \frac{M_t}{G\theta_a} = \frac{95\,500\,\frac{2\,250}{300}}{8,1 \cdot 10^5 \cdot 5,24 \cdot 10^{-5}} = 16\,900 \text{ cm}^4 = \frac{\pi(D''^4 - d''^4)}{32} = \frac{\pi D''^4(1 - 0,8^4)}{32},$$

$$D'' = \sqrt[4]{\frac{16\,900 \cdot 32}{\pi \cdot 0,59}} = 23,2 \text{ cm}; \; d'' = 0,8\,D'' = 18,6 \text{ cm}.$$

Se vor lua diametrele rezultate din criteriul de rezistenţă, acestea fiind mai mari:

$$D = 250 \text{ mm}; \; d = 200 \text{ mm}.$$

Pentru calculul unghiului de deformaţie se va aplica formula (6.9):

$$\Delta\varphi = \frac{M_t l}{GI_p} = \frac{95\,500 \cdot \frac{2\,250}{300} \cdot 300}{8,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi}{32}(25^4 - 20^4)} = 0,0117 \text{ rad}.$$

6.6. Îmbinarea a două ţevi solicitate la răsucire se face cu ajutorul unei mufe filetate, ca în figura 6.6. Ţevile au diametrul interior $d_2 = 40$ mm, iar filetul este M 60, avînd diametrul interior $d_1 = 52,8$ mm. Se cere să se calculeze diametrul exterior al mufei, ştiind că efortul unitar maxim produs de momentul de răsucire transmis de ţevi este $\tau_{af} = 600$ daN/cm², iar rezistenţa admisibilă a mufei este $\tau_a = 300$ daN/cm².

Rezolvare. Momentul de răsucire transmis de ţevi este:

$$M_t = \tau_{af} \cdot W_{p\,af} = \tau_{af} \cdot \frac{\pi(d_1^4 - d_2^4)}{16d_1} = 600 \cdot \frac{\pi(5,28^4 - 4^4)}{16 \cdot 5,28} = 11\,550 \text{ daNcm}.$$

Pentru mufă, diametrul interior este aproximativ egal cu diametrul exterior al filetului, $d = 60$ mm. Rezultă:

$$W_{p\,nec} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{11\,550}{300} = 38,5 \text{ cm}^3,$$

$$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = 38,5.$$

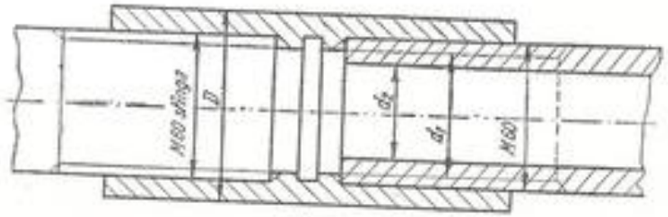


Fig. 6.6

Se obţine ecuaţia de gradul 4:

$$D^4 - 196D - 1\,296 = 0.$$

Rezolvînd prin încercări, se obţine $D = 7{,}2$ cm.
Se face verificarea:

$$W_{p\,ef} = \frac{\pi(7{,}2^4 - 6^4)}{16 \cdot 7{,}2} = 37{,}7 \text{ cm}^3;$$

$$\tau_{ef} = \frac{11\,550}{37{,}7} = 307 \text{ daN/cm}^2 \approx \tau_a.$$

6.7. La mecanismul din figura 6.7, puterea se transmite de la motor la reductor sub o turaţie $n_1 = 2\,000$ rot/min printr-un arbore cu diametrul $d_1 = 95$ mm şi apoi, de la reductor la elice, printr-un arbore inelar cu $D = 130$ mm şi $d = 100$ mm, sub o turaţie $n_2 = \frac{2}{3} n_1$. Se cere valoarea puterii maxime ce se poate transmite la elice, dacă se ia $\tau_a = 400$ daN/cm².

Rezolvare. Pe porţiunea 1—2 se poate transmite momentul (6.3):

$$M_{t12} = W_{p\,ef} \cdot \tau_a = \frac{\pi d_1^3}{16} \tau_a = \frac{\pi \cdot 9{,}5^3}{16} \cdot 400 = 67\,300 \text{ daNcm}$$

şi puterea:

$$N_{12} = \frac{M_{t12} n_{12}}{95\,500} = \frac{67\,300 \cdot 2\,000}{95\,500} = 1\,410 \text{ kW}.$$

Pe porţiunea inelară *2—3* se poate transmite:

$$M_{t\,23} = W_{p\,ef} \cdot \tau_a = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \cdot \tau_a = \frac{\pi(13^4 - 10^4)}{16 \cdot 13} \cdot 400 = 112\,100 \text{ daNcm},$$

$$N_{23} = \frac{M_{t\,23} \cdot n_{23}}{95\,500} = \frac{112\,100 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\,000}{95\,500} = 1\,570 \text{ kW}.$$

Mecanismul poate transmite o putere $N = 1\,410$ kW, adică valoarea cea mai mică dintre cele două puteri calculate.

6.8. Să se dimensioneze arborii de transmisie de la un motor la două maşini consumatoare de energie aşezate ca în figura 6.8, avînd $n = 300$ rot/min şi $\tau_a = 350$ daN/cm². Să se determine apoi raportul lungimilor celor doi arbori, astfel încît răsucirea relativă a extremităţilor să fie nulă.

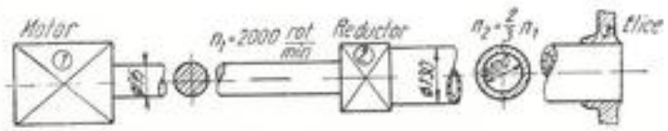


Fig. 6.7

Rezolvare. Momentele de răsucire pe cele două intervale sînt:

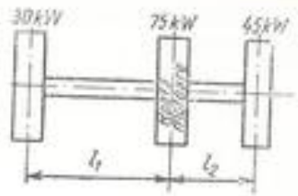


Fig. 6.8

$$M_{t1} = 95\,500 \frac{30}{300} = 9\,550 \text{ daNcm},$$

$$M_{t2} = 95\,500 \frac{45}{300} = 14\,320 \text{ daNcm}.$$

Cu aceste valori se dimensionează cei doi arbori:

$$W_{p1\,nec} = \frac{M_{t1}}{\tau_a} = \frac{9\,550}{350} = 27{,}3 \text{ cm}^3,$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 27{,}3}{\pi}} = 5{,}18 \text{ cm}.$$

Se alege diametrul normalizat $d_1 = 55$ mm.

$$W_{p2\,nec} = \frac{M_{t2}}{\tau_a} = \frac{14\,320}{350} = 40{,}9 \text{ cm}^3,$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 40{,}9}{\pi}} = 5{,}93 \text{ cm}.$$

Se ia diametrul normalizat $d_2 = 60$ mm.
Deformaţiile celor doi arbori sînt:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{M_{t1} l_1}{G I_{p1}}; \quad \Delta\varphi_2 = \frac{M_{t2} l_2}{G I_{p2}}.$$

Pentru ca răsucirea relativă să fie nulă, trebuie ca $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$;

$$\frac{M_{t1} l_1}{G I_{p1}} = \frac{M_{t2} l_2}{G I_{p2}},$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{M_{t2}}{M_{t1}} \cdot \frac{I_{p1}}{I_{p2}}; \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{14\,320}{9\,550} \cdot \frac{\frac{\pi}{32} \cdot 5{,}5^4}{\frac{\pi}{32} \cdot 6^4} = 1{,}06.$$

Practic, cele două porţiuni de arbore pot avea lungimi egale.

6.9. Dacă în secţiunea arborelui unui motor, de diametru $d = 20$ mm, se produce un efort unitar $\tau = 700$ daN/cm², să se calculeze lungimea arborelui, cînd deformaţia unghiulară totală este $\Delta\varphi = 4°$;

Rezolvare. Formulele care dau pe τ şi $\Delta\varphi$ sînt:

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}; \quad \Delta\varphi = \frac{M_t l}{G I_p} = \frac{32 M_t l}{\pi d^4 G}.$$

Împărţind între ele aceste relaţii, se obţine:

$$\frac{\tau}{\Delta\varphi} = \frac{Gd}{2l}; \quad l = \frac{Gd\Delta\varphi}{2\tau}; \quad \Delta\varphi = 4^\circ = \frac{4}{57{,}29} \text{ rad};$$

$$l = \frac{810\,000 \cdot 2 \cdot \frac{4}{57{,}29}}{2 \cdot 700} = 80{,}8 \text{ cm}.$$

6.10. Asupra unui arbore de diametru d şi lungime $l_1 + l_2$ (Fig. 6.10), se aplică un moment de răsucire M pe un volant situat la distanţele l_1 şi l_2 de la capete. Dacă arborele este încastrat la capete, se cere să se determine:

— momentele în reazeme M_1 şi M_2;
— diagrama momentelor de răsucire;
— dimensionarea arborelui, dacă $M = 2\,000$ daNcm; $l_1 = 2$ m; $l_2 = 1$m; $\tau_a = 500$ daN/cm²;
— unghiul maxim de deformaţie.

Rezolvare. Problema este static nedeterminată. Dacă sensul lui M este cel din desen, în încastrări se nasc două momente de sens contrar, M_1 şi M_2. Ecuaţia de momente faţă de axa arborelui este:

$$M - M_1 - M_2 = 0. \qquad (1)$$

Sub efectul momentului M, volantul se va roti cu unghiul de deformaţie al arborelui, în timp ce capetele — încastrate — rămîn pe loc. Se poate scrie că deformaţiile unghiulare pe cele două porţiuni ale arborelui produse de M_1 şi M_2 sînt egale în valoare absolută:

$$\frac{M_1 l_1}{GI_p} = \frac{M_2 l_2}{GI_p},$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Din relaţiile (1) şi (2) se obţine:

$$\frac{M_1}{l_2} = \frac{M_2}{l_1} = \frac{M_1 + M_2}{l_1 + l_2} = \frac{M}{l_1 + l_2},$$

$$M_1 = \frac{Ml_2}{l_1 + l_2} = \frac{2\,000 \cdot 100}{200 + 100} = 667 \text{ daNcm},$$

$$M_2 = \frac{Ml_1}{l_1 + l_2} = \frac{2\,000 \cdot 200}{200 + 100} = 1333 \text{ daNcm}.$$

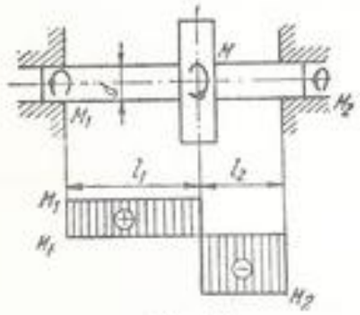


Fig. 6.10

Dimensionarea se face în funcţie de momentul cel mai mare, adică M_2:

$$W_{p\,nec} = \frac{M_2}{\tau_a} = \frac{1\,333}{500} = 2{,}666 \text{ cm}^3 =$$

$$= \frac{\pi d^3}{16}, \quad d = \sqrt[3]{\frac{2{,}666 \cdot 16}{\pi}} = 2{,}38 \text{ cm}.$$

Se ia diametrul normalizat:

$$d = 25 \text{ mm}.$$

Unghiul de deformaţie este acelaşi pe ambele porţiuni ale arborelui:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \frac{M_2 l_2}{GI_p} = \frac{1\,333 \cdot 100}{810\,000 \cdot \frac{\pi \cdot 2{,}5^4}{32}} = 0{,}043 \text{ rad},$$

$$\Delta\varphi = 2{,}46^\circ = 2^\circ 28'.$$

6.11. Dacă asupra arborelui din figura 6.11 se aplică cele două momente din desen, se cere să se construiască diagrama momentelor de răsucire.

Rezolvare. Se aplică, pe rînd, metoda de la problema 6.10, considerînd că lucrează numai cîte unul dintre momente şi folosind apoi principiul suprapunerii efectelor.

Dacă lucrează numai M_1, momentele de răsucire pe cele două intervale sînt:

$$M_{01} = \frac{1\,000 \cdot 60}{80} = 750 \text{ daNcm}; \quad M_{12} = -\frac{1\,000 \cdot 20}{80} = -250 \text{ daNcm}.$$

Cu aceste valori se trasează diagrama *a*. Dacă lucrează numai M_2, momentele de răsucire au valorile:

$$M_{02} = \frac{2\,000 \cdot 20}{80} = 500 \text{ daNcm},$$

$$M_{23} = -\frac{2\,000 \cdot 60}{80} = -1\,500 \text{ daNcm}.$$

Cu aceste valori se trasează diagrama *b*.

Adunînd cele două diagrame, se obţine figura *c*, care este soluţia problemei.

6.12. Un arbore de rază R transmite un moment de răsucire M_t. Ce fracţiune din M_t este preluată de partea centrală a arborelui de rază $r = R/2$ şi ce fracţiune de coroana exterioară?

Rezolvare. Variaţia efortului unitar τ într-o secţiune circulară supusă la răsucire este liniară, ca în figura 6.12, *a*.

Notînd cu τ_1 efortul unitar maxim care apare în partea centrală şi cu τ_2 efortul unitar maxim ce apare în coroană, între ele se poate scrie relaţia:

$$\tau_2 = 2\tau_1. \qquad (1)$$

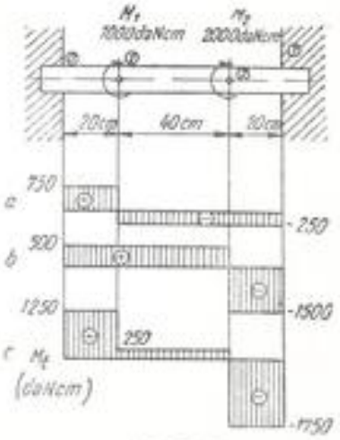


Fig. 6.11

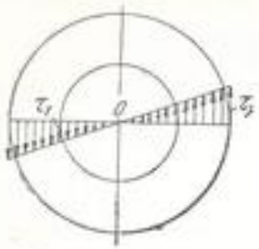


Fig. 6.12, *a*

Fig. 6.12, *b*

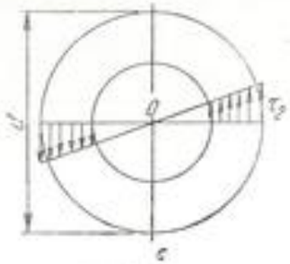


Fig. 6.12, *c*

Momentul de răsucire preluat de partea centrală este (Fig. 6.12, *b*)

$$M_{t1} = W_{p1} \cdot \tau_1 = \frac{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3}{16} \cdot \tau_1 = \frac{\pi d^3}{128}\tau_1. \tag{2}$$

Momentul de răsucire preluat de coroană este (Fig. 6.12, *c*):

$$M_{t2} = W_{p2} \cdot \tau_2 = \frac{\frac{\pi d^4}{32} - \frac{\pi}{32}\left(\frac{d}{2}\right)^4}{\frac{d}{2}}\tau_2 = \frac{15\pi d^3}{256}\tau_2. \tag{3}$$

Împărţind relaţia (3) cu (2) şi ţinînd seamă de relaţia (1), se obţine:

$$\frac{M_{t2}}{M_{t1}} = \frac{\frac{15\pi d^3}{256}}{\frac{\pi d^3}{128}}\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{15}{2} \cdot 2 = 15. \tag{4}$$

Suma momentelor M_{t1} şi M_{t2} trebuie să egaleze pe M_t; deci:

$$M_t = M_{t1} + M_{t2}. \tag{5}$$

Din relaţiile (4) şi (5) se obţine:

$$M_{t1} = \frac{M_t}{16}; \quad M_{t2} = \frac{15M_t}{16}.$$

Se observă că partea exterioară, care reprezintă 3/4 din totalul secţiunii, acumulează 15/16 din momentul de răsucire. Rezultă că o bară cu gaură de diametru $\frac{d}{2}$, care este cu 25% mai uşoară decît cea plină, are practic aceeaşi capacitate de rezistenţă cu bara plină. Prin urmare, barele inelare solicitate la răsucire sînt mai economice decît cele pline.

6.13. Să se dimensioneze un arc elicoidal cu raza $R = 5$ cm, ştiind că este solicitat cu o forţă $P = 100$ daN şi luînd rezistenţa admisibilă $\tau_a = 5\,000$ daN/cm². Să se determine săgeata sub această sarcină dacă arcul are 10 spire. Să se determine efortul unitar tangenţial maxim care se produce în arc. Se va lua $G = 8{,}5 \cdot 10^5$ daN/cm².

Rezolvare. a) După formula (6.12):

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{PR}{\tau_a}; \quad d = \sqrt[3]{\frac{16PR}{\pi\tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 100 \cdot 5}{5\,000 \cdot \pi}} = 0{,}798 \text{ cm}.$$

Se ia:

$$d = 8 \text{ mm}.$$

b) După formula (6.14):

$$f = \frac{64PR^3n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 100 \cdot 5^3 \cdot 10}{850\,000 \cdot 0{,}8^4} = 23 \text{ cm}.$$

c) După formula (6.15):

$$\tau_{max} = \tau_1\left(1 + \frac{d}{4R}\right) = 5\,000\left(1 + \frac{0{,}8}{4 \cdot 5}\right) = 5\,200 \text{ daN/cm}^2.$$

6.14. Se dă un arc elicoidal cu raza $R = 10$ cm şi diametrul firului $d = 2$ cm. Să se calculeze:

a) forţa maximă P_1 pe care o poate suporta arcul, dacă $\tau_a = 5\,000$daN/cm²;

b) sarcina de montaj P_0, astfel încît săgeata în timpul funcţionării, provocată de variaţia sarcinii de la P_0 la P_1, să fie de 10 cm, în ipoteza că numărul spirelor este $n = 5$.

Rezolvare. a) Aplicînd formula (6.12), se găseşte:

$$P_1 = \frac{W_p\tau_a}{R} = \frac{\frac{\pi d^3}{16}\tau_a}{R} = \frac{\pi \cdot 2^3 \cdot 5\,000}{16 \cdot 10} = 785 \text{ daN}.$$

b) Se aplică relaţia (6.14), sub forma:

$$\Delta P = \frac{f \cdot d^4G}{64\,R^3n} = \frac{10 \cdot 2^4 \cdot 850\,000}{64 \cdot 10^3 \cdot 5} = 425 \text{ daN};$$

$$P_0 = P_1 - \Delta P = 785 - 425 = 360 \text{ daN}.$$

6.15. Unui arc elicoidal cu $R = 80$ mm, $d = 16$ mm, $n = 9$ spire, încastrat la ambele capete, i se aplică o sarcină $P = 360$ daN, care îl desparte în două porţiuni, una de şase spire şi alta de trei spire, ca în figura 6.15. Se cere:

a) valoarea reacţiunilor în punctele de încastrare; *b)* deformaţia celor două porţiuni de arc.

Fig. 6.15

Rezolvare. a) Cele două porţiuni ale arcului se vor deforma cu aceeaşi săgeată. Notînd cu f_2 săgeata celor şase spire şi cu f_1 săgeata celor trei spire, condiţia de deformaţie este:

$$|f_1| = |f_2|; \quad f_1 = -\frac{64 n_1 Q_1 R^3}{d^4 G}; \quad f_2 = \frac{64 n_2 Q_2 R^3}{d^4 G};$$

$$\left|\frac{f_1}{f_2}\right| = 1 = \frac{n_1 Q_1}{n_2 Q_2}; \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{1}$$

Ecuaţia de proiecţii pe verticală este:

$$P = Q_1 + Q_2. \tag{2}$$

Rezolvînd sistemul celor două ecuaţii (1) şi (2) cu valorile din problemă se obţine:

$$Q_2 = \frac{P}{3} = \frac{360}{3} = 120 \text{ daN}; \; Q_1 = 2Q_2 = 2 \cdot 120 = 240 \text{ daN}.$$

$$b) \; |f_1| = |f_2| = \frac{64 n_1 Q_1 R^3}{d^4 G} = \frac{64 \cdot 3 \cdot 240 \cdot 8^3}{1{,}6^4 \cdot 850\,000} = 4{,}23 \text{ cm}.$$

6.16. Două arcuri elicoidale, cu aceeaşi lungime liberă şi acelaşi număr de spire, sînt aşezate concentric şi încărcate cu o sarcină totală $P = 200$ daN. Dacă razele de înfăşurare sînt $R_1 = 3$ cm şi $R_2 = 5$ cm şi diametrele firelor $d_1 = 7$ mm şi $d_2 = 10$ mm, se cere să se calculeze partea din sarcina totală P cu care se încarcă fiecare arc, admiţînd că materialul este acelaşi.

Rezolvare. Fie P_1 şi P_2 cele două fracţiuni din forţa P. Se poate scrie relaţia:

$$P = P_1 + P_2. \tag{1}$$

În timpul încărcării, cele două arcuri au aceeaşi săgeată. Aplicînd relaţia (6.14) pe rînd la fiecare arc, se obţine:

$$f = \frac{64 P_1 R_1^3 n}{G d_1^4} = \frac{64 P_2 R_2^3 n}{G d_2^4},$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2^3 d_1^4}{R_1^3 d_2^4}. \tag{2}$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii (1) şi (2), se obţine:

$$P_2 = \frac{P}{1 + \frac{R_2^3 d_1^4}{R_1^3 d_2^4}} = \frac{200}{1 + \frac{5^3}{3^3} \cdot \frac{0{,}7^4}{1^4}} = 94{,}8 \text{ daN},$$

$$P_1 = 200 - 94{,}8 = 105{,}2 \text{ daN}.$$

6.17. O supapă este închisă prin două arcuri concentrice elicoidale, unul exterior cu $R_1 = 30$ mm, $d_1 = 5$ mm, $n_1 = 8$ spire şi lungimea liberă $l_1 = 100$ mm; altul interior cu $R_2 = 20$ mm, $d_2 = 4$ mm, $n_2 = 6$ spire şi

lungimea liberă $l_2 = 90$ mm (Fig. 6.17). Ambele arcuri au în stare montată o lungime $l' = 80$ mm. Supapa fiind acţionată, comprimă ambele arcuri pînă la o înălţime $l'' = 70$ mm. Se cere:

a) forţa cu care sînt comprimate arcurile cînd supapa este închisă;

b) forţa cu care sînt comprimate arcurile cînd supapa este deschisă;

c) efortul unitar maxim care se produce în fiecare arc.

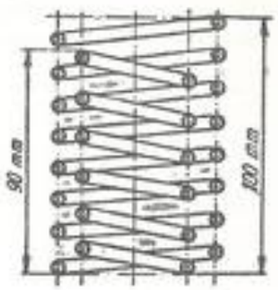


Fig. 6.17

Rezolvare. a) Arcul exterior este comprimat singur pînă cînd ajunge la 90 mm şi deci are o primă săgeată de 10 mm, sub o sarcină iniţială P':

$$f = \frac{64 n_1 P' R_1^3}{d_1^4 G}; \quad P' = \frac{f d_1^4 G}{64 n_1 R_1^3} = \frac{1 \cdot 0{,}5^4 \cdot 850\,000}{64 \cdot 8 \cdot 3^3} = 3{,}85 \text{ daN}.$$

De la lungimea de 90 mm, arcurile sînt comprimate simultan cu 10 mm. Acestei deformaţii $f_1' = f_2' = 1$ cm îi corespund forţele:

$$f_1' = \frac{64 n_1 \Delta P_1 R_1^3}{G d_1^4}; \quad \Delta P_1 = \frac{f_1' d_1^4 G}{64 n_1 R_1^3} = \frac{1 \cdot 0{,}5^4 \cdot 850\,000}{64 \cdot 8 \cdot 3^3} = 3{,}85 \text{ daN},$$

$$f_2' = \frac{64 n_2 \Delta P_2 R_2^3}{G d_2^4}; \quad \Delta P_2 = \frac{f_2' d_2^4 G}{64 n_2 R_2^3} = \frac{1 \cdot 0{,}4^4 \cdot 850\,000}{64 \cdot 6 \cdot 2^3} = 7{,}08 \text{ daN}.$$

Deci, în stare montată cu supapa închisă, forţa totală asupra ambelor arcuri este:

$$P = P' + \Delta P_1 + \Delta P_2 = 3{,}85 + 3{,}85 + 7{,}08 = 14{,}78 \text{ daN}.$$

b) Cînd supapa este deschisă, arcurile se scurtează cu încă 10 mm şi forţele cu care se încarcă fiecare arc vor fi:

$$P_1 = 3 \cdot 3{,}85 = 11{,}55 \text{ daN},$$
$$P_2 = 2 \cdot 7{,}08 = 14{,}16 \text{ daN}.$$

Sarcina totală va fi:

$$P = 11{,}55 + 14{,}16 = 25{,}71 \text{ daN}.$$

c) Verificarea la răsucire la forţele P_1 şi P_2:

$$\tau_{af} = \frac{M_t}{W_{pf}} = \frac{16 P R}{\pi d^3}; \quad \tau_1 = \frac{16 \cdot 11{,}55 \cdot 3}{\pi \cdot 0{,}5^3} = 1\,412 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau_2 = \frac{16 \cdot 14{,}16 \cdot 2}{\pi \cdot 0{,}4^3} = 2\,265 \text{ daN/cm}^2.$$

6.18. Să se verifice efortul unitar τ care se produce într-o bară de secţiune eliptică, de semiaxe $a = 2$ cm, $b = 1$ cm, supusă unui moment de răsucire $M = 1\,600$ daNcm.

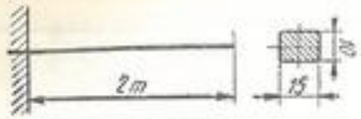


Fig. 6.19

Rezolvare. Din *anexa 11*, poziţia *7*, se găseşte:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha b^3} = \frac{2 \cdot 1\,600}{\pi \cdot 2 \times 1^3} = 510 \text{ daN/cm}^2.$$

6.19. O bară de oţel de secţiune dreptunghiulară 10×15 cm² este încastrată la un capăt ca în figura 6.19. Se cere să se determine efortul unitar maxim cînd bara este supusă unui moment de răsucire $M_t = 1\,000$ daNm.

Rezolvare. Folosind relaţia (6.16), se obţine:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha b^3} = \frac{100\,000}{0{,}231 \cdot 15 \cdot 10^3} = 289 \text{ daN/cm}^2.$$

6.20. Să se compare greutăţile unor bare solicitate printr-un moment de răsucire M_t proiectate în următoarele ipoteze:

a) bară de secţiune circulară;

b) bară cu secţiunea un triunghi echilateral.

Rezolvare.

a) $W_{p\,nec} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{M_t}{\tau_a}$; $d = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi\tau_a}} = \left(\frac{16M_t}{\pi\tau_a}\right)^{1/3}$.

b) În cazul triunghiului echilateral, relaţiile de calcul se găsesc în *anexa 11*, poziţia *11*:

$$W_{d\,nec} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{b^3}{20},$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{20M_t}{\tau_a}} = \left(\frac{20M_t}{\tau_a}\right)^{1/3}.$$

Ariile celor două secţiuni sînt:

$$A_a = \frac{\pi d^2}{4} = \left(\frac{16M_t}{\pi\tau_a}\right)^{2/3} \cdot \frac{\pi}{4},$$

$$A_b = \frac{bh}{2} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{20M_t}{\tau_a}\right)^{2/3}.$$

Raportul greutăţilor va fi egal cu raportul ariilor secţiunilor:

$$\frac{G_a}{G_b} = \frac{A_a}{A_b} = \frac{\frac{\pi}{4}\left(\frac{16M_t}{\pi\tau_a}\right)^{2/3}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{20M_t}{\tau_a}\right)^{2/3}} = 0{,}73.$$

Deci, secţiunea circulară este mai avantajoasă.

6.21. Să se dimensioneze arcul de la problema 6.13 şi să se calculeze săgeata, dacă se face cu secţiune pătrată. Să se compare greutăţile arcurilor în cele două alternative.

Rezolvare. La secţiunea pătrată, în formula (6.16) se înlocuiesc:

$$b = h = a;\ \alpha = 0{,}208;\ \beta = 0{,}141;\ \tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha b^3} = \frac{PR}{0{,}208a^3} = \tau_a,$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{PR}{0{,}208\tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{100 \cdot 5}{0{,}208 \cdot 5\,000}} = 0{,}783 \text{ cm} \approx 0{,}8 \text{ cm}.$$

Notînd secţiunea circulară cu A_1 şi cea pătrată cu A_2 şi comparînd ariile rezultate din calcul, înainte de a le rotunji, se găseşte:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 0{,}798^2}{4} = 0{,}5 \text{ cm}^2;\quad A_2 = 0{,}783^2 = 0{,}613 \text{ cm}^2.$$

Se vede că din punctul de vedere al economiei de material, este de preferat secţiunea circulară. Pentru calculul săgeţii se aplică formula (6.17), în care $h = b = a = 0{,}8$ cm:

$$\theta = \frac{M_t}{\beta a^4 G} = \frac{PR}{\beta a^4 G} = \frac{100 \cdot 5}{0{,}141 \cdot 0{,}8^4 \cdot 850\,000} = \frac{1}{98{,}2}\ \frac{\text{rad}}{\text{cm}}.$$

În funcţie de răsucirea specifică θ, săgeata unui arc este:

$$f = 2\pi n R^2\theta;\quad f = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 5^2}{98{,}2} = 16 \text{ cm}.$$

Se observă că se obţine o săgeată mai mică.

6.22. Să se determine momentul de răsucire pe care îl poate suporta o cornieră $100 \times 100 \times 10$ şi deformaţia la răsucire, dacă lungimea ei este $l = 2$ m, şi dacă se ia $\tau_a = 960$ daN/cm².

Rezolvare. Se folosesc formulele (6.20) şi (6.21):

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3}\delta^2(2b - \delta)} = \tau_a,$$

$$M_t = \frac{1}{3}\delta^2(2b - \delta)\tau_a = \frac{1}{3} \cdot 1^2(2 \cdot 10 - 1) \cdot 960 = 6\,080 \text{ daN cm};$$

$$\Delta\varphi = \frac{M_t l}{\frac{1}{3}G\delta^3(2b - \delta)} = \frac{6\,080 \cdot 200 \cdot 3}{810\,000 \cdot 1^3(2 \cdot 10 - 1)} = 0{,}237 \text{ rad},$$

$$\Delta\varphi = 0{,}237 \cdot 57{,}3 = 13°36'.$$

6.23. Să se calculeze valoarea momentului de răsucire M_t pe care îl poate suporta un profil ⋃ 24 la $\tau_a = 800$ daN/cm² şi, în acest caz, să se determine răsucirea specifică θ.

Rezolvare. Se aplică formulele (6.18) şi (6.19), pentru care, asimilînd profilul cu trei dreptunghiuri, dimensiunile sînt:

$h_1 = 24 - 2 \cdot 1{,}3 = 21{,}4$ cm; $\delta_2 = 1{,}3$ cm; $\delta_1 = 0{,}95$ cm; $b = 8{,}5$ cm.

$$M_t = \frac{\tau_a(2b\delta_2^2 + h_1\delta_1^2)}{3\delta_2} = \frac{800(2 \cdot 8{,}5 \cdot 1{,}3^2 + 21{,}4 \cdot 0{,}95^2)}{3 \cdot 1{,}3} = 11\,400 \text{ daNcm},$$

$$\theta = \frac{M_t}{\frac{1}{3}G(2b\delta_2^3 + h_1\delta_1^3)} = \frac{11\,400}{\frac{1}{3} \cdot 810\,000\,(2 \cdot 8{,}5 \cdot 1{,}3^3 + 21{,}4 \cdot 0{,}95^3)} = 0{,}000762 \text{ rad/cm},$$

$$\theta = 0{,}000762 \text{ rad/cm} = 0{,}0762 \text{ rad/m} = 4{,}36°/\text{m} = 4°22'/\text{m}.$$

6.24. Dacă o grindă de oţel I 20 este încastrată la un capăt, iar la capătul liber se aplică un moment de răsucire M_t, să se calculeze valoarea lui M_t, spre a produce o deformaţie $\Delta\varphi = 5°$, lungimea grinzii fiind $l = 3$ m. În acest caz, să se calculeze efortul unitar τ_{max} care se produce în grindă.

Rezolvare. Din formula (6.19) se poate scrie:

$$\Delta\varphi = \theta l = \frac{M_t l}{\frac{1}{3}G(2b\delta_2^3 + h_1\delta_1^3)},$$

$$M_t = \frac{\Delta\varphi G(2b\delta_2^3 + h_1\delta_1^3)}{3l}.$$

Din *anexa 10*, se găseşte pentru I 20:

$b = 9$ cm; $\delta_1 = 0{,}75$ cm; $\delta_2 = 1{,}13$ cm; $h = 20$ cm; $h_1 = 20 - 2 \cdot 1{,}13 = 17{,}74$ cm.

De notat că în formulele (6.18) şi (6.19), h_1 nu este înălţimea totală a profilului.

$$\Delta\varphi = 5° = \frac{5}{57{,}29578} = 0{,}0872 \text{ rad},$$

$$M_t = \frac{0{,}0872 \cdot 810\,000\,(2 \cdot 9 \cdot 1{,}13^3 + 17{,}74 \cdot 0{,}75^3)}{3 \cdot 300} = 2\,630 \text{ daNcm}.$$

Aplicînd relaţia (6.18), se obţine:

$$\tau_{max} = \frac{3M_t\delta_2}{2b\delta_2^3 + h_1\delta_1^3} = \frac{3 \cdot 2\,630 \cdot 1{,}13}{2 \cdot 9 \cdot 1{,}13^3 + 17{,}74 \cdot 0{,}75^3} = 267 \text{ daN/cm}^2.$$

6.25. O bară de secţiune inelară este supusă unui moment de răsucire, $M_t = 42\,000$ daNcm. Secţiunea are raza medie $r_m = 10$ cm, iar grosimea $\delta = 2$ cm (Fig. 6.25). Se cere să se stabilească eforturile unitare maxime în următoarele ipoteze:

a) bară cu secţiunea inelară continuă;

b) bară cu secţiunea inelară crestată (tăiată după o generatoare).

Rezolvare.

a)
$$\tau'_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{42\,000}{\frac{\pi(22^4 - 18^4)}{16 \cdot 22}} = 36{,}4 \text{ daN/cm}^2.$$

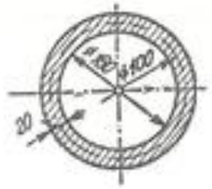


Fig. 6.25

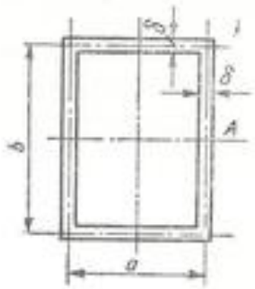


Fig. 6.26

b) În cazul tubului crestat, se găseşte în *anexa 11*, poziţia *4*, relaţia:

$$\tau''_{max} = \frac{M_t}{\frac{(2\pi r\delta)^3}{6\pi r + 1{,}8\delta}} = \frac{42\,000}{\frac{(2\pi \cdot 10 \cdot 2)^3}{6\pi \cdot 10 + 1{,}8 \cdot 2}} = 511 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\frac{\tau''_{max}}{\tau'_{max}} = \frac{511}{36{,}5} = 13{,}95.$$

În concluzie, secţiunea inelară crestată este mult mai dezavantajoasă decît cea necrestată.

6.26. Să se calculeze momentul de răsucire capabil şi unghiul de răsucire $\Delta\varphi$ al unei bare de oţel avînd secţiunea ca în figura 6.26, ştiind că $\tau_a = 800$ daN/cm², $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $\delta = 0{,}2$ cm şi $l = 3$ m, în două ipoteze:

a) secţiunea este închisă;

b) secţiunea este deschisă (crestată) în punctul A.

Rezolvare.

a) Cînd secţiunea este închisă, se obţine din relaţiile (6.24) şi (6.25):

$$M_{t\,cap} = 2\Omega\delta\tau_a = 2 \cdot 35 \cdot 0{,}2 \cdot 800 = 11\,200 \text{ daNcm},$$

$$\Delta\varphi = \frac{M_t l}{4G\Omega^2\delta}\oint ds = \frac{1{,}12 \cdot 10^4 \cdot 300 \cdot 24}{4 \cdot 8{,}1 \cdot 10^5 \cdot 35^2 \cdot 0{,}2} = 0{,}102 \text{ rad}.$$

b) Cînd secţiunea este deschisă (crestată), se aplică relaţiile (6.22) şi (6.23):

$$M_{t\,cap} = \tau_a\frac{\delta^2}{3}\sum h = 800 \cdot \frac{0{,}2^2}{3} \cdot 24 = 256 \text{ daN cm};$$

$$\Delta\varphi = \frac{3M_t l}{G\delta^3\sum h} = \frac{3 \cdot 256 \cdot 300}{8{,}1 \cdot 10^5 \cdot (0{,}2)^3 \cdot 24} = 1{,}48 \text{ rad}.$$

Se vede că în cazul secţiunii cu profil închis momentul capabil şi rigiditatea la răsucire sînt mult mai mari decît în cazul secţiunii cu profil deschis.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

6.27. Să se dimensioneze un arbore cu secţiunea inelară, care transmite o putere $N = 15$ kW, şi are o turaţie $n = 2\,000$ rot/min dacă se dă: $\tau_a = 358$ daN/cm² şi $d = 0{,}8\ D$.

Răspuns: $D = 26$ mm; $d = 20$ mm; $\tau_{cf} = 320$ daN/cm².

6.28. Să se dimensioneze arborele de oţel al unui motor care are o putere de $N = 5$ kW şi o turaţie $n = 1\,500$ rot/min, în două ipoteze:

1) ţinînd seamă de rezistenţa admisibilă $\tau_a = 280$ daN/cm²;
2) ţinînd seamă de deformaţia maximă admisibilă de 1/3°/m.

Răspuns: 1) $d = 1{,}8$ cm; 2) $d = 2{,}9$ cm.

6.29. Să se dimensioneze o bară de oţel avînd secţiunea pătrată, solicitată la răsucire cu un moment $M_t = 10^6$ daN cm, dacă rezistenţa admisibilă este $\tau_a = 1\,200$ daN/cm².

Răspuns: $a = 7{,}4$ cm.

6.30. Să se calculeze raportul dintre lungimea şi diametrul unui arbore de oţel solicitat la răsucire, în care se produce un efort unitar $\tau_{max} = 800$ daN/cm², iar unghiul de răsucire total este $\Delta\varphi = \pi/4$.

Răspuns: $\frac{l}{d} = 396$.

6.31. Asupra arborelui din figura 6.31 încastrat la capete se aplică în punctul B un cuplu de răsucire M, la distanţele a şi $2a$ de cele două capete. Să se traseze diagrama momentelor de răsucire, dacă $d_1 = 2d_2$.

Răspuns: $M_A = \frac{32}{33} M$; $M_C = \frac{1}{33} M$.

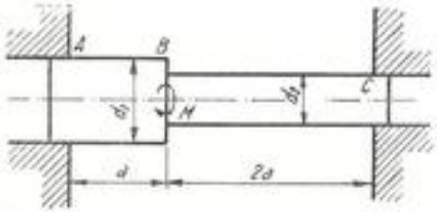


Fig. 6.31

CAPITOLUL 7

TEORIA GENERALĂ A EFORTURILOR UNITARE ŞI A DEFORMAŢIILOR SPECIFICE

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. La o stare liniară de eforturi unitare (bară supusă la întindere sau la compresiune), dacă pe secţiunea normală OB (Fig. 7. a) există un efort unitar σ_x, pe o secţiune înclinată AB se produc eforturile unitare:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha, \qquad \tau = -\frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\alpha. \tag{7.1}$$

Se vede că σ este maxim pe secţiunea normală OB, iar τ este maxim la $\alpha = 45°$.

2. La o stare plană de eforturi unitare, reprezentată în figura 7.b, există eforturile unitare σ_x, σ_y, şi τ_{xy}. Eforturile unitare normale se consideră pozitive, cînd sînt de întindere; eforturile unitare tangenţiale se consideră pozitive, cînd cuplul format de eforturile unitare de pe două feţe opuse tinde să rotească în sensul acelor de ceasornic (Fig. 7.c) şi negative, cînd tinde să rotească în sens contrar (Fig. 7.d).

3. Cunoscînd eforturile unitare σ_x, σ_y şi τ_{xy}, eforturile unitare pe o secţiune înclinată cu unghiul α (considerat pozitiv dacă se măsoară în sensul săgeţii din figura 7.e) sînt:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha, \qquad \tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha. \tag{7.2}$$

Eforturile unitare principale sînt:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

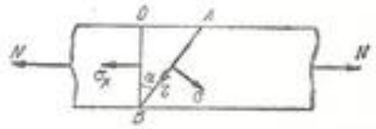


Fig. 7.a

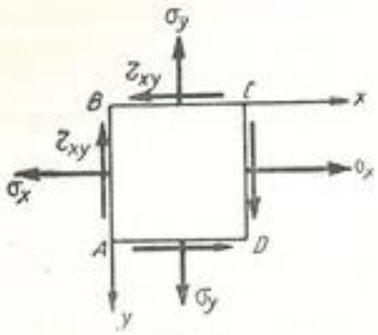


Fig. 7.b

Fig. 7.c

Fig. 7.d

iar eforturile unitare tangenţiale maxime sînt:

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \qquad (7.4)$$

Eforturile unitare σ sînt maxime sau minime pe direcţiile principale, date de:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \qquad (7.5)$$

Direcţiile pe care τ este maxim sau minim sînt înclinate cu 45° faţă de direcţiile principale şi sînt date de relaţia:

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}. \qquad (7.6)$$

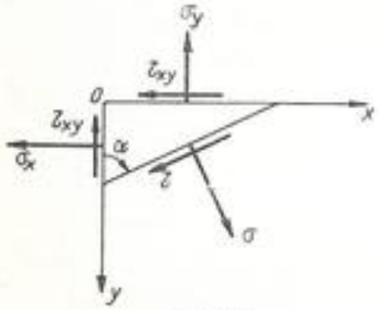


Fig. 7.e

4. Variaţia eforturilor unitare cu înclinarea secţiunii se poate studia şi prin cercul lui *Mohr*, care în coordonate σ, τ are ecuaţia:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \qquad (7.7)$$

sau, în funcţie de σ_x, σ_y, şi τ_{xy}:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2. \qquad (7.8)$$

Cercul lui *Mohr* pentru starea plană de eforturi unitare este reprezentat în figurile 7.*f* şi 7.*g*. Se dă mai departe construcţia cercului lui *Mohr* pentru două cazuri:

a) Cunoscînd σ_1 şi σ_2, centrul cercului se găseşte pe axa σ la distanţa de la origine:

$$\overline{OO_1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

iar raza este $\overline{O_1C_1} = \overline{O_1D} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{max}$. Eforturile unitare pe o secţiune înclinată cu unghiul α faţă de direcţia principală sînt date de coordonatele unui punct de pe cerc a cărui rază face unghiul 2α cu axa σ.

b) Cunoscînd eforturile unitare σ_x, σ_y şi τ_{xy} pentru o stare de tensiune dată, cercul lui *Mohr* se trasează după cum urmează (Fig. 7.*f*): se determină poziţia a două puncte, avînd coordonatele $B(\sigma_x, +\tau_{xy})$ şi $D(\sigma_y, -\tau_{xy})$; dreapta care uneşte punctele B şi D este un diametru şi deoarece centrul cercului se găseşte pe axa σ, rezultă că acest centru se va găsi la intersecţia dreptei BD cu axa σ, în punctul O_1. Raza cercului este $O_1B = O_1D$. Măsurînd pe axa σ distanţele OC_1 şi OC_2, se obţin eforturile unitare principale σ_1 şi σ_2.

Unghiul dintre dreapta BD şi axa σ este 2α. Unghiul se măsoară pornind de la dreapta O_1B spre axa σ. În cazul figurii 7.*f*, sensul (al acelor de ceasornic) este pozitiv. În partea de sus a figurii 7.*f*, a fost izolat un element înclinat cu unghiul α faţă de axa Oy (măsurat în acelaşi sens ca şi 2α), pe care au fost trasate eforturile unitare principale σ_1 şi σ_2 ($\tau_{xy} = 0$).

Dacă perechile de valori sînt $B(\sigma_x, -\tau_{xy})$ şi $D(\sigma_y, +\tau_{xy})$, unghiul 2α este negativ ca în figura 7.*g* (invers acelor de ceasornic). Orientarea elementului corespunzător se găseşte măsurînd un unghi α în acelaşi sens, faţă de axa Oy.

Dacă se cunosc eforturile unitare σ_x, σ_y şi τ_{xy} şi se caută eforturile unitare pe o faţă înclinată cu unghiul α_1 faţă de axa Oy, se trasează cercul lui *Mohr*,

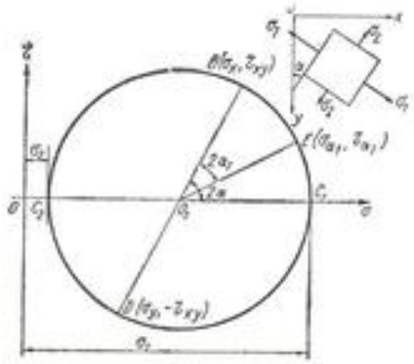


Fig. 7.f

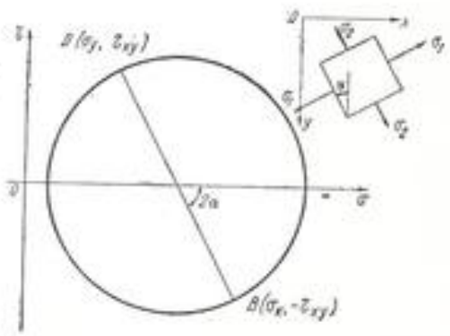


Fig. 7.g

apoi se măsoară pornind de la dreapta O_1B unghiul $2\alpha_1$ (în sensul acelor de ceasornic dacă α_1 este pozitiv). Coordonatele punctului de pe cerc astfel obţinut dau eforturile unitare σ_{α_1} şi τ_{α_1} (Fig. 7.*f*). Aceste eforturi unitare pot fi determinate şi analitic cu relaţiile (7.2).

5. La o stare spaţială de eforturi unitare, reprezentată prin tetraedrul din figura 7.*h*, se consideră cunoscute cele şase componente pe axe ale efortului unitar: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}.

În acest caz, componentele pe axe ale efortului unitar, p, de pe un plan înclinat MNP, vor fi:

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma;\\ p_y &= \tau_{yx}\cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{yz}\cos\gamma;\\ p_z &= \tau_{zx}\cos\alpha + \tau_{zy}\cos\beta + \sigma_z \cos\gamma. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Efortul unitar normal σ pe un plan înclinat MNP este:

$$\sigma = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma + 2\tau_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2\tau_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2\tau_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \tag{7.10}$$

Eforturile unitare principale sînt rădăcinile ecuaţiei:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx}\\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0, \tag{7.11}$$

care, în urma dezvoltării determinantului, devine:

$$-\sigma^3 + p\sigma^2 + q^2\sigma + r^3 = 0, \tag{7.12}$$

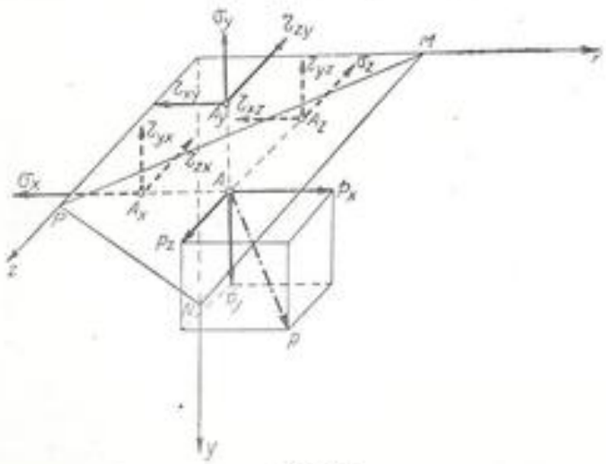


Fig. 7.*h*

în care s-a notat:

$$\begin{aligned} p &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;\\ q^2 &= \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x;\\ r^3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2. \end{aligned} \tag{7.13}$$

6. Starea de deformaţie într-un punct este caracterizată prin alungirile ε_x, ε_y, ε_z şi lunecările specifice γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}.

Între aceste componente şi componentele u, v şi w ale deplasării unui punct din elementul considerat, există relaţiile:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{7.14}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

7. Alungirea ε şi lunecarea specifică γ pe o faţă înclinată în raport cu axele Ox, Oy şi Oz, a cărei normală are cosinusurile directoare $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ au expresiile următoare:

— în cazul stării liniare de eforturi unitare:

$$\varepsilon = \varepsilon_x\cos^2\alpha; \qquad \gamma = -\varepsilon_x \cdot \sin 2\alpha; \tag{7.15}$$

— în cazul stării plane de eforturi unitare:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\alpha; \tag{7.16}$$

$$\gamma = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\alpha + \gamma_{xy} \cdot \cos 2\alpha,$$

iar alungirile principale sînt:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}; \tag{7.17}$$

— în cazul stării spaţiale de eforturi unitare:

$$\varepsilon = \varepsilon_x\cos^2\alpha + \varepsilon_y\cos^2\beta + \varepsilon_z\cos^2\gamma + \gamma_{xy}\cos\alpha\cos\beta + \gamma_{yz}\cos\beta\cos\gamma + \gamma_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \tag{7.18}$$

Alungirile principale sînt rădăcinile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0.$$

8. Deformaţia volumică specifică este:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{7.19}$$

9. În cazul corpurilor omogene, izotrope şi elastice, există următoarele relaţii între deformaţiile specifice şi eforturile unitare:

— în cazul stării liniare de eforturi unitare:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\,; \quad \varepsilon_t = -\mu\frac{\sigma}{E}, \tag{7.20}$$

unde ε şi ε_t sînt deformaţia specifică longitudinală, respectiv transversală, iar μ este coeficientul de contracţie transversală;

— în cazul stării plane de eforturi unitare:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E}\,; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{7.21}$$

sau, în funcţie de eforturile unitare principale:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E}\,; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_1}{E}\,; \tag{7.22}$$

— în cazul stării spaţiale de eforturi unitare:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right), \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_x}{E}\right), \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}\right); \end{aligned}\right\} \tag{7.23}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\,; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}\,; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

sau, în funcţie de eforturile unitare principale:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E}\right), \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_3}{E} + \frac{\sigma_1}{E}\right), \tag{7.24}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E}\right).$$

10. În cazul stării spaţiale de eforturi unitare, pentru corpurile omogene izotrope şi elastice, formulele (7.23) se pot scrie şi sub forma de mai jos, purtînd numele de ecuaţiile lui *Poisson:*

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_v\right]; \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_v\right]; \\ \sigma_3 &= \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_v\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7.25}$$

11. Relaţia între E şi G este:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{7.26}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

7.1. La prisma cu dimensiuni mici a, b, c, din figura 7.1, izolată dintr-o grindă, acţionează în secţiunea haşurată un efort unitar τ. Se cere să se determine eforturile unitare σ' şi τ' în secţiunea înclinată AB.

Rezolvare. În baza principiului dualităţii eforturilor unitare tangenţiale, pe faţa de sus a prismei se produce un efort unitar egal cu τ, astfel încît pentru echilibrul prismei ABC se pot scrie ecuaţiile de proiecţii pe direcţiile σ' şi τ':

$$\sigma' c\sqrt{a^2+b^2} + \tau ac\cos\alpha + \tau bc\sin\alpha = 0,$$

$$\tau' c\sqrt{a^2+b^2} + \tau ac\sin\alpha - \tau bc\cos\alpha = 0,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}\,; \quad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,; \quad \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sigma' c\sqrt{a^2+b^2} + \tau ac\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \tau bc\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0,$$

$$\tau' c\sqrt{a^2+b^2} + \tau ac\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \tau bc\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0, \quad \sigma' = -\frac{2\tau ab}{a^2+b^2}, \quad \tau' = \frac{\tau(b^2-a^2)}{a^2+b^2}.$$

7.2. O bară cu secţiunea $A = 3$ cm² este solicitată la întindere de o forţă $N = 3\,600$ daN. Să se determine secţiunea înclinată faţă de cea normală, în care eforturile unitare σ şi τ sînt egale în modul şi să se calculeze valoarea lor.

Rezolvare. În secţiunea normală, efortul unitar este:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{3\,600}{3} = 2\,100 \text{ daN/cm}^2.$$

Eforturile unitare pe o secţiune înclinată sînt date de relaţiile (7.1):

$$\sigma = \sigma_x\cos^2\alpha\,; \quad \tau = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\alpha = \sigma_x\sin\alpha\cos\alpha.$$

Punînd condiţia $|\sigma| = |\tau|$, se obţine:

$$\sigma_x\cos^2\alpha = \sigma_x\sin\alpha\cos\alpha.$$

Soluţiile ecuaţiei sînt:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ şi } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Pentru $\alpha = 45°$, valoarea efortului unitar este:

$$\sigma = \tau = \sigma_x\cos^2\alpha = 1\,200\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 600 \text{ daN/cm}^2.$$

Pentru $\alpha = 90°$, $\sigma = \tau = 0$.

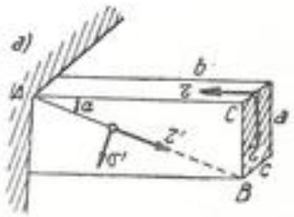


Fig. 7.1

7.3. Pe laturile respectiv perpendiculare ale unei prisme de dimensiuni mici (Fig. 7.3) acţionează eforturile unitare $\sigma_x = 800$ daN/cm² şi $\tau_{xy} = 200$ daN/cm². Să se calculeze valoarea efortului unitar normal şi tangenţial într-o secţiune înclinată cu 45° faţă de cele perpendiculare.

Rezolvare. Se aplică formulele (7.2), unde $\sigma_y = 0$:

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha = \frac{800}{2} + \frac{800}{2}\cos 90° + 200\sin 90° = 600 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau = \frac{-\sigma_x}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha = -\frac{800}{2}\sin 90° + 200\cos 90° = -400 \text{daN/cm}^2.$$

7.4. Să se determine eforturile unitare principale şi eforturile unitare tangenţiale maxime în cazul unei stări plane de eforturi unitare, dacă se cunosc $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 100$ daN/cm².

Rezolvare. Aplicînd formula (7.3), se obţine:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{100 + 100}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(100 - 100)^2 + 4 \cdot 100^2};$$

$$\sigma_1 = 200 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = 0; \quad \tau_{1,2} = \frac{\sigma_1}{2} = \pm 100 \text{ daN/cm}^2.$$

Deoarece $\sigma_2 = 0$, starea de eforturi unitare este liniară; τ_1 apare pe o direcţie, înclinată cu 45° faţă de direcţia lui σ_1.

7.5. Un element de volum, izolat dintr-o piesă (Fig. 7.5). este supus eforturilor unitare σ_x, σ_y şi τ_{xy} · ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$). Se cere:

1. Să se determine eforturile unitare principale şi direcţiile principale, în următoarele cazuri:

a) $\sigma_x = 400$ daN/cm²; $\sigma_y = 300$ daN/cm²; $\tau_{xy} = 300$ daN/cm²,
b) $\sigma_x = -400$ daN/cm²; $\sigma_y = 300$ daN/cm²; $\tau_{xy} = 300$ daN/cm²,
c) $\sigma_x = 400$ daN/cm²; $\sigma_y = -300$ daN/cm²; $\tau_{xy} = 300$ daN/cm².

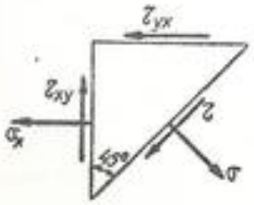


Fig. 7.3

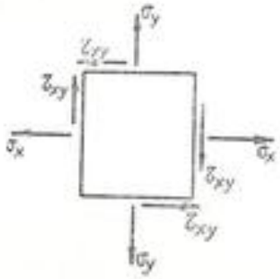


Fig. 7.5

2. Să se determine eforturile unitare tangenţiale maxime şi direcţiile planelor în care sînt conţinute pentru cazul *a*).

Rezolvare. 1) Se aplică formula (7.3):

a) $$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{400 + 300}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{10^4 + 4 \cdot 9 \cdot 10^4},$$

$$\sigma_1 = 655 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = 45 \text{ daN/cm}^2.$$

Pentru determinarea direcţiilor principale se aplică (7.5):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 300}{400 - 300} = 6,$$

$$2\alpha = 80°32'; \quad \alpha_1 = 40°16'; \quad \alpha_2 = 130°16'.$$

b) $$\sigma_{1,2} = -\frac{100}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{49 \cdot 10^4 + 4 \cdot 9 \cdot 10^4},$$

$$\sigma_1 = 411 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = -511 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot 300}{-400 - 300} = -\frac{6}{7}; \quad \alpha_1 = -20°16'; \quad \alpha_2 = 69°44'.$$

c) $$\sigma_{1,2} = \frac{100}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{49 \cdot 10 + 4 \cdot 9 \cdot 10^4},$$

$$\sigma_1 = 511 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = -411 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{6}{7}; \quad \alpha_1 = 20°16' \quad \alpha_2 = 110°16'.$$

2) Eforturile unitare tangenţiale maxime se obţin cu relaţia (7.4):

$$\tau_{1,2} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{1,2} = \pm\frac{655 - 45}{2} = \pm 305 \text{ daN/cm}^2.$$

Direcţiile pe care eforturile unitare tangenţiale sînt maxime sînt date de relaţia (7.6).

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{100}{600} = -\frac{1}{6} = -0{,}166,$$

$$\alpha_1' = -4°44'; \quad \alpha_2' = 85°16'.$$

Se vede că aceste direcţii sînt decalate cu 45° faţă de direcţiile principale.

7.6. Dintr-o bară solicitată la întindere cu o forţă N (Fig. 7.6), se izolează un element de volum, limitat de patru plane, două cîte două perpendiculare, înclinat faţă de axa piesei. Pe laturile acestui element apar efoturile unitare $\sigma_x = 625$ daN/cm², $\sigma_y = 400$ daN/cm² şi τ_{xy}, a cărui valoare nu se cunoaşte. Se cere:

a) valoarea efortului unitar τ_{xy};

b) mărimea forţei de întindere N, dacă secţiunea barei, perpendiculară pe axă, are aria $A = 3{,}14$ cm²;

c) unghiul α pe care îl face secţiunea pe care apare efortul unitar σ_x cu secţiunea normală pe axa barei;

d) valoarea maximă a efortului unitar τ.

Rezolvare. a) Bara fiind solicitată la întindere, rezultă că pe feţele normale pe axă *ab* şi *cd* ale unui element al barei orientat ca în figura 7.6, există numai eforturi unitare σ_1, iar pe feţele *ac* şi *bd*, eforturile unitare σ_2 sînt nule. Acestea fiind chiar eforturile unitare principale, rezultă că în relaţia (7.3):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

trebuie pusă condiţia $\sigma_2 = 0$, pentru a se determina valoarea τ_{xy}:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 0.$$

Se obţine, după efectuarea calculelor: $\tau_{xy} = \sqrt{\sigma_x \sigma_y}$. Înlocuind datele numerice:

$$\tau_{xy} = \sqrt{625 \cdot 400} = 500 \text{ daN/cm}^2.$$

b) Efortul unitar principal σ_1 are valoarea:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{625 + 400}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(625 - 400)^2 + 4 \cdot 500^2} = 1\,025 \text{ daN/cm}^2.$$

Forţa de întindere este $N = \sigma_1 \cdot A = 1\,025 \cdot 3{,}14 = 3\,218$ daN.

c) Unghiul pe care îl face planul pe care se aplică σ_x cu planul normal pe direcţia forţei N este dat de relaţia (7.5):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 500}{625 - 400} = 4{,}445; \quad 2\alpha = 77°18'; \quad \alpha = 38°39'.$$

d) Eforturile unitare tangenţiale maxime se produc în planele înclinate cu 45° faţă de direcţiile principale şi au valoarea (7.4):

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \frac{1\,025}{2} = \pm 512{,}5 \text{ daN/cm}^2.$$

7.7. La prisma de dimensiuni mici din figura 7.7 se produc pe faţa *AB* eforturile unitare σ_x şi τ_{xy}. Să se stabilească ce relaţie trebuie să existe între σ_x şi τ_{xy} pentru ca efortul unitar τ de pe faţa înclinată *AC* să fie egal cu efortul unitar τ_{xy} de pe faţa *BC*.

Aplicaţie numerică: $\alpha = 45°$.

Rezolvare. În baza principiului dualităţii eforturilor unitare tangenţiale, pe faţa *BC* apare efortul unitar τ_{yx} egal în modul cu τ_{xy} avînd sensul arătat în figura 7.7.

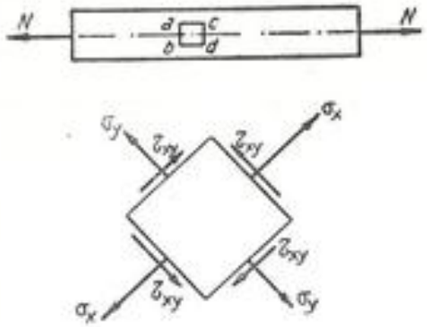


Fig. 7.6

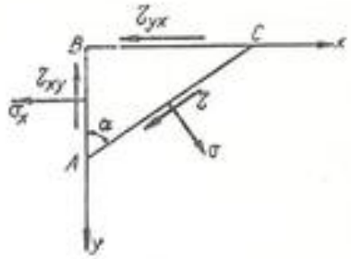


Fig. 7.7

Efortul unitar τ pe o secţiune oarecare este dat de relaţia (7.2). Se obţine efortul unitar tangenţial pe faţa *AC*:

$$\tau_{AC} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha = -\sigma_x \sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha.$$

Prin enunţul problemei, $\tau_{AC} = \tau_{yx} = \tau_{xy}$;

$$-\tau_{xy} = -\sigma_x \sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha.$$

Înlocuind pe $\cos 2\alpha$, se obţine relaţia care trebuie să existe între σ_x şi τ_{xy} în condiţiile problemei:

$$\frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} = 2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

În cazul aplicaţiei numerice:

$$\frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} = 2 \operatorname{ctg} 45° = 2; \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_x}{2}.$$

7.8. Să se construiască cercul lui *Mohr* pentru un element solicitat ca în figura 7.8, *a* în următoarele cazuri:

1) $\sigma_1 = \sigma_2 = 800$ daN/cm²;

2) $\sigma_1 = \sigma_2 = -800$ daN/cm².

Rezolvare. Ecuaţia cercului lui *Mohr* la starea plană de eforturi unitare este (7.7.):

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2.$$

În primul caz:

$$(\sigma - 800)^2 + \tau^2 = 0.$$

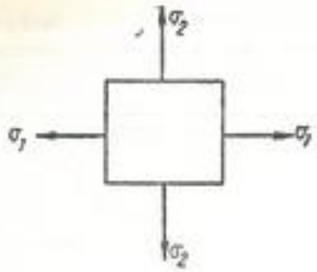


Fig. 7.8, *a*

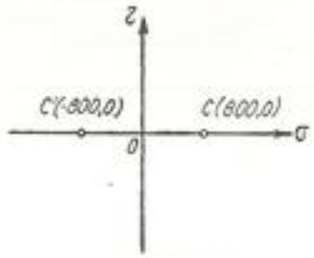


Fig. 7.8, *b*

Cercul lui *Mohr* se reduce la un punct $C(800,0)$, reprezentat pe figura 7.8,*b*. În al doilea caz:

$$(\sigma + 800)^2 + \tau^2 = 0.$$

Cercul lui *Mohr* se reduce, de asemenea, la un punct $C'(-800,0)$ (Fig.7.8,*b*).

7.9. Un element de volum izolat dintr-un corp este supus la următoarele eforturi unitare (Fig. 7.9, *a*):

$$\sigma_x = 500 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_y = -300 \text{ daN/cm}^2; \quad \tau_{xy} = 400 \text{ daN/cm}^2.$$

Se cere: 1) Să se construiască cercul lui *Mohr*;

2) Să se determine cu ajutorul acestui cerc eforturile unitare principale şi direcţiile principale; să se izoleze un element de volum avînd feţele paralele cu direcţiile principale şi să se reprezinte eforturile unitare care acţionează pe aceste feţe;

3) Să se determine eforturile unitare care apar pe feţele unui element înclinat faţă de sistemul de axe *Oxy* cu un unghi $\alpha_1 = +40°$;

4) Să se determine eforturile unitare ce apar asupra unui element orientat după direcţiile pe care eforturile unitare tangenţiale sînt maxime.

Rezolvare. 1) Se procedează cum s-a arătat la pct. 4 din *Definiţii şi formule*. Punctele B şi D sînt date de valorile:

$$B(500,\ 400), \quad D(-300,\ -400)$$

Se trasează cercul din figura 7.9, *b*.

2) Eforturile unitare principale sînt:

$$\sigma_1 = \overline{OC_1} = 660 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = \overline{OC_2} = -460 \text{ daN/cm}^2.$$

Direcţiile principale sînt date de unghiul $2\alpha = 45°$, $\alpha = 22°30'$. În figura 7.9, *c* s-a măsurat unghiul $\alpha = 22°30'$ faţă de axa *Oy*, deoarece elementul $A_1B_1C_1D_1$ este orientat cu laturile paralele cu direcţiile principale.

3) Pentru a se determina eforturile unitare ce apar pe faţa A_2B_2 (Fig.7.9,*d*), înclinată faţă de AB cu $\alpha_1 = +40°$, se măsoară pe cercul lui *Mohr*, pornind

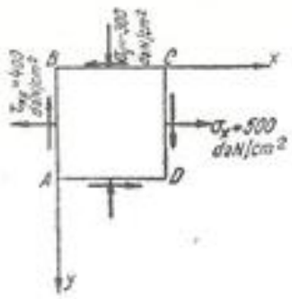


Fig. 7.9, *a*

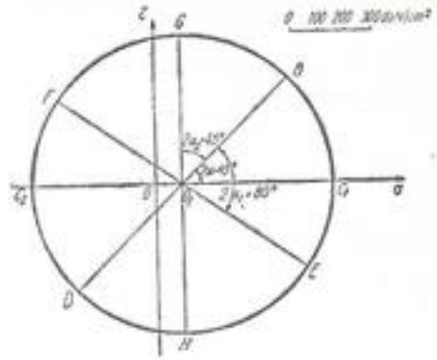


Fig. 7.9, *b*

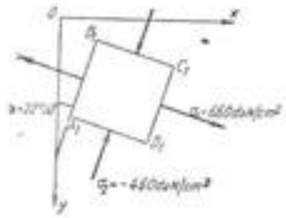


Fig. 7.9, *c*

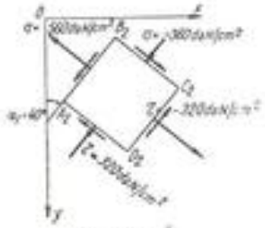


Fig. 7.9, *d*

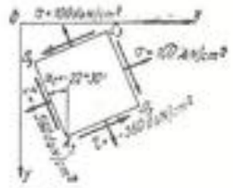


Fig. 7.9, *e*

de la dreapta O_1B, un unghi $2\alpha_1 = 80°$. Se obţine punctul $E(560,\ -320)$. Eforturile unitare pe faţa perpendiculară se obţin în punctul diametral opus $F(-360,\ 320)$.

4) Eforturile unitare tangenţiale maxime apar pe cercul lui *Mohr* în punctele $G(100,\ 560)$ şi $H(100,\ -560)$. (Dreapta GH este perpendiculară pe axa σ.) Unghiul pe care îl face faţa A_2B_2 (Fig. 7.9, *e*) cu direcţia *Oy* este $\alpha_2 = -22°30'$.

7.10. Eforturile unitare într-un punct oarecare al unui corp sînt produse de două solicitări. Fiecare dintre ele produce o stare de forfecare pură, eforturile unitare τ fiind egale în valoarea numerică. Una dintre stările de solicitare se exercită ca în figura 7.10, *a* asupra unui element înclinat cu 30° faţă de axa *Oy*, iar cealaltă asupra unui element orientat ca în figura 7.10,*b* (unghi egal, dar de sens contrar). Pentru a compune cele două stări de eforturi

unitare din punctul dat, este necesar să se determine eforturile unitare produse de acestea asupra unui element de volum de orientare dată. Se cere:

a) Să se determine eforturile unitare rezultante pe un element dirijat după sistemul de axe Oxy.

b) Să se determine eforturile unitare principale.

Rezolvare. Faţă de sistemul de axe $N_1x_1y_1$ (Fig. 7.10, *a*) legat de elementul $M_1N_1P_1Q_1$ se poate trasa un cerc al lui *Mohr*, la care punctele B şi D au coordonatale $B_1(0, \tau)$ şi $D_1(0, -\tau)$. Pentru a determina eforturile unitare pe feţele unui element orientat faţă de sistemul de axe Oxy, se măsoară pe cercul din figura 7.10, *c* în sensul din figura 7.10, *a* (negativ) unghiul 2α. Se obţin punctele B_1' şi D_1' avînd coordonatele:

$$B_1' \begin{cases} \sigma_x = -\tau \sin 60° = -0{,}866\,\tau; \\ \tau_{xy} = \tau \cos 60° = 0{,}5\ \tau. \end{cases}$$

$$D_1' \begin{cases} \sigma_y = \tau \cos 60° = 0{,}866\ \tau; \\ \tau_{xy} = -\tau \sin 60° = -0{,}5\ \tau. \end{cases}$$

Pentru elementul din figura 7.10, *b* se trasează în figura 7.10, *d* cercul lui *Mohr* în mod asemănător, coordonatele punctelor B şi D fiind $B_2(0, -\tau)$ şi $D_2(0, +\tau)$:

$$B_2' \begin{cases} \sigma_x = -0{,}866\tau \\ \tau_{xy} = -0{,}5\tau \end{cases}$$

$$D_2' \begin{cases} \sigma_y = 0{,}866\,\tau \\ \tau_{xy} = 0{,}5\,\tau \end{cases}$$

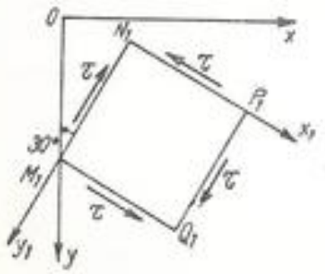


Fig. 7.10, *a*

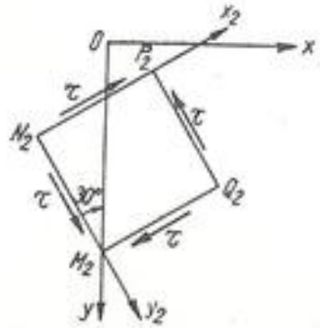


Fig. 7.10, *b*

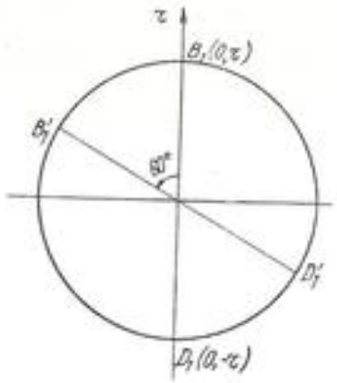


Fig. 7.10, *c*

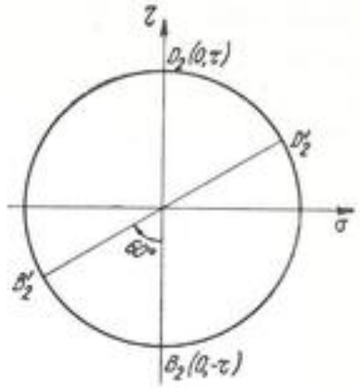


Fig. 7.10, *d*

Adunarea eforturilor unitare se face în figura 7.10, *e*. Se vede că direcţiile axei Oxy sînt chiar direcţiile principale (deoarece $\tau_{xy} = 0$), deci $\sigma_1 = 1{,}73\ \tau$ şi $\sigma_2 = -1{,}73\ \tau$.

7.11. Să se determine valorile eforturilor unitare principale la o stare spaţială de eforturi unitare, dacă se cunosc $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 100$ daN/cm².

Rezolvare. Înlocuind valorile numerice în relaţiile (7.13), se obţine:

$$p = 0;$$
$$q^2 = 100^2 + 100^2 + 100^2 = 3 \cdot 10^4;$$
$$r^3 = 2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 = 2 \cdot 10^6.$$

Aceste valori se introduc în formula (7.12) şi se obţine ecuaţia:

$$-\sigma^3 + 3 \cdot 10^4\sigma + 2 \cdot 10^6 = 0.$$

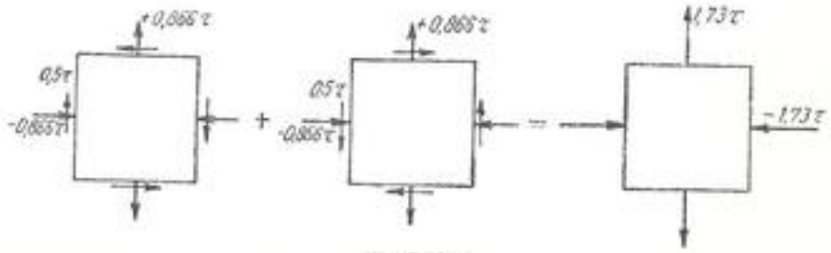


Fig. 7.10, *e*

care are ca soluţii:

$$\sigma_1 = 200 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = -100 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_3 = -100 \text{ daN/cm}^2.$$

7.12. Să se determine eforturile unitare principale la următoarele stări spaţiale de eforturi unitare:

a) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = \tau_{xz} = 100 \text{ daN/cm}^2.$

b) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 100 \text{ daN/cm}^2; \quad \tau_{yz} = \tau_{xz} = 100 \text{ daN/cm}^2,$

$$\tau_{xy} = -100 \text{ daN/cm}^2.$$

Rezolvare. a) Aplicînd formulele (7.13), se obţine:

$$p = 0; \quad q^2 = 2 \cdot 10^4; \quad r^3 = 0.$$

Înlocuind în formula (7.12), se obţine ecuaţia:

$$-\sigma^3 + 2 \cdot 10^4 \sigma = 0,$$

care are ca soluţii:

$$\sigma_1 = 141 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -141 \text{ daN/cm}^2.$$

b) Din formulele (7.13) şi (7.12) se obţine:

$$p = 100 + 100 + 100 = 3 \cdot 10^2, \quad q^2 = 0;$$

$$r^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100 - 2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 - 100 \cdot 100^2 - 100 \cdot 100^2 -$$

$$- 100 \cdot 100^2 = -4 \cdot 10^6; \quad -\sigma^3 + 3 \cdot 10^2 \sigma^2 - 4 \cdot 10^6 = 0.$$

Prin încercări se găsesc soluţiile:

$$\sigma_1 = 200 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = 200 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_3 = -100 \text{ daN/cm}^2.$$

7.13. Laturile prismei din figura 7.13 se deformează astfel, încît OA suferă o alungire ε_1, iar OB o alungire ε_2, unghiul drept AOB rămînînd nedeformat. Se cere alungirea laturii AB.

Aplicaţie numerică:

$$OA = 10 \text{ cm}; \quad \varepsilon_1 = 0{,}01;$$

$$OB = 6 \text{ cm}; \quad \varepsilon_2 = 0{,}02.$$

Rezolvare. Se aplică prima dintre formulele (7.16), în care:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_2 \quad \text{şi} \quad \gamma_{xy} = 0.$$

Rezultă:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos 2\alpha. \qquad (1)$$

Din figura 7.13 rezultă:

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}. \qquad (2)$$

Înlocuind expresia (2) în (1) obţinem:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}. \qquad (3)$$

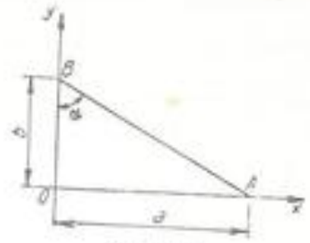


Fig. 7.13

Cu datele numerice $\varepsilon_1 = 0{,}01$, $\varepsilon_2 = 0{,}02$, $a = 10$, $b = 6$ se obţine:

$$\varepsilon = \frac{0{,}01 + 0{,}02}{2} + \frac{0{,}01 - 0{,}02}{2} \cdot \frac{6^2 - 10^2}{6^2 + 10^2} = 0{,}0179.$$

7.14. O bară de oţel, cu secţiunea $A = 3 \text{ cm}^2$ şi cu lungimea $l = 500$ cm, este solicitată la întindere prin o forţă $N = 3\,000$ daN. Care este variaţia de volum a barei, după deformaţie, dacă $\mu = 0{,}3$ şi $E = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$?

Rezolvare. Eforturile unitare principale sînt:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} = \frac{3\,000}{3} = 1\,000 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Introducînd aceste valori în formulele (7.23), se obţine:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_2 = -\mu \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma_1}{E}.$$

Deformaţia volumică specifică este:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu\sigma_1}{E} - \frac{\mu\sigma_1}{E} = \frac{\sigma_1}{E}(1 - 2\mu).$$

Înlocuind datele numerice, se obţine:

$$\varepsilon_v = \frac{1\,000\,(1 - 2 \cdot 0{,}3)}{2{,}1 \cdot 10^6} = 1{,}9 \cdot 10^{-4}.$$

Variaţia de volum este:

$$\Delta V = \varepsilon_v V = 1{,}9 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 500 = 0{,}285 \text{ cm}^3.$$

7.15. Un cub, cu latura $a = 0{,}5$ cm, se deformează astfel, încît dintre trei muchii concurente, una se lungeşte cu 0,1 mm, alta cu 0,2 mm, iar a treia se scurtează cu 0,3 mm. Cît este deformaţia volumică specifică?

Rezolvare. Luînd cele trei muchii drept axe de coordonate, se obţine:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{0{,}01}{0{,}5} = 0{,}02; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{0{,}02}{0{,}5} = 0{,}04,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l_z}{l_z} = \frac{-0{,}03}{0{,}5} = -0{,}06.$$

Deformaţia elementului de volum este, după formula (7.19):

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0{,}02 + 0{,}04 - 0{,}06 = 0.$$

7.16. Pe feţele unui cub de oţel, cu latura $a = 2$ cm, se aplică forţele de întindere $X = 1\,000$ daN, $Y = 1\,500$ daN, $Z = 2\,000$ daN paralele cu muchiile. Să se determine lungirile muchiilor cubului.

Rezolvare. Eforturile unitare sînt:

$$\sigma_x = \frac{X}{A} = \frac{1\,000}{4} = 250 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_y = \frac{Y}{A} = \frac{1\,500}{4} = 375 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_z = \frac{Z}{A} = \frac{2\,000}{4} = 500 \text{ daN/cm}^2.$$

Alungirile conform formulelor (7.23), sînt

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_z - \mu\sigma_x);$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y).$$

Luînd $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm² şi $\mu = 0{,}3$, se obţine:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2{,}1 \cdot 10^6}(250 - 0{,}3 \cdot 875) = -5{,}95 \cdot 10^{-6},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2{,}1 \cdot 10^6}(375 - 0{,}3 \cdot 750) = 71{,}5 \cdot 10^{-6},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2{,}1 \cdot 10^6}(500 - 0{,}3 \cdot 625) = 148{,}8 \cdot 10^{-6},$$

Lungirile celor trei muchii ale cubului sînt:

$$\Delta x = a\varepsilon_x = 2(-5{,}95 \cdot 10^{-6}) = -11{,}9 \cdot 10^{-6} \text{ cm},$$

$$\Delta y = a\varepsilon_y = 2 \cdot 71{,}5 \cdot 10^{-6} = 143 \cdot 10^{-6} \text{ cm}.$$

$$\Delta z = a\varepsilon_z = 2 \cdot 148{,}8 \cdot 10^{-6} = 297{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ cm}.$$

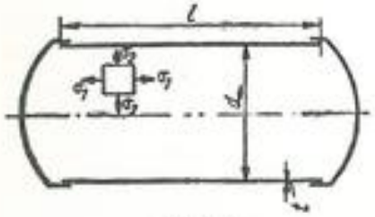


Fig. 7.17

7.17. Într-un rezervor cilindric, cu lungimea $l = 6$ m, cu diametrul $d = 1{,}5$ m şi cu grosimea tablei $t = 1$ cm (Fig. 7.17), se află aer comprimat, la o presiune $p = 15$ daN/cm². Datorită solicitării se produc deformaţii care modifică volumul rezervorului. Să se determine creşterea volumului rezervorului, neglijîndu-se deformaţiile fundurilor.

Rezolvare. Corpul rezervorului suferă deformaţii, atît datorită eforturilor unitare paralele cu axa sa (σ_1) cît şi datorită eforturilor perpendiculare pe axă (σ_2). Valoarea acestor eforturi unitare este dată de relaţiile:

$$\sigma_1 = \frac{\frac{\pi d^2}{4} p}{\pi d t} = \frac{pd}{4t} = \frac{15 \cdot 150}{4 \cdot 1} = 562{,}5 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{pdl}{2tl} = \frac{pd}{2t} = \frac{15 \cdot 150}{2 \cdot 1} = 1\,125 \text{ daN/cm}^2.$$

Se scriu relaţiile dintre dimensiunile cilindrului deformat, notate cu indicele 1 şi dimensiunile iniţiale:

$$\pi d_1 = \pi d(1 + \varepsilon_2); \quad d_1 = d(1 + \varepsilon_2); \quad l_1 = l(1 + \varepsilon_1).$$

Volumul final este dat de relaţia:

$$V_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} l_1 = \frac{\pi d^2 (1 + \varepsilon_2)^2}{4} l(1 + \varepsilon_1).$$

Creşterea volumului este:

$$\Delta V = V_1 - V = \frac{\pi d^2}{4} l[(1 + \varepsilon_2)^2(1 + \varepsilon_1) - 1]$$

Neglijînd termenii ε_2^2 şi $\varepsilon_1\varepsilon_2$, rezultă:

$$\Delta V \approx \frac{\pi d^2}{4} l(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2).$$

Cele două alungiri sînt:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_1}{E};$$

$$\Delta V = \frac{\pi d^2}{4}\frac{l}{E}[\sigma_1(1 - 2\mu) + \sigma_2(2 - \mu)].$$

Înlocuind $\mu = 0{,}3$, se obţine:

$$\Delta V = \frac{3{,}14 \cdot 150^2}{4} \cdot \frac{600}{2{,}1 \cdot 10^6}(562{,}5 \cdot 0{,}4 + 1\,125 \cdot 1{,}7) = 10\,792 \text{ cm}^3.$$

Deformaţia volumică specifică este:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{10\,792}{10{,}60 \cdot 10^6} = 1{,}018 \cdot 10^{-3}.$$

7.18. O placă paralelipipedică, de dimensiuni a, b, c (Fig. 7.18), este comprimată pe două direcţii prin N_1 şi N_2, iar pe a treia direcţie este aşezată între doi pereţi, care nu permit nici o umflare. Să se afle: eforturile

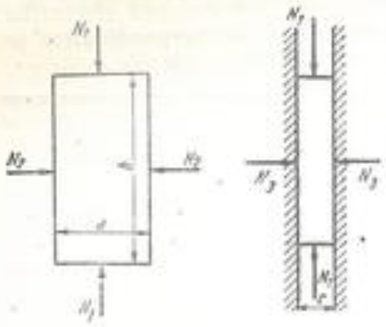


Fig. 7.18

unitare principale, alungirile principale, reacţiunea N_3 care se produce între placă şi pereţi.

Aplicaţie numerică: $a=1$ cm; $b=2$ cm; $c=0{,}5$ cm; $N_1=500$ daN; $N_2=750$ daN; $E=2{,}1\cdot 10^6$ daN/cm²; $\mu=0{,}3$.

Rezolvare. Cei doi pereţi nepermiţînd nici o deplasare, rezultă că deformaţia specifică pe direcţia *3* este nulă ($\varepsilon_3=0$). Din ultima ecuaţie (7.24) se obţine:

$$\varepsilon_3=\frac{\sigma_3}{E}-\mu\left(\frac{\sigma_1}{E}+\frac{\sigma_2}{E}\right)=0$$

sau:

$$\sigma_3=\mu(\sigma_1+\sigma_2). \qquad (1)$$

În cazul aplicaţiei numerice:

$$\sigma_1=-\frac{N_1}{ac}=-\frac{500}{1\cdot 0{,}5}=-1\,000 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2=-\frac{N_2}{bc}=-\frac{750}{2\cdot 0{,}5}=-750 \text{ daN/cm}^2.$$

Înlocuind în expresia (1), se obţine:

$$\sigma_3=0{,}3(-1\,000-750)=-525 \text{ daN/cm}^2.$$

Reacţiunea peretelui este:

$$N_3=\sigma_3 ab=-525\cdot 1\cdot 2=-1\,050 \text{ daN}.$$

Deformaţiile specifice se obţin din relaţiile (7.24):

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)}{E}=\frac{-1\,000-0{,}3(-750-525)}{2{,}1\cdot 10^6}=-2{,}94\cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2=\frac{\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1)}{E}=\frac{-750-0{,}3(-525-1\,000)}{2{,}1\cdot 10^6}=-1{,}39\cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_3=0.$$

7.19. Pe două feţe ale unui paralelipiped din interiorul unui materia *izotrop* se produc eforturile unitare $\sigma_1=1\,000$ daN/cm² şi $\sigma_2=200$ daN/cm². Care este valoarea lui σ_3, dacă deformaţia volumică specifică este nulă?

Rezolvare. Din formula (7.19) se obţine $\varepsilon_v=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0$.

Se înlocuiesc valorile deformaţiilor din formulele (7.24):

$$\frac{\sigma_1}{E}-\mu\left(\frac{\sigma_2}{E}+\frac{\sigma_3}{E}\right)+\frac{\sigma_2}{E}-\mu\left(\frac{\sigma_3}{E}+\frac{\sigma_1}{E}\right)+\frac{\sigma_3}{E}-\mu\left(\frac{\sigma_1}{E}+\frac{\sigma_2}{E}\right)=0,$$

$$\sigma_1(1-2\mu)+\sigma_2(1-2\mu)+\sigma_3(1-2\mu)=0.$$

$$(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)(1-2\mu)=0.$$

Rezultă că:

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0.$$

$$\sigma_3=-(\sigma_1+\sigma_2)=-(1\,000+200)=-1\,200 \text{ daN/cm}^2.$$

7.20. Un cub de oţel cufundat într-un lichid este supus unei presiuni uniforme, de mărime $p=50$ daN/cm². În urma exercitării acestei presiuni, se constată o scădere de 1/30 000 a volumului cubului. Să se determine constanta lui *Poisson* m şi modulul de elasticitate transversal G, cunoscînd pe $E=2{,}1\cdot 10^6$ daN/cm².

Rezolvare. Eforturile unitare care se produc pe cele trei feţe ale cubului sînt egale cu presiunea lichidului, deci se poate scrie:

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=p=-50 \text{ daN/cm}^2. \qquad (1)$$

Semnul minus arată că eforturile unitare sînt de compresiune.

Din cauza simetriei, scurtările specifice pe cele trei direcţii sînt egale şi formula (7.19):

$$\varepsilon_v=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=-\frac{1}{30\,000}$$

se transformă în:

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\frac{\varepsilon_v}{3}. \qquad (2)$$

Înlocuind în prima formulă (7.25):

$$\sigma_1=\frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_1+\frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_v\right),$$

se obţine:

$$p=\frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\varepsilon_v}{3}+\frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_v\right]. \qquad (3)$$

Din ecuaţia (3) se găseşte necunoscuta:

$$\mu=\frac{3p-E\varepsilon_v}{6p}=\frac{3\cdot(-50)-2{,}1\cdot 10^6\cdot\left(-\frac{1}{30\,000}\right)}{6\cdot(-50)}=0{,}267.$$

Constanta lui *Poisson* m va fi inversul acestui coeficient, adică:

$$m=\frac{1}{\mu}=3{,}75.$$

Din formula (7.26) se obţine:

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}=\frac{2{,}1\cdot 10^6}{2\cdot(1+0{,}267)}=830\,000 \text{ daN/cm}^2.$$

7.21. Un element de volum este solicitat în plan ca în figura 7.21, cu eforturile unitare $\sigma_1=-\sigma_2=\sigma$.

Într-o secţiune înclinată la 45° faţă de laturile cubului, apar eforturile unitare $\tau=\sigma$ (forfecare pură). Să se găsească relaţia între modulul de

elasticitate longitudinal şi cel transversal, pe baza egalităţii lucrului mecanic corespunzător celor două poziţii ale elementului de volum.

Rezolvare. Lucrul mecanic de deformaţie datorit întinderii şi compresiunii are expresia:

$$L' = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2}.$$

Deformaţiile specifice sînt, conform relaţiilor (7.22):

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\sigma(1+\mu)}{E}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} = \frac{-\sigma(1+\mu)}{E};$$

$$L' = \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\sigma(1+\mu)}{E} + \frac{(-\sigma)}{2}\left[\frac{-\sigma(1+\mu)}{E}\right] = \frac{\sigma^2(1+\mu)}{E}.$$

Lucrul mecanic de deformaţie pentru forfecarea pură, ţinînd seamă că $\sigma = \tau$, are expresia:

$$L'' = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{\sigma^2}{2G}.$$

Egalînd cele două expresii, se obţine:

$$\frac{\sigma^2}{2G} = \frac{\sigma^2(1+\mu)}{E}; \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Se regăseşte relaţia (7.26)

7.22. Se dă bara AB, solicitată la întindere de forţa P, ca în figura 7.22. Bara este de secţiune dreptunghiulară: $a \times b$ şi lungime l.

Se cere să se determine lungirea segmentului CE, cînd se ţine seama de contracţia transversală.

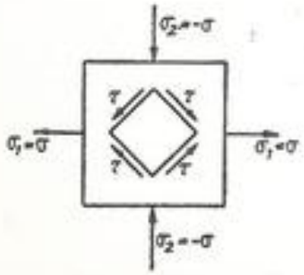


Fig. 7.21

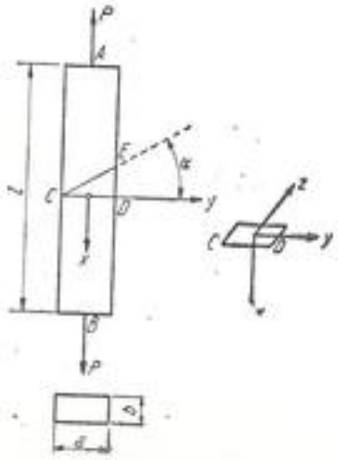


Fig. 7.22

Aplicaţie pentru oţel cu $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm²; $\mu = 0{,}3$; $P = 150$ kN; $a = 8$ cm; $b = 4$ cm; $\alpha = 30°$;

Rezolvare. Eforturile unitare pe direcţiile x, y, z sînt:

$$\sigma_x = \frac{P}{}, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Înlocuind aceste valori în formulele (7.21), se obţine:

$$\varepsilon_x = \frac{P}{Eab}, \quad \varepsilon_y = -\mu \frac{P}{Eab}, \quad \gamma_{xy} = 0.$$

Alungirea specifică ε_a pe direcţia CE este (7.16):

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Deoarece $\gamma_{xy} = 0$, rezultă:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{Eab} - \mu \frac{P}{Eab}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{P}{Eab} + \mu \frac{P}{Eab}\right) \cos 2\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{P}{Eab} [(1-\mu) - (1+\mu) \cos 2\alpha],$$

$$\overline{CE} = \frac{a}{\cos \alpha}; \quad \Delta\overline{CE} = \overline{CE}\varepsilon_a = \frac{a\varepsilon_a}{\cos \alpha}.$$

Aplicaţie numerică:

$$\varepsilon_{30°} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15\,000}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 8 \cdot 4}\left[(1 - 0{,}3) - (1 + 0{,}3)\frac{1}{2}\right] = 0{,}56 \cdot 10^{-4},$$

$$\Delta\overline{CE} = \frac{8 \cdot 0{,}56 \cdot 10^{-4}}{0{,}866} = 5{,}20 \cdot 10^{-4} \text{ cm}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

7.23. Să se deseneze cercul lui *Mohr* şi să se găsească eforturile unitare şi direcţiile principale pentru următoarele stări plane de eforturi unitare:

a) $\sigma_x = 700$ daN/cm²; $\sigma_y = 300$ daN/cm²; $\tau_{xy} = 200$ daN/cm²;
b) $\sigma_x = -250$ daN/cm²; $\sigma_y = -500$ daN/cm²; $\tau_{xy} = 250$ daN/cm²;
c) $\sigma_x = 300$ daN/cm²; $\sigma_y = -100$ daN/cm²; $\tau_{xy} = 0$;
d) $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = 400$ daN/cm²;
e) $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = 450$ daN/cm²; $\tau_{xy} = -450$ daN/cm²;
f) $\sigma_x = 600$ daN/cm²; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = 300$ daN/cm.²

Indicaţie. Se va proceda ca în cazul problemei 7.9.

7.24. Să se calculeze valorile eforturilor unitare principale pentru următoarele stări spaţiale de eforturi unitare:

a) $\sigma_x = 200$ daN/cm²; $\sigma_y = 400$ daN/cm²; $\sigma_z = 600$ daN/cm²;
$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$; $\tau_{xy} = 300$ daN/cm²;
b) $\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\sigma_z = 200$ daN/cm²;
$\tau_{yz} = 200$ daN/cm²; $\tau_{zx} = 300$ daN/cm²; $\tau_{xy} = 400$ daN/cm²;
c) $\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\sigma_z = 100$ daN/cm²;
$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$; $\tau_{xy} = 100$ daN/cm²;

Răspuns:

a) $\sigma_1 = 630$ daN/cm²; $\sigma_2 = 590$ daN/cm²; $\sigma_3 = -20$ daN/cm².
b) $\sigma_1 = 670$ daN/cm²; $\sigma_2 = 47$ daN/cm²; $\sigma_3 = -516$ daN/cm².
c) $\sigma_1 = 100$ daN/cm²; $\sigma_2 = 100$ daN/cm²; $\sigma_3 = -100$ daN/cm².

CAPITOLUL 8 SOLICITĂRI COMPUSE

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. Efortul unitar normal care se produce în fibrele extreme ale unei bare, solicitată la întindere sau compresiune de forţă N şi la încovoiere de un moment $M_z = M$ este:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W}, \tag{8.1}$$

în cazul cînd Oz este axă de simetrie şi:

$$\sigma' = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_1}, \quad \sigma'' = \frac{N}{A} - \frac{M}{W_2},$$

în cazul cînd axa Oz nu este axă de simetrie.

2. Efortul unitar într-un punct oarecare al secţiunii unei bare, solicitată de o forţă axială excentrică, cum se vede în figura 8.*a*, este:

$$\sigma = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{y_0 y}{i_z^2} + \frac{z_0 z}{i_y^2}\right). \tag{8.2}$$

3. Ecuaţia axei neutre, la cazul de mai sus, este:

$$1 + \frac{y_0 y}{i_z^2} + \frac{z_0 z}{i_y^2} = 0. \tag{8.3}$$

4. Simburele central al unei secţiuni este conturul în interiorul căruia se poate aplica o forţă normală excentrică, astfel încît în secţiune efortul unitar σ să fie de un singur semn.

Simburele central este:

a) la secţiunea circulară: un cerc de diametru $d/4$;

b) la dreptunghiul de laturi b şi h: un romb cu diagonalele $h/3$ în lungul lui h şi $b/3$ în lungul lui b.

5. În cazul unui masiv de zidărie comprimat excentric, la care axa neutră taie secţiunea, se ia în calcul numai partea din secţiune comprimată, numită secţiune activă, haşurată în figura 8. *b*.

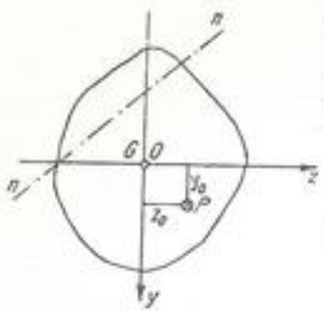


Fig. 8. a

În cazul secţiunii dreptunghiulare, pe care forţa excentrică este aplicată într-un punct al unei axe principale, la distanţa $c<h/3$ (Fig. 8.b), efortul unitar maxim are loc în punctul C şi are valoarea:

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3bc}. \qquad (8.4)$$

Se observă că distanţa c se măsoară aici de la marginea secţiunii, fiind:

$$c = \frac{h}{2} - e.$$

6. La un cablu cu n fire, fiecare de diametru d, supus unei forţe de întindere N şi înfăşurat pe o tobă de diametru D, efortul unitar maxim este:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{n\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{Ed}{D} \qquad (8.5)$$

7. Un arbore cu secţiunea circulară, solicitat la încovoiere de un moment M_i şi la răsucire de un moment M_t, se poate dimensiona ca şi cînd ar fi solicitat numai la încovoiere de un moment încovoietor echivalent M_{ie}:

$$W_{nec} = \frac{M_{ie}}{\sigma_a} = \frac{\pi d^3}{32}, \qquad (8.6)$$

unde momentul M_{ie} are, în diferitele teorii de rezistenţă, următoarele expresii:

Teoria I, a efortului unitar normal maxim:

$$M_{ie} = \frac{1}{2}\left(M_i + \sqrt{M_i^2 + M_t^2}\right). \qquad (8.7)$$

Teoria II, a deformaţiei specifice maxime:

$$M_{ie} = 0{,}35\, M_i + 0{,}65\sqrt{M_i^2 + M_t^2}. \qquad (8.8)$$

Teoria III, a efortului unitar tangenţial maxim:

$$M_{ie} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2}. \qquad (8.9)$$

Teoria IV, a energiei de deformaţie:

$$M_{ie} = \sqrt{M_i^2 + 0{,}65\, M_t^2} \text{ sau}$$

$$M_{ie} = \sqrt{M_i^2 + 0{,}75\, M_t^2}. \qquad (8.10)$$

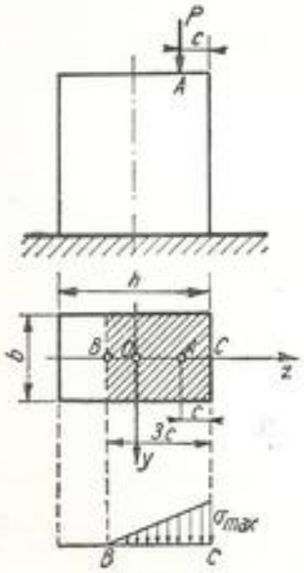


Fig. 8. b

8. În cazul general al unei bare drepte în care se produc eforturi unitare σ şi τ, verificarea în cele patru teorii se face cu următoarele relaţii:

Teoria I:

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) \leqslant \sigma_a. \qquad (8.11)$$

Teoria II:

$$\sigma_{ech} = 0{,}35\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant \sigma_a. \qquad (8.12)$$

Teoria III:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant \sigma_a. \qquad (8.13)$$

Teoria IV, varianta *I*, cînd $\sigma > 0$:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 2{,}6\tau^2} \leqslant \sigma_a. \qquad (8.14)$$

Teoria IV, varianta *II*, cînd $\sigma < 0$:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leqslant \sigma_a. \qquad (8.15)$$

9. Pentru determinarea sîmburelui central, dacă puctul de aplicaţie al forţei are coordonatele y_0 şi z_0, iar fibrele extreme au y_{max} şi z_{max}, se poate scrie:

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_{max}}; \quad z_0 = -\frac{i_y^2}{z_{max}}. \qquad (8.16)$$

B. PROBLEME REZOLVATE

8.1. La sistemul de bare articulate din figura 8.1, solicitat prin forţa mobilă P, care se poate deplasa între A şi B se cere:

a) determinarea forţei maxime în tirantul CB şi dimensionarea tirantului confecţionat din oţel cu secţiunea pătrată;

b) determinarea poziţiei forţei P, pentru care efortul unitar, rezultînd din încovoiere şi compresiune, în bara AB, este maxim, precum şi verificarea barei din lemn cu secţiunea pătrată avînd latura a (neglijînd flambajul).

Aplicaţie numerică: $P = 1\,000$ daN; $a = 15$ cm; $l = 2$ m; $\alpha = 30°$; $\sigma_{aOL} = 1\,200$ daN/cm²; $\sigma_{al} = 100$ daN/cm².

Rezolvare. Notînd cu T efectul în tirantul CB şi cu x distanţa de la articulaţia A la forţa P, ecuaţia de momente faţă de A este:

$$Px - Tl\sin\alpha = 0,$$

$$T = \frac{Px}{l\sin\alpha}. \qquad (1)$$

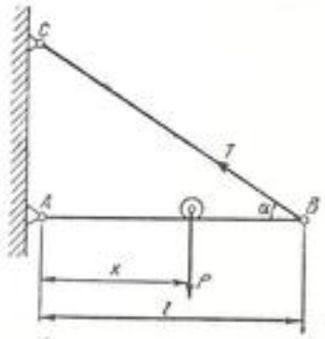


Fig. 8.1

Efortul T este maxim cînd $x = l$:

$$T_{max} = \frac{Pl}{l \sin \alpha} = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{1\,000}{\sin 30^\circ} = 2\,000 \text{ daN}.$$

Tirantul CB se dimensionează la întindere:

$$A_{nec} = \frac{T_{max}}{\sigma_{ef}} = \frac{2\,000}{1\,200} = 1{,}66 \text{ cm}^2,$$

$$a_1 = 1{,}66; \quad a_1 = 1{,}29 \text{ cm}.$$

Se alege $a = 13$ mm.

b) *Momentul încovoietor* este maxim în dreptul forței P și are valoarea:

$$M = T \sin \alpha (l - x) = \frac{Px(l - x)}{l}. \tag{2}$$

Bara este solicitată și la compresiune prin forța:

$$N = T \cos \alpha = \frac{Px}{l \sin \alpha} \cos \alpha = \frac{Px}{l} \operatorname{ctg} \alpha. \tag{3}$$

Efortul unitar maxim se obține aplicînd relația (8.1):

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{Px \operatorname{ctg} \alpha}{Al} + \frac{Px(l - x)}{Wl}. \tag{4}$$

Pentru determinarea valorii x, căreia îi corespunde efortul unitar maxim, se anulează derivata lui σ în raport cu x:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{P \operatorname{ctg} \alpha}{Al} + \frac{P}{W} - \frac{2\,Px}{lW} = 0,$$

$$x = \frac{W}{2A} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{l}{2}. \tag{5}$$

Înlocuind în formula (5) expresiile W și A pentru secțiunea pătrată, se obține:

$$x = \frac{\frac{a^3}{6}}{2a^2} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{l}{2} = \frac{a}{12} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{l}{2} = \frac{15}{12} \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + \frac{200}{2} = 102{,}2 \text{ cm}.$$

Înlocuind în formula (4) valoarea lui x astfel obținută, se găsește:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{1\,000 \cdot 102{,}2 \cdot 1{,}73}{15^2 \cdot 200} + \frac{1\,000 \cdot 102{,}2 \cdot 97{,}8}{\frac{15^3}{6} \cdot 200} =$$

$$= 3{,}90 + 88{,}80 = 92{,}70 \text{ daN/cm}^2.$$

Se observă că efectul forței axiale este numai ~4,5% din cel al momentului încovoietor, iar poziția critică a forței este foarte aproape din mijlocul barei AB.

8.2. Dacă stîlpul de lemn AB din figura 8.2 are diametrul $d = 20$ cm, lungimea $h = 10$ m și greutatea $G = 150$ daN, să se determine forța P cu care poate fi tras, sub unghiul de 30°, ca să nu se depășească $\sigma_a = 100$ daN/cm² (neglijînd flambajul).

Rezolvare. Secțiunea periculoasă este cea din încastrarea B, supusă la momentul încovoietor:

$$M = Th = Ph \sin 30^\circ,$$

și la forța axială:

$$N = G + Q = G + P \cos 30^\circ;$$

Se aplică formula (8.1):

$$\sigma_a = \frac{G + P \cos 30^\circ}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{Ph \sin 30^\circ}{\frac{\pi d^3}{32}},$$

$$100 = \frac{150 + \frac{\sqrt{3}}{2} P}{\frac{\pi \cdot 20^2}{4}} + \frac{P \cdot 1\,000 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\pi \cdot 20^3}{32}} = \frac{150 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} P}{314} + \frac{500\,P}{786},$$

$$P = 156 \text{ daN}.$$

8.3. Dacă bara ABC din figura 8.3 este confecționată din oțel, avînd secțiunea circulară, cu $d = 2$ cm, să se calculeze excentricitatea maximă e pe care o poate avea forța $P = 100$ daN spre a nu se depăși rezistența admisibilă $\sigma_a = 800$ daN/cm².

Rezolvare. Se aplică formula (8.1):

$$\sigma_a = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{W_z}; \quad 800 = \frac{100}{\frac{\pi \cdot 2^2}{4}} + \frac{100 \cdot e}{\frac{\pi \cdot 2^3}{32}}; \; e = 6{,}03 \text{ cm}.$$

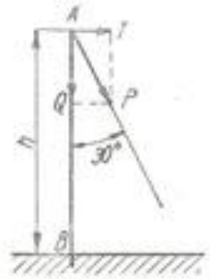


Fig. 8.2

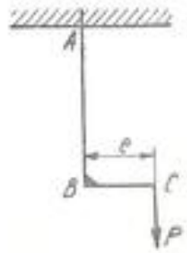


Fig. 8.3

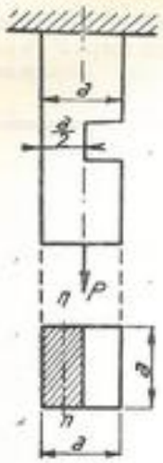


Fig. 8.4

8.4. Să se dimensioneze bara din figura 8.4, făcută din lemn, cu $\sigma_a = 100$ daN/cm², întinsă prin forţa $P = 1\,000$ daN, neglijînd efectele de concentrare a eforturilor unitare la variaţia de secţiune.

Rezolvare. Se vede că secţiunea periculoasă este un dreptunghi de dimensiuni a şi $a/2$ şi că această secţiune este solicitată la întindere cu forţa P şi la încovoiere cu momentul $M = Pe = Pa/4$.

Faţă de axa nn ce trece prin centrul de greutate, modulul de rezistenţă este:

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{6} = \frac{a^3}{24}.$$

Ecuaţia de dimensionare a solicitărilor compuse dă:

$$\sigma_a = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{W} = \frac{P}{\frac{a^2}{2}} + \frac{P\frac{a}{4}}{\frac{a^3}{24}} = \frac{8P}{a^2};$$

$$a = \sqrt{\frac{8P}{\sigma_a}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1\,000}{100}} = 8.95 \text{ cm} \approx 9 \text{ cm}.$$

8.5. Să se dimensioneze bara AB din figura 8.5, făcută din lemn, cu secţiunea pătrată, luînd $\sigma_a = 100$ daN/cm².

Rezolvare. Reducînd forţele în axa barei, se obţine un moment încovoietor şi o forţă axială, care au valorile:

$$M = 2\,000 \cdot 40 + 1\,000 \cdot 40 = 120\,000 \text{ daNcm},$$

$$N = 2\,000 + 5\,000 - 1\,000 = 6\,000 \text{ daN}.$$

Aplicînd formula (8.1), se obţine:

$$\sigma_a = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{6\,000}{a^2} + \frac{120\,000}{\frac{a^3}{6}} = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

Expresia de mai sus se reduce la o ecuaţie de gradul III,

$$a^3 - 60a - 7\,200 = 0.$$

Rezolvînd ecuaţia prin încercări, se obţine $a = 20{,}4$ cm. Constructiv, se alege o secţiune pătrată cu latura $a = 21$ cm.

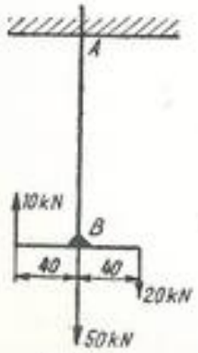


Fig. 8.5

8.6. O grindă de lemn avînd secţiunea dreptunghiulară 18×24 cm² este solicitată ca în figura 8.6. Să se calculeze efortul unitar normal maxim ce se produce în grindă.

Rezolvare. Grinda este solicitată la încovoiere şi întindere. Trebuie determinate eforturile în secţiunea cea mai solicitată.

1) Calculul reacţiunilor:

Se scrie ecuaţia de momente faţă de reazemul 2:

$$1{,}2V_1 + 500 \cdot (0{,}8 - 0{,}4) + 1000 \cdot 0{,}12 = 0;$$

$$V_1 = -267 \text{ daN};$$

$$V_2 = +267 \text{ daN}.$$

2) Calculul momentelor încovoietoare:

$M_1 = 1\,000 \cdot 0{,}06 = 60$ daNm;

$M_3 = -267 \cdot 0{,}4 + 1\,000 \cdot 0{,}06 = -47$ daNm;

$M_4 = -M_3 = 47$ daNm; $M_2 = -M_1 = -60$ daNm.

Rezultă că momentul maxim este de 60 daNm. Efortul unitar se calculează cu formula (8.1):

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{1\,000}{18 \cdot 24} \pm \frac{6\,000}{\frac{18 \cdot 24^2}{6}} = 2{,}31 \pm 3{,}49 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{max} = 2{,}31 + 3{,}49 = 5{,}80 \text{ daN/cm}^2; \ \sigma_{min} = 2{,}31 - 3{,}49 = -1{,}18 \text{ daN/cm}^2.$$

8.7. O grindă cu secţiunea dreptunghiulară este solicitată şi rezemată ca în figura 8.7. Se cere locul geometric al punctelor din interiorul grinzii în care efortul unitar σ este nul.

Rezolvare.

$$V_1 = V_2 = \frac{Hh}{l}.$$

Într-o secţiune x, momentul este:

$$M = \frac{Hh}{l}\left(\frac{l}{2} - x\right) - H\frac{h}{2}.$$

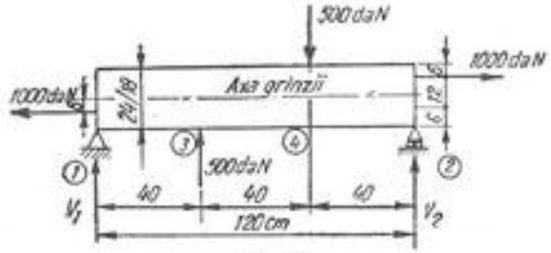


Fig. 8.6

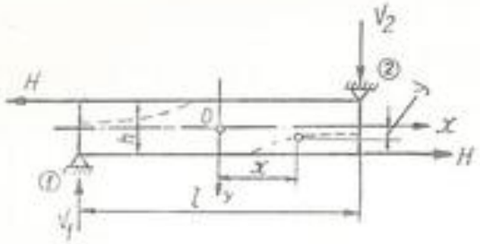


Fig. 8.7

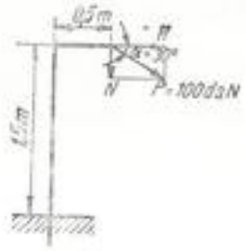


Fig. 8.8

Aplicînd formula (8.1) şi ţinînd seama că $I = bh^3/12$, se obţine:

$$\sigma = \frac{H}{bh} - H\frac{h}{2}\,\frac{y}{I} + \frac{Hh}{I}\left(\frac{l}{2} - x\right)\frac{y}{I};$$

$$\sigma = \frac{H}{bh} - \frac{Hhy}{2\,\frac{bh^3}{12}} + \frac{Hhl}{2I}\,\frac{y}{\frac{bh^3}{12}} - \frac{Hh}{I}\,x\,\frac{y}{\frac{bh^3}{12}},$$

$$\sigma = \frac{H}{bh}\left(1 - \frac{12xy}{hl}\right).$$

Egalînd valoarea lui σ cu zero, se obţine:

$$xy = \frac{hl}{12}.$$

Ecuaţia reprezintă o hiperbolă echilateră reprezentată punctat pe figură.

8.8. Un stîlp din lemn este solicitat de o forţă înclinată $P = 100$ daN ca în figura 8.8. Ştiind că $\sigma_a = 40$ daN/cm², se cere dimensionarea stîlpului, cu secţiune pătrată (neglijînd flambajul).

Rezolvare.

$H = P\cos 30° = 100 \cdot 0{,}866 = 86{,}6$ daN; $N = P\sin 30° = 100 \cdot 0{,}5 = 50$ daN; $M = 86{,}6 \cdot 1{,}5 + 50 \cdot 0{,}5 = 155$ daNm.

Pentru secţiunea pătrată, formula (8.1) devine:

$$\sigma = -\frac{N}{a^2} \pm \frac{6M}{a^3}.$$

Înlocuind valorile numerice, se obţine:

$$-40 = \frac{-50}{a^2} - \frac{6 \cdot 15\,500}{a^3};\quad 40a^3 - 50a = 93\,000.$$

Rezolvînd ecuaţia prin încercări, rezultă $a = 13{,}3$ cm.

Din punct de vedere constructiv, se alege o secţiune pătrată 14 × 14. Verificarea secţiunii alese dă:

$$\sigma = \frac{-50}{14^2} \pm \frac{6 \cdot 15\,500}{14^3} = -0{,}25 \pm 34;$$

$$\sigma_{min} = -34{,}25 \text{ daN/cm}^2;\quad \sigma_{max} = +33{,}75 \text{ daN/cm}^2.$$

8.9. Un stîlp metalic, format dintr-un profil I 20, este solicitat de o forţă excentrică $P = 50$ kN, aşezată ca în figura 8.9. Să se verifice stîlpul arătînd dacă rezistă, ştiind că $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm² (neglijînd flambajul).

Rezolvare. În *anexa 10* se găseşte pentru un profil I 20:

$$A = 33{,}5 \text{ cm}^2;\quad W_x = 214 \text{ cm}^3.$$

Se aplică formula (8.1):

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W},$$

$$M = P \times e = 5\,000 \cdot 50 = 250\,000 \text{ daN cm},$$

$$\sigma = \frac{-5\,000}{33{,}5} \pm \frac{250\,000}{214} = -149 \pm 1\,168,$$

$$\sigma_{max} = -149 + 1\,168 = +1\,019 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{min} = -149 - 1\,168 = -1\,317 \text{ daN/cm}^2.$$

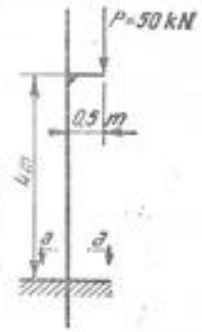


Fig. 8.9

Se vede că eforturile unitare sînt mai mici decît rezistenţa admisibilă, deci stîlpul rezistă bine.

8.10. La batiul de fontă din figura 8.10, a cărui secţiune AB are formă de T, cu dimensiunile date, se cere să se calculeze valoarea maximă a forţei P, ca să nu se depăşească: $\sigma_{at} = 300$ daN/cm² şi $\sigma_{ac} = 600$ daN/cm².

Rezolvare. Secţiunea AB este solicitată la încovoiere şi la întindere. Distanţa de la centrul de greutate al secţiunii la talpă este:

$$e_1 = \frac{10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 + 30 \cdot 3 \cdot 18}{10 \cdot 3 + 30 \cdot 3} = 13{,}8 \text{ cm};$$

$$e_2 = 33 - 13{,}8 = 19{,}2 \text{ cm}.$$

Momentul de inerţie faţă de axa $z-z$ ce trece prin centrul de greutate este:

$$I_z = \frac{10 \cdot 3^3}{12} + 10 \cdot 3 \cdot 12{,}3^2 + \frac{3 \cdot 30^3}{12} + 3 \cdot 30 \cdot 4{,}2^2 = 12\,890 \text{ cm}^4.$$

Aria secţiunii este:

$$A = 10 \cdot 3 + 30 \cdot 3 = 120 \text{ cm}^2.$$

Momentul încovoietor în secţiunea AB este:

$$M = P(50 + e_1) = P(50 + 13{,}8) = 63{,}8P.$$

Talpa grinzii este solicitată la întindere, datorită momentului încovoietor şi forţei P. Efortul unitar nu trebuie să depăşească rezistenţa admisibilă la întindere:

$$\sigma_{at} = \frac{P}{A} + \frac{Me_1}{I_z} = \frac{P}{120} + \frac{63{,}8P \cdot 13{,}8}{12\,890} = 300 \text{ daN/cm}^2.$$

Din această relaţie, se obţine:

$$P' = 3\,914 \text{ daN}.$$

Fibra extremă este solicitată la întindere de forţa P şi la compresiune datorită momentului încovoietor. Efortul unitar maxim de compresiune nu trebuie să depăşească rezistenţa admisibilă de compresiune:

$$\sigma_{ac} = \frac{P}{A} - \frac{Me_2}{I_z} = \frac{P}{120} - \frac{63{,}8P \cdot 19{,}2}{12\,890} = -600 \text{ daN/cm}^2.$$

De aici se obţine:

$$P'' = 6\,920 \text{ daN}.$$

Valoarea maximă admisibilă a forţei este $P' = 3\,914$ daN, deoarece o depăşire a acesteia ar duce la depăşirea rezistenţei admisibile la tracţiune.

8.11. Să se verifice profilul I 26 încastrat şi solicitat ca în figura 8.11.

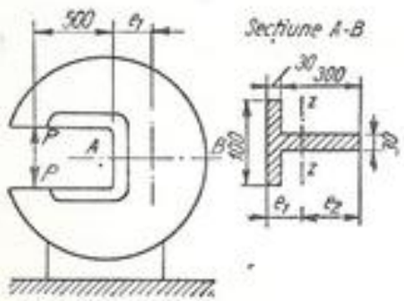


Fig. 8.10

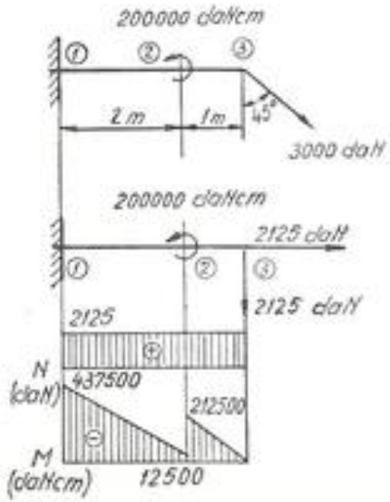


Fig. 8.11

Rezolvare. Forţa înclinată se descompune în două componente:

$$V = H = 3\,000 \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2\,125 \text{ daN}.$$

Momentul încovoietor în punctele 2 şi 1 are valorile:

$$M_2' = -2\,125 \cdot 100 = -212\,500 \text{ daNcm},$$

$$M_2'' = -212\,500 + 200\,000 = -12\,500 \text{ daNcm},$$

$$M_1 = -2\,125 \cdot 300 + 200\,000 = -437\,500 \text{ daNcm}.$$

Secţiunea periculoasă este în încastrare. Pentru profilul I 26 se găseşte din *anexa 10*: $W = 442$ cm³; $A = 53{,}4$ cm²;

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{2\,125}{53{,}4} + \frac{437\,500}{442} = 40 + 990 = 1\,030 \text{ daN/cm}^2.$$

8.12. Un cablu de oţel are $n = 222$ fire, cu diametrul $d = 1{,}2$ mm. Să se calculeze sarcina pe care o poate susţine cablul ca să nu se depăşească rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 2\,500$ daN/cm² şi apoi să se dimensioneze toba ca să nu se depăşească $\sigma_{max} = 4\,000$ daN/cm².

Rezolvare. Sarcina ce poate fi suportată de cablu este:

$$N = n\frac{\pi d^2}{4}\sigma_a = 222 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}12^2}{4} \cdot 2\,500 = 6\,277 \text{ daN}.$$

Cînd cablul este înfăşurat pe tobă, el este solicitat la întindere de sarcina utilă şi la încovoiere, datorită înfăşurării. Efortul unitar maxim are expresia (8.5):

$$\sigma_{max} = \frac{N}{n\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{Ed}{D}.$$

În această relaţie, primul termen din membrul al doilea are valoarea 2 500 daN/cm², iar $\sigma_{max} = 4\,000$ daN/cm²:

$$4\,000 = 2\,500 + \frac{Ed}{D},$$

$$D = \frac{Ed}{1\,500} = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 0{,}12}{1\,500} = 168 \text{ cm}.$$

Dacă diametrul tobei este egal sau mai mare decît această valoare, nu se va depăşi σ_{max} impus. Dacă motive constructive impun un diametru de tobă mai mic, se va folosi un cablu cu diametru mai mic al firelor, care dă eforturi unitare de încovoiere mai reduse.

8.13. Un profil I 16 este solicitat cu o forță de întindere excentrică $P = 100$ kN (Fig. 8.13). Care sînt valorile maxime ale excentricității, ca în secțiune să nu se producă un efort unitar mai mare de 1 000 daN/cm², în două alternative:

a) forța este aplicată pe axa Oz;

b) forța este aplicată pe axa Oy.

Rezolvare. Pentru profilul I 16, se găsește în *anexa 10*: $A = 22{,}8$ cm²; $W_z = 117$ cm³; $W_y = 14{,}8$ cm³.

a) Dacă forța acționează în punctul A, profilul este supus la întindere și la încovoiere fața de axa y, cu un moment $M = Pe_1$:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{W_y} = \frac{P}{A} + \frac{Pe_1}{W_y}; \quad 1\,000 = \frac{10\,000}{22{,}8} + \frac{10\,000\,e_1}{14{,}8}.$$

Din ecuația de mai sus rezultă că valoarea maximă a excentricității este:

$$e_1 = 0{,}83 \text{ cm}.$$

b) Dacă forța lucrează în punctul B, profilul este supus la întindere și încovoiere după axa z, cu un moment $M = Pe_2$:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{W_z} = \frac{P}{A} + \frac{Pe_2}{W_z},$$

$$1\,000 = \frac{10\,000}{22{,}8} + \frac{10\,000\,e_2}{117},$$

$$e_2 = 6{,}57 \text{ cm}.$$

8.14. Se dă o secțiune pătrată a unei bare de oțel, supusă unei forțe excentrice $P = 60$ kN. Să se calculeze eforturile unitare care apar în punctele A și B, figura 8.14, în trei cazuri:

a) forța se aplică în punctul *1*;

b) forța se aplică în punctul *2*;

c) forța se aplică în punctul *3*.

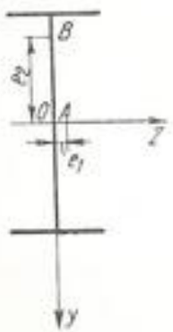


Fig. 8.13

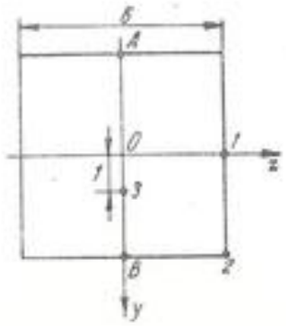


Fig. 8.14

Rezolvare. $A = 36$ cm²; $W_z = W_y = 36$ cm³.

a) Cînd forța P este aplicată în punctul *1*, există și încovoiere numai față de axa AB. Cum aceasta este chiar axă neutră, în A și B nu apare încovoiere. Rămîne numai compresiunea:

$$\sigma_A = \sigma_B = \frac{-P}{A} = -\frac{6\,000}{36} = -167 \text{ daN/cm}^2.$$

b) Punctul *2* este situat excentric față de axa Oz (el este excentric și față de Oy, dar punctele A, B sînt în acest caz pe axa neutră), forța producînd un moment încovoietor $M_z = 3 \cdot 6\,000$ daNcm:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{M_z}{W_z} = -167 + 500 = 333 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{M_z}{W_z} = -167 - 500 = -667 \text{ daN/cm}^2.$$

c) Punctul *3* este excentric față de Oz și dă un moment $M_z = 1 \cdot 6\,000$ daNcm:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{M_z}{W_z} = -167 + 167 = 0,$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{M_z}{W_z} = -167 - 167 = -334 \text{ daN/cm}^2.$$

8.15. Stîlpul de cărămidă din figura 8.15, avînd secțiunea un pătrat cu latura $a = 48$ cm, este solicitat la compresiune de forța $P = 100$ kN. Se cere:

a) să se afle cît de mare poate fi excentricitatea e ca să nu se depășească rezistența admisibilă $\sigma_a = 10$ daN/cm²;

b) cît de mare poate fi excentricitatea, ca în stîlp să nu apară eforturi unitare de întindere și care este efortul unitar maxim în acest caz?

Rezolvare. a) Se aplică formula (8.1), în care momentul încovoietor este $M = Pe$:

$$\sigma_a = -\frac{P}{A} - \frac{M}{W} = -\frac{10\,000}{48^2} - \frac{10\,000\,e}{\frac{48^3}{6}} = -10; \quad e = 10{,}45 \text{ cm}.$$

b) Pentru ca în stîlp să nu apară eforturi unitare de întindere:

$$e \leqslant \frac{a}{6} = \frac{48}{6} = 8 \text{ cm}.$$

Pentru această excentricitate, în punctul A efortul unitar este nul, iar în B are valoarea:

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{Pe}{W} = -\frac{10\,000}{48^2} - \frac{10\,000 \cdot 8}{\frac{48^3}{6}} = -8{,}7 \text{ daN/cm}^2.$$

Se obține o valoare inferioară rezistenței admisibile, întrucît excentricitatea este mai mică decît cea din cazul precedent.

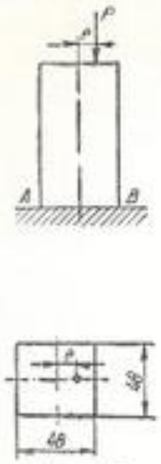


Fig. 8.15

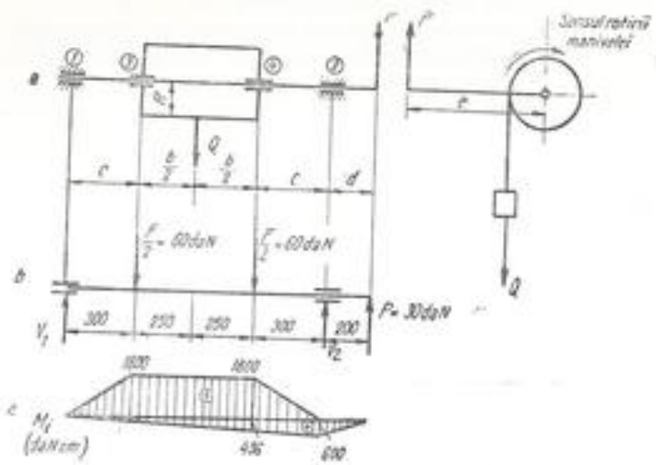


Fig. 8.16

8.16. La vinciul din figura 8.16, *a* se dă:

$Q = 100$ daN; $b = 50$ cm; $c = 30$ cm; $d = 20$ cm; $e = 60$ cm;

$R = 15$ cm. Se cere:

a) să se calculeze forța P necesară ridicării, în perioada de accelerare a sarcinii Q, cu o accelerație $a = 2$ m/s²;

b) să se dimensioneze arborele cu $\sigma_a = 600$ daN/cm², considerînd sarcina aplicată în mijloc și rezemarea tobei pe arbore ca în desen.

Rezolvare. a) Forța care acționează cablul, datorită accelerării sarcinii, are valoarea:

$$F = Q\left(1 + \frac{a}{g}\right) = 100\left(1 + \frac{2}{9{,}81}\right) = 120 \text{ daN}.$$

Forța P aplicată pe manivelă este

$$P = F\frac{R}{e} = 120 \cdot \frac{15}{60} = 30 \text{ daN}.$$

b) Solicitarea maximă a arborelui are loc cînd manivela ocupă poziția orizontală din figură, deci cînd forța P este dirijată de jos în sus. Mutînd forța P în extremitatea liberă a arborelui, el este solicitat la încovoiere numai în planul vertical de forțele $\frac{F}{2}$, $\frac{F}{2}$ și P, iar la răsucire de cuplul Pe.

Construind diagrama de momente prin metoda suprapunerii efectelor (fig. 8.16,*c*), rezultă momentul încovoietor maxim:

$$M_i = 60 \cdot 30 + 30 \cdot 20 \cdot \frac{80}{110} = 1\,800 + 436 = 2\,236 \text{ daNcm}.$$

Momentul de răsucire este constant pe intervalul *2—4* și are valoarea:

$$M_t = 30 \cdot 60 = 1\,800 \text{ daNcm}.$$

Momentul încovoietor echivalent după formula (8.7) este:

$$M_{ie} = \frac{1}{2}\left(M_i + \sqrt{M_i^2 + M_t^2}\right) = \frac{1}{2}\left(2\,236 + \sqrt{2\,236^2 + 1\,800^2}\right) = 2\,553 \text{ daNcm}.$$

Arborele se dimensionează cu formula:

$$W_{nec} = \frac{M_{ie}}{\sigma_a} = \frac{2\,553}{600} \approx 4{,}26 \text{ cm}^3 = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Rezultă:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 4{,}26}{3{,}14}} = 3{,}52 \text{ cm}.$$

Se alege diametrul $d = 35$ mm.

8.17. Dacă în colțul secțiunii pătrate din figura 8.17 se aplică o forță excentrică P, să se arate în ce punct al secțiunii se produce efortul unitar maxim și care este valoarea acestuia. Aplicație numerică: $P = 50$ kN, $a = 30$ cm.

Rezolvare. Întreaga secțiune este solicitată la compresiune prin forța P. Această forță dă și două momente încovoietoare, față de axele z și y. Punctul cel mai solicitat este D, unde toate efectele se adună, fiind de compresiune. Efortul unitar maxim, făcînd abstracție de semn, este:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{P}{a^2} + \frac{P\frac{a}{2}}{\frac{a^3}{6}} + \frac{P\frac{a}{2}}{\frac{a^3}{6}} = \frac{7P}{a^2},$$

$$\sigma = \frac{7 \cdot 5\,000}{30^2} \approx 39 \text{ daN/cm}^2.$$

8.18. Să se determine sîmburele central pentru secțiunea din figura 8.18, unde cotele sînt date în cm.

Rezolvare. Determinăm, în prealabil, centrul de greutate. Coordonatele sale față de sistemul de axe ZOY vor fi:

$$Z_G = Y_G = \frac{10 \cdot 40 \cdot 20 + 30 \cdot 10 \cdot 5}{10 \cdot 40 + 30 \cdot 10} = 13{,}57 \text{ cm}.$$

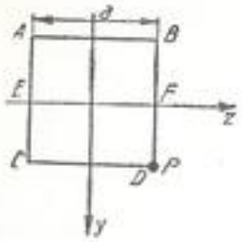


Fig. 8.17

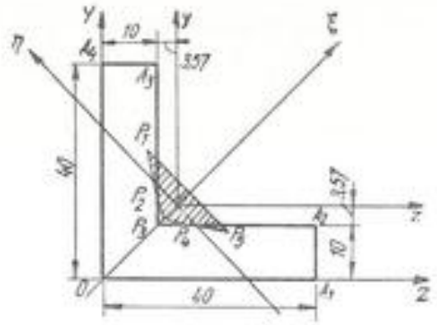


Fig. 8.18

Față de sistemul de axe Gzy, ce trece prin centrul de greutate, momentele de inerție sînt:

$$I_z = I_y = \frac{10 \cdot 40^3}{12} + 10 \cdot 40 \cdot 6{,}43^2 + \frac{30 \cdot 10^3}{12} + 30 \cdot 10 \cdot 8{,}57^2 = 94\,400 \text{ cm}^4,$$

$$I_{zy} = -10 \cdot 40 \cdot 6{,}43 \cdot 8{,}57 - 30 \cdot 10 \cdot 11{,}43 \cdot 8{,}57 = -51\,430 \text{ cm}^4.$$

Trecînd la axele principale de inerție $G\xi\eta$, care fac cu vechile axe unghiuri de 45°, se obține (v. relația 2.13):

$$I_\xi = I_z \cos^2 45° + I_y \sin^2 45° - I_{zy} \sin 90° = 2 \cdot 94\,400 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 51\,430 = 145\,830 \text{ cm}^4;$$

$$I_\eta = I_z \cos^2 135° + I_y \sin^2 135° - I_{zy} \sin 270° = 2 \cdot 94\,400 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 51\,430 = 43\,000 \text{ cm}^4.$$

Se vor considera ca poziții limită ale axei neutre dreptele OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 și A_4O. Din motive de simetrie se vor considera doar primele trei drepte. Coordonatele punctelor O, A_1 și A_2 sînt:

$$O;\quad \xi = -13{,}57\sqrt{2} = -19{,}1 \text{ cm};\quad \eta = 0,$$

$$A_1;\quad \xi = -19{,}1 + 40\frac{\sqrt{2}}{2} = +9{,}2 \text{ cm};\quad \eta = -40\frac{\sqrt{2}}{2} = -28{,}3 \text{ cm},$$

$$A_2;\quad \xi = 9{,}2 + 10\frac{\sqrt{2}}{2} = +16{,}3 \text{ cm};\quad \eta = -28{,}3 + 10\frac{\sqrt{2}}{2} = -21{,}2 \text{ cm}.$$

Ecuațiile dreptelor OA_1, A_1A_2, A_2A_3 vor fi:

$$(OA_1);\quad \frac{\xi + 19{,}1}{9{,}2 + 19{,}1} = \frac{\eta}{-28{,}3} \quad \text{sau} \quad \xi + \eta + 19{,}1 = 0,$$

$$(A_1A_2);\quad \frac{\xi - 16{,}3}{9{,}2 - 16{,}3} = \frac{\eta + 21{,}2}{-28{,}3 + 21{,}2} \quad \text{sau} \quad \xi - \eta - 37{,}5 = 0,$$

$$(A_2A_3);\quad \xi - 16{,}3 = 0.$$

Antipolurile acestor drepte au coordonatele:

$$P_1, \text{ pentru dreapta } (OA_1):\quad \xi = -\frac{7{,}83^2}{-19{,}1} = +3{,}21 \text{ cm},$$

$$\eta = -\frac{14{,}4^2}{-19{,}1} = +10{,}8 \text{ cm};$$

$$P_2, \text{ pentru dreapta } (A_1A_2):\quad \xi = -\frac{7{,}83^2}{37{,}5} = -1{,}63 \text{ cm},$$

$$\eta = -\frac{14{,}4^2}{-37{,}5} = +5{,}53 \text{ cm};$$

$$P_3, \text{ pentru dreapta } (A_2A_3):\quad \xi = -\frac{7{,}83^2}{16{,}3} = -3{,}76 \text{ cm}, \eta = 0.$$

Punctele P_1, P_2, P_3 au fost însemnate în figura 8.18. În aceeași figură au fost însemnate și punctele P_4 și P_5, simetrice punctelor P_2 și P_1 față de axa $G\xi$. Unind în ordine $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_1$, se obține un pentagon care limitează simburele central al secțiunii.

8.19. Un zid de sprijin al unui masiv de pămînt are forma din figura 8.19, cu dimensiunile $h = 3$ m, $b = 2$ m, și este făcut dintr-un material cu greutatea specifică $\gamma = 20$ kN/m³. Împingerea pămîntului dă, pe unitatea de lungime a zidului, o rezultantă $H = 30$ kN/m, aplicată la înălțimea $h/3$ de la baza zidului. Se cere să se calculeze eforturile unitare maxim și minim care se nasc pe baza zidului.

Rezolvare. Considerînd o porțiune de zid, perpendiculară pe desen, de 1 m lungime, greutatea sa este:

$$G = bh \cdot 1 \cdot \gamma = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 20 = 120 \text{ kN} = 12\,000 \text{ daN}.$$

Pe lungimea de 1 m, forța orizontală este $H = 30$ kN.

Momentul încovoietor care solicită baza zidului este:

$$M = H\frac{h}{3} = 30 \cdot \frac{3}{3} = 30 \text{ kNm} = 300\,000 \text{ daNcm}.$$

Secțiunea care suportă solicitarea maximă de încovoiere este baza zidului, de înălțime (paralel cu forța H) $b = 2$ m și lățime 1 m. Punctul cel mai solicitat este A, unde eforturile unitare datorite încovoierii produse de H și compresiunii produse de G sînt de același semn:

$$\sigma_A = -\frac{G}{A} - \frac{M}{W} = -\frac{12\,000}{200 \cdot 100} - \frac{300\,000}{\frac{100 \cdot 200^2}{6}} =$$

$$= -0{,}6 - 0{,}45 = -1{,}05 \text{ daN/cm}^2.$$

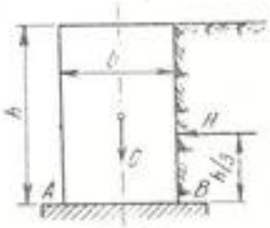


Fig. 8.19

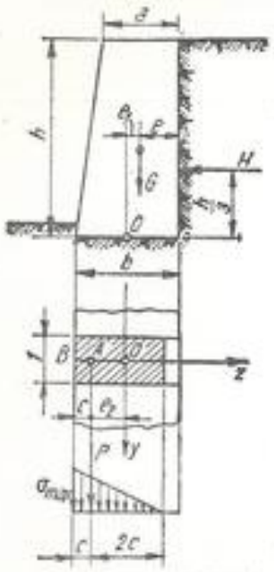


Fig. 8.20

În punctul B, rezultă:

$$\sigma_B = -\frac{G}{A} + \frac{M}{W} = -0{,}6 + 0{,}45 = -0{,}15 \text{ daN/cm}^2.$$

Se vede că pe întreaga bază a zidului apar numai eforturi unitare de compresiune, deci toată secţiunea este activă.

8.20. Un zid de sprijin al unui masiv de pămînt are secţiunea trapezoidală ca în figura 8.20, cu dimensiunile: $a = 1{,}5$ m, $b = 2{,}5$ m, $h = 6$ m, iar greutatea sa specifică este $\gamma = 22$ kN/m³. Împingerea pămîntului se consideră că variază liniar, fiind nulă la nivelul solului. În acest caz, forţa de împingere $H = 100$ kN/m se aplică la $h/3$ de la baza zidului. Să se verifice efortul unitar maxim pe bază, comparîndu-se cu rezistenţa admisibilă la compresiune a terenului $\sigma_a = 2{,}5$ daN/cm². Să se stabilească mărimea secţiunii active a bazei zidului.

Rezolvare. Pe lungimea de 1 m a zidului, forţa orizontală este $H = 100$ kN. Greutatea G a zidului, pe o lungime de 1 m, perpendicular pe desen este:

$$G = \frac{a+b}{2} h \cdot 1 \cdot \gamma = \frac{1{,}5 + 2{,}5}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot 22 = 264 \text{ kN}.$$

Distanţa e, care determină poziţia centrului de greutate al trapezului, este:

$$e = \frac{1}{3} \frac{b^2 + ab + a^2}{b + a} = \frac{1}{3} \frac{2{,}5^2 + 1{,}5 \cdot 2{,}5 + 1{,}5^2}{2{,}5 + 1{,}5} = 1{,}02 \text{ m},$$

$$e_1 = \frac{b}{2} - e = \frac{2{,}5}{2} - 1{,}02 = 0{,}23 \text{ m}.$$

Momentul pe care forţele G şi H îl dau faţă de punctul 0, centrul de greutate al bazei zidului, are valoarea:

$$M_0 = H\frac{h}{3} - Ge_1 = 10\,000 \cdot \frac{6}{3} - 26\,400 \cdot 0{,}23 = 13\,930 \text{ daNm}.$$

Acţiunea forţei verticale şi a momentului M_0 poate fi înlocuită prin acţiunea unei forţe $P = G$, aplicată excentric în punctul A. Excentricitatea se determină din egalitatea momentelor:

$$e_2 P = M_0; \quad e_2 = \frac{M_0}{P} = \frac{M_0}{G} = \frac{13\,930}{26\,400} = 0{,}528 \text{ m}.$$

În acest caz, distanţa de la forţa P la marginea secţiunii, adică segmentul $c = AB$, este:

$$c = \frac{b}{2} - e_2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 - 0{,}528 = 0{,}722 \text{ m}.$$

Se vede că $c < b/3$, ceea ce face ca axa neutră să taie secţiunea. Întreaga secţiune activă are lungimea:

$$3c = 3 \cdot 0{,}722 = 2{,}166 \text{ m}.$$

Conform relaţiei (8.4) (ţinînd seama însă de notaţiile de pe figură), efortul unitar maxim în punctul B este:

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3 \cdot 100 \cdot c} = \frac{2 \cdot 26\,400}{3 \cdot 100 \cdot 72{,}2} = 2{,}44 \text{ daN/cm}^2.$$

Se vede că acest efort unitar este aproape egal cu rezistenţa admisibilă a terenului, deci construcţia este bine dimensionată.

8.21. Un baraj de secţiune triunghiulară, avînd înălţimea H şi baza $B = \lambda H$, este acţionat de greutatea proprie şi de presiunea apei (Fig. 8.21). Cunoscînd greutatea specifică γ a apei şi γ_1 a materialului din care este făcut barajul, se cere să se determine λ (raportul între baza şi înălţimea barajului) în aşa fel încît în toate secţiunile orizontale duse prin baraj eforturile unitare normale să fie constante.

Rezolvare. Este necesar ca momentul încovoietor să fie nul în toate secţiunile orizontale.

Forţele care acţionează pe un plan la adîncimea x sînt:

— greutatea proprie: $G = \gamma_1 \frac{\lambda x x}{2} = \frac{\gamma_1 \lambda x^2}{2}$;

— presiunea apei: $P = \gamma x \cdot \frac{x}{2} = \frac{\gamma x^2}{2}$.

Momentul încovoietor în raport cu centrul de greutate al secţiunii orizontale va fi:

$$M = P\frac{x}{3} - G\frac{\lambda \cdot x}{6} = \frac{\gamma x^3}{6} - \frac{\gamma_1 \lambda^2 x^3}{12}.$$

Din condiţia $M = 0$ se deduce:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma_1}}.$$

Pentru: $\gamma = 10$ kN/m³ şi $\gamma_1 = 22$ kN/m³ (beton simplu) se găseşte

$$\lambda_1 \approx 0{,}95.$$

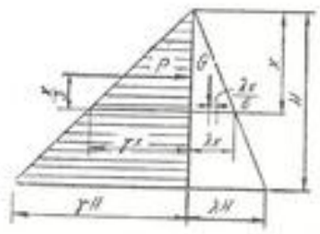


Fig. 8.21

8.22. Să se determine eforturile unitare pe terenul de fundație al unui stîlp, știind că la nivelul superior al fundației acționează forțele $P = 160$ kN și $H = 7$ kN (Fig. 8.22). Blocul de fundație este alcătuit din beton simplu, avînd greutatea specifică $\gamma = 22$ kN/m³.

Rezolvare. Greutatea G a blocului de fundație este:

$$G = \left(1{,}30 \cdot 0{,}40 + \frac{1{,}30 + 0{,}50}{2} \cdot 0{,}80\right) \cdot 0{,}65 \cdot 22 = 17{,}7 \text{ kN}.$$

Reducînd sistemul de forțe în raport cu centrul de greutate al suprafeței de sprijin se obține:

$$N = P + G = 160 + 17{,}7 = 177{,}7 \text{ kN},$$
$$M = 7 \cdot (0{,}80 + 0{,}40) = 8{,}4 \text{ kNm}.$$

Excentricitatea este:

$$e = \frac{M}{N} = \frac{8{,}4}{177{,}7} = 0{,}0473 \text{ m} < \frac{1{,}30}{6},$$

deci eforturile unitare vor fi de compresiune pe toată secțiunea. Eforturile unitare maxime și minime vor fi:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{177{,}7}{1{,}3 \cdot 0{,}65} + \frac{8{,}4}{\frac{0{,}65 \cdot 1{,}3^2}{6}} = 210 + 47 = 257 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 2{,}57 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_{min} = \frac{N}{A} - \frac{M}{W} = 210 - 47 = 163 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 1{,}63 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Diagrama variației eforturilor unitare este arătată în figura 8.22.

8.23. O grindă este solicitată de o forță axială de întindere N și de un cuplu M_2 aplicat pe reazemul 2, ca în figura 8.23. Se cere săgeata și momentul încovoietor la mijlocul grinzii.

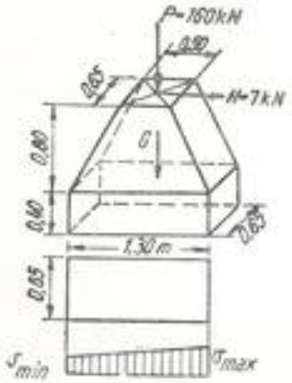


Fig. 8.22

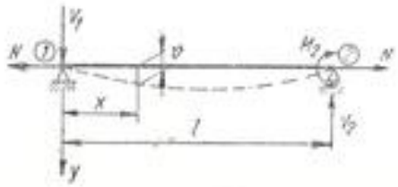


Fig. 8.23

Rezolvare. Reacțiunea în reazemul 1, ținînd seamă de sensul din figură, are valoarea:

$$V_1 = \frac{M_2}{l}.$$

Momentul încovoietor într-o secțiune oarecare are expresia:

$$M_x = -\frac{M_2}{l} x - Nv. \tag{1}$$

Introducînd expresia (1) în ecuația diferențială a fibrei medii deformate, se obține:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -M_x = \frac{M_2}{l} x + Nv, \tag{2}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{N}{EI} v = \frac{M_2}{lEI} x.$$

Notînd:

$$k = \frac{N}{EI} \tag{3}$$

și înlocuind în ecuația (2), se obține:

$$\frac{d^2v}{dx^2} - k^2 v = \frac{k^2 M_2}{lN} x. \tag{4}$$

Integrala generală a ecuației diferențiale (4) este de forma:

$$v = C_1 \, shkx + C_2 chkx + v_1, \tag{5}$$

unde v_1 este o integrală particulară a ecuației (4), care, în acest caz, este de forma:

$$v_1 = -\frac{M_2}{lN} x. \tag{6}$$

Integrala generală devine:

$$v = C_1 \, sh \, kx + C_2 chkx - \frac{M_2}{lN} x. \tag{7}$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină punînd în ecuația (7) condițiile la limită:

1) În reazemul 1, săgeata este nulă, deci pentru $x = 0$, $v = 0$. Ținînd seamă că $sh \; 0 = 0$ și $ch \; 0 = 1$, se obține:

$$C_2 = 0.$$

2) În reazemul 2, săgeata este nulă, deci pentru $x = l$, $v = 0$:

$$0 = C_1 \, shkl - \frac{M_2 l}{lN}; \quad C_1 = \frac{M_2}{N} \frac{1}{sh \, kl}.$$

Ecuaţia fibrei medii deformate devine:

$$v = \frac{M_2}{N}\frac{sh\ kx}{sh\ kl} - \frac{M_2}{lN}\ x = \frac{M_2}{N}\left[\frac{sh\ kx}{sh\ kl} - \frac{x}{l}\right]. \qquad (8)$$

Notînd $kl = 2u$, se obţine:

$$v = \frac{M_2 l^2}{EI(2u)^2}\left[\frac{sh\ kx}{sh\ (2u)} - \frac{kx}{2u}\right]. \qquad (9)$$

Săgeata la mijlocul grinzii se află înlocuind $x = l/2 = u/k$ în formula (9):

$$v_{x=\frac{l}{2}} = \frac{M_2 l^2}{EI(2u)^2}\left[\frac{sh\ u}{sh\ (2u)} - \frac{1}{2}\right] = \frac{M_2 l^2}{2EI(2u)^2}\left[\frac{1}{ch\ u} - 1\right]. \qquad (10)$$

unde s-a înlocuit $sh\ (2u) = 2\ sh\ u \cdot ch\ u$.

Pentru determinarea momentului încovoietor într-o secţiune oarecare, se înlocuieşte expresia (8) în (1):

$$M_x = -\frac{M_2}{l}\ x - Nv = -\frac{M_2}{l}\ x - \frac{M_2}{N}\frac{sh\ kx}{sh\ kl}\ N + \frac{M_2}{lN}\ xN =$$

$$= -M_2\frac{sh\ kx}{sh\ kl} = -M_2\frac{sh\ kx}{sh(2u)}.$$

Momentul încovoietor în mijlocul grinzii se obţine înlocuind $x = l/2 = u/k$:

$$M_{x=\frac{l}{2}} = -M_2\frac{sh\ u}{sh(2u)} = -\frac{M_2}{2\ ch\ u}.$$

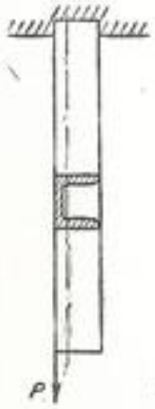


Fig. 8.24, a

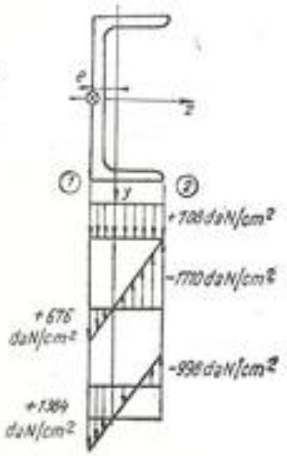


Fig. 8.24, b

8.24. Să se verifice profilul ⋃ 16 din figura 8.24,*a*, ştiind că este solicitat de o forţă $P = 17\,000$ daN, acţionînd în marginea sa, iar $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

Rezolvare. Profilul este solicitat la întindere şi la încovoiere, respectiv cu eforturile:

$$N = P = 17\,000 \text{ daN};$$
$$M_y = Pe = 17\,000 \cdot 1{,}84 = 31\,300 \text{ daNcm}.$$

Axa Oy nefiind axă de simetrie, se va utiliza formula generală:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y z}{I_y}. \qquad (1)$$

Pentru a se afla eforturile unitare maxime, va trebuie ca în formula (1) să se înlocuiască z cu valorile maxime e şi $(a-e)$. În punctul *1* al secţiunii, care se găseşte la distanţa e de axa neutră, eforturile unitare se adună, iar în punctul *2*, care se găseşte la distanţa $(a-e)$ de axa neutră, eforturile unitare se scad (Fig. 8.24, *b*).

Rezultă:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M_y e}{I_y} = \frac{17\,000}{24} + \frac{31\,300 \cdot 1{,}84}{85{,}3} = 708 + 676 = 1\,384 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M_y(a-e)}{I_y} = \frac{17\,000}{24} - \frac{31\,300 \cdot (6{,}5 - 1{,}84)}{85{,}3} =$$

$$= 708 - 1\,710 = -1\,002 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar maxim, σ_1, este mai mic decît rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 1\,400$ da N/cm², deci profilul rezistă în bune condiţii.

Observaţie. Aplicarea directă a relaţiei (8.1) ar fi dus la un rezultat eronat. Într-adevăr, această relaţie, scrisă în cazul nostru sub forma:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y},$$

presupune că, în punctul *2*, cel mai depărtat de axa neutră, eforturile unitare datorită efortului axial şi momentului încovoietor se adună. Or, în realitate, în punctul *2* eforturile unitare se scad, aşa cum s-a arătat mai sus.

8.25. Arborele unei elice de avion se roteşte cu $n = 2\,000$ rot/min şi transmite o putere $N = 750$ kW. Ştiind că forţa de tracţiune a elicei este $F = 750$ daN şi diametrul arborelui este $d = 7$ cm, să se calculeze efortul unitar maxim care se produce în arbore.

Rezolvare. Momentul de răsucire al arborelui este:

$$M_t = 95\,500\,\frac{N}{n} = 95\,500\,\frac{750}{2\,000} = 35\,810 \text{ daNcm}.$$

Eforturile unitare produse de F şi M_t sînt:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 750}{\pi \cdot 7^2} = 20 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{16 \cdot 35\,810}{\pi \cdot 7^3} = 532 \text{ daN/cm}^2.$$

Făcînd verificările cu cele patru formule ale teoriilor de rezistenţă (8.11), (8.12), (8.13) şi (8.15), se obţine:

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2}\left(20 + \sqrt{20^2 + 4 \cdot 532^2}\right) = 542 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{ech} = 0{,}35 \cdot 20 + 0{,}65\sqrt{20^2 + 4 \cdot 532^2} = 699 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{20^2 + 4 \cdot 532^2} = 1\,064 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{20^2 + 3 \cdot 532^2} = 921 \text{ daN/cm}^2.$$

Cifra obţinută trebuie să fie în toate cazurile mai mică decît σ_a. Valorile obţinute diferă atît de mult una de alta, deoarece σ este aproape neglijabil. Solicitarea este, aproximativ, de forfecare pură, unde între diferitele teorii există diferenţe de la simplu la dublu.

8.26. Să se verifice bara cu secţiune circulară din figura 8.26, *a*, solicitată de forţa verticală P, acţionînd la distanţa r de axa barei. Se dă: $d = 4$ cm; $l = 0{,}5$ m; $r = 40$ cm; $P = 70$ daN.

Rezolvare. Datorită forţei P apare un moment de răsucire:

$$M_t = Pr = 70 \cdot 40 = 2\,800 \text{ daNcm},$$

constant pe toată lungimea barei.

Forţa P produce şi un moment încovoietor cu valoarea maximă în încastrare:

$$M_{i\,max} = -Pl = -70 \cdot 50 = -3\,500 \text{ daNcm}.$$

În figura 8.26, *b* s-au reprezentat diagramele M_t, M_i, T. Secţiunea periculoasă este în încastrare. Efortul unitar datorit încovoierii este:

$$\sigma = \frac{M_i}{W} = \frac{3\,500}{\frac{\pi \cdot 4^3}{32}} = 558 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar tangenţial maxim datorit răsucirii este:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{2\,800}{\frac{\pi \cdot 4^3}{16}} = 223 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar echivalent, după cele patru teorii de rezistenţă, este:

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2}\left(558 + \sqrt{558^2 + 4 \cdot 223^2}\right) = 636 \text{ daN/cm}^2, \qquad (I)$$

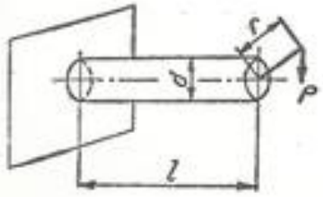


Fig. 8.26, *a*

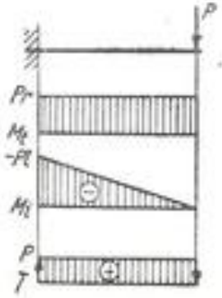


Fig. 8.26, *b*

$$\sigma_{ech} = 0{,}35 \cdot 558 + 0{,}65\sqrt{558^2 + 4 \cdot 223^2} = 660 \text{ daN/cm}^2, \qquad (II)$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{558^2 + 4 \cdot 223^2} = 714 \text{ daN/cm}^2, \qquad (III)$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{558^2 + 3 \cdot 223^2} = 678 \text{ daN/cm}^2. \qquad (IV)$$

Dacă rezistenţa admisibilă este, de exemplu, $\sigma_a = 800$ daN/cm², bara rezistă în bune condiţii.

8.27. Să se dimensioneze arborele din figura 8.27, ştiind că transmite o putere $N = 112{,}5$ kW, sub o turaţie $n = 250$ rot/min. În capăt, arborele are un volant de greutate $G = 1\,000$ daN. Se dă $\sigma_a = 600$ daN/cm².

Rezolvare. Arborele este solicitat de un moment de răsucire:

$$M_t = 95\,500\,\frac{N}{n} = 95\,500\,\frac{112{,}5}{250} = 43\,000 \text{ daNcm}.$$

Datorită greutăţii volantului, în reazemul *2* se produce un moment încovoietor negativ, avînd valoarea:

$$M_i = 50 \cdot 1\,000 = 50\,000 \text{ daN cm}.$$

Momentul încovoietor echivalent după teoria *I* de rezistenţă este:

$$M_{ie} = \frac{1}{2}\left(M_i + \sqrt{M_i^2 + M_t^2}\right) = \frac{1}{2}\left(50\,000 + \sqrt{50\,000^2 + 43\,000^2}\right) =$$

$$= 58\,000 \text{ daNcm}.$$

Se dimensionează arborele:

$$W_{nec} = \frac{M_{ie}}{\sigma_a} = \frac{58\,000}{600} = 96{,}6 \text{ cm}^3 = \frac{\pi d^3}{32}; \quad d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 96{,}6}{\pi}} = 9{,}95 \text{ cm}.$$

Se ia un diametru normalizat, conform *anexei 2*:

$$d = 10 \text{ cm}.$$

8.28. Să se dimensioneze arborele din figura 8.28, *a*, solicitat, cum se vede în desen, prin forţele din curele, diametrele celor două roţi fiind egale. Se dă $\sigma_a = 800$ daN/cm² şi se cere să se facă dimensionarea folosind teoria *I* de rezistenţă.

Rezolvare. Pentru roata solicitată prin forţele orizontale, făcînd reducerea în raport cu centrul *O*, sistemul celor două forţe se poate înlocui prin-

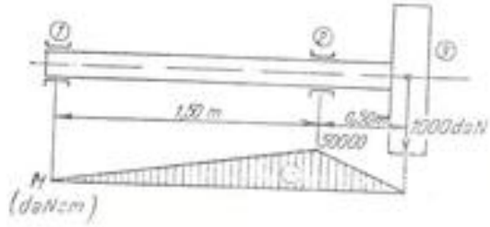


Fig. 8.27

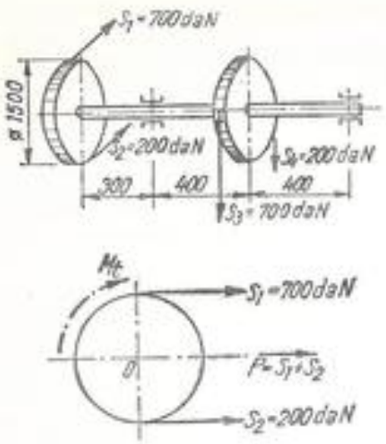


Fig. 8.28, *a*

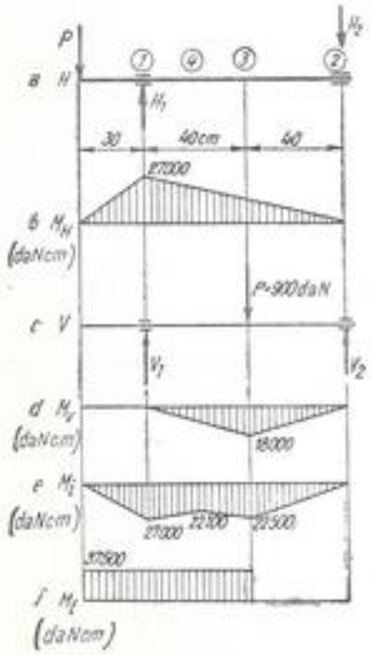


Fig. 8.28, *b*

tr-o forță $P = S_1 + S_2$ aplicată în 0 și printr-un cuplu de răsucire $M_t = (S_1 - S_2)R$, unde $R = 75$ cm:

$$P = S_1 + S_2 = 700 + 200 = 900 \text{ daN},$$

$$M_t = (S_1 - S_2)R = (700 - 200)\,75 = 37\,500 \text{ daNcm}.$$

Forțele de pe cealaltă roată se compun la fel și dau o rezultantă verticală și un moment de răsucire de aceeași valoare. Arborele este deci solicitat de un moment de răsucire constant M_t între cele două roți, o forță verticală de 900 daN pe roata din dreapta și una orizontală de 900 daN pe roata din stînga.

Se construiesc separat diagramele momentelor încovoietoare pentru forțele orizontale (Fig. 8.28,*b*) și verticale (8.28,*d*). Forța orizontală P din figura 8.28, *a* dă în reazemul *1* un moment:

$$M_{1H} = 900 \cdot 30 = 27\,000 \text{ daN cm},$$

și în reazemul *2* un moment nul, diagrama momentelor forțelor orizontale fiind cea din figura 8.28, *b*.

Forței verticale P din figura 8,28, *c* îi corespunde diagrama din figura 8.28, *d*, cu momentul maxim:

$$M_{max\,V} = \frac{900 \cdot 80}{4} = 18\,000 \text{ daNcm}.$$

Se compun diagramele M_H și M_V, spre a găsi secțiunea unde momentul încovoietor M_i este maxim.

$$M_{i3} = \sqrt{18\,000^2 + 13\,500^2} = 22\,500 \text{ daNcm}.$$

Diagrama din figura 8.28, *e* arată că momentul încovoietor este maxim în reazemul *1*.

$$M_{ie} = \frac{1}{2}\left(M_i + \sqrt{M_i^2 + M_t^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(27\,000 + \sqrt{27\,000^2 + 37\,500^2}\right) =$$

$$= 36\,650 \text{ daNcm}.$$

Se face dimensionarea arborelui:

$$W_{nec} = \frac{M_{ie}}{\sigma_a} = \frac{30\,650}{300} = 45{,}8 \text{ cm}^3 = \frac{\pi d^3}{32};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 45{,}8}{\pi}} = 7{,}76 \text{ cm}.$$

Se ia diametrul normalizat, după *anexa 2*:

$$d = 80 \text{ mm}.$$

8.29. Să se rezolve problema 8.28 dacă în locul roților de curea sînt două tobe, fiecare de greutate $G = 100$ daN, acționate de cîte un cablu cu o tensiune $S = 500$ daN.

Rezolvare. În acest caz, de pe tobă se desfășoară un singur fir și tensiunea sa S, aplicată tangențial, se înlocuiește prin forța S în centrul roții și printr-un moment de răsucire:

$$M_t = SR = 500 \cdot 75 = 37\,500 \text{ daNcm}.$$

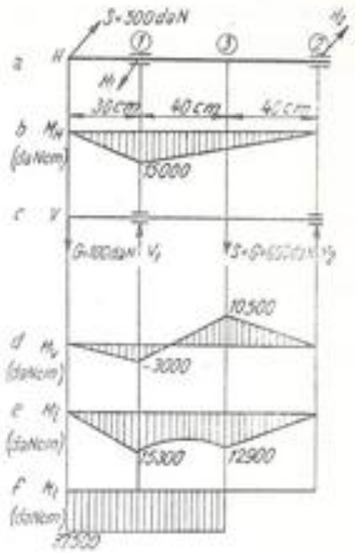


Fig. 8.29

Diagrama momentelor încovoietoare, date de forțele orizontale, este cea din figura 8.29,*b*.

În figura 8.29, *c* sînt trecute sarcinile verticale. Reacțiunea în reazemul *1* este:

$$V_1 = \frac{100 \cdot 110 + 600 \cdot 40}{80} = 437{,}5 \text{ daN}.$$

Momentele încovoietoare:

$$M_1 = -100 \cdot 30 = -3\,000 \text{ daNcm}.$$

$$M_2 = -100 \cdot 70 + 437{,}5 \cdot 40 = 10\,500 \text{ daNcm}.$$

Se obține diagrama din figura 8.29, *d*. Dacă se compun cele două diagrame 8.29, *b* și 8.29, *d*, se obține diagrama din figura 8.29, *e*, care arată că momentul maxim este în reazemul *1*. Momentul încovoietor echivalent după teoria *I* de rezistență este:

$$M_{ie} = \frac{1}{2}\left(15\,300 + \sqrt{15\,300^2 + 37\,500^2}\right) = 27\,900 \text{ daN cm},$$

$$W_{nec} = \frac{M_{ie}}{\sigma} = \frac{27\,900}{800} = 34{,}9 \text{ cm}^3 = \frac{\pi d^3}{32},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 34{,}9}{\pi}} = 7{,}10 \text{ cm}; \quad d = 71 \text{ mm}.$$

Se vede că, în cazul tobelor, pentru aceeași valoare a momentului de răsucire, este necesar un diametru de arbore mai mic, cu toate că s-a luat în considerare și greutatea tobelor, pe cînd la problema precedentă greutatea roților a fost neglijată.

8.30. Să se dimensioneze arborele de la problema precedentă, dacă se face cu secțiunea inelară, avînd $d = 0{,}7\ D$.

Rezolvare. Din ecuația de dimensionare s-a obținut:

$$W_{nec} = 34{,}9 \text{ cm}^3.$$

Modulul de rezistență al secțiunii inelare este (4.6):

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32\ D} = \frac{\pi(D^4 - 0{,}7^4 D^4)}{32\ D} = 0{,}0747\ D^3.$$

Înlocuind valoarea calculată mai sus, se obține:

$$D = \sqrt[3]{\frac{34{,}9}{0{,}0747}} = 7{,}77 \text{ cm}; \quad d = 0{,}7\ D = 5{,}43 \text{ cm}.$$

Se iau valori rotunjite:

$$D = 80 \text{ mm}; \quad d = 55 \text{ mm}.$$

8.31. La mînerul din figura 8.31, *a* se dau: $P = 50$ daN; $l = 60$ cm; $a = 20$ cm; $G = 8{,}1 \cdot 10^5$ daN/cm²; $\sigma_a = 800$ daN/cm². Se cere să se dimensioneze mînerul cu secțiunea circulară, după teoria *II* de rezistență.

Rezolvare. Problema este static nedeterminată. Datorită acțiunii forței P, în încastrările A și D apar două momente de răsucire egale M_t și două momente încovoietoare. Din cauza solicitării la răsucire a barelor AB și CD, secțiunea B se răsucește față de A cu un unghi (Fig. 8.31, *b*):

$$\varphi_1 = \frac{M_t a}{G I_p}. \tag{1}$$

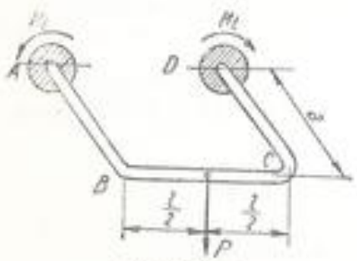


Fig. 8.31, *a*

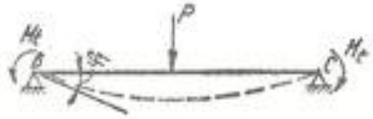


Fig. 8.31, *b*

Dacă se izolează bara BC, asupra ei lucrează:

— forța concentrată P în mijloc, care produce în B un unghi de deformație:

$$\varphi_1' = \frac{Pl^2}{16\,EI}; \tag{2}$$

— momentele M_t, care pentru bara BC devin momente încovoietoare. Ele produc în reazeme unghiurile de deformație:

$$\varphi_1'' = \frac{M_t l}{2\,EI}. \tag{3}$$

Unghiul de deformație (1), datorit răsucirii barei AB, trebuie să fie egal cu suma unghiurilor (2) și (3), datorite încovoierii barei BC:

$$\frac{M_t a}{G I_p} = \frac{Pl^2}{16\,EI} - \frac{M_t l}{2\,EI}. \tag{4}$$

Deoarece la secțiunea circulară $I_p = 2I$, relația (4) devine:

$$\frac{M_t a}{2G} + \frac{M_t l}{2E} = \frac{Pl^2}{16\,E}. \tag{5}$$

Se obține momentul necunoscut M_t:

$$M_t = \frac{Pl^2}{8\left(l + a\frac{E}{G}\right)} = \frac{50 \cdot 60^2}{8\left(60 + 20 \cdot \frac{2{,}1 \cdot 10^6}{8{,}1 \cdot 10^5}\right)} \approx 200 \text{ daNcm}.$$

Momentul încovoietor în secțiunea A este:

$$M_i = \frac{1}{2}\,Pa = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 20 = 500 \text{ daNcm}.$$

Momentul încovoietor M_{iz} este după teoria *II*:

$$M_{iz} = 0{,}35\ M_i + 0{,}65\sqrt{M_i^2 + M_t^2} = 0{,}35 \cdot 500 + 0{,}65\sqrt{500^2 + 200^2} = 525 \text{ daNcm}.$$

Se face dimensionarea barei AB:

$$W_{nec} = \frac{M_{iz}}{\sigma_a} = \frac{525}{800} = 0{,}656 \text{ cm}^3 = \frac{\pi d^3}{32},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0{,}656}{\pi}} = 1{,}89 \text{ cm}.$$

Se alege valoarea:

$$d = 20 \text{ mm}.$$

Pentru bara BC, momentul în capete are valoarea $M_B = M_t = 200$ daNcm, iar în mijloc:

$$M_{max} = -M_B + \frac{Pl}{4} = -200 + \frac{50 \cdot 60}{4} = 550 \text{ daNcm}.$$

Dacă bara BC se face tot cu diametrul de 20 mm, verificarea ei dă efortul unitar:

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{max}}{W_{ef}} = \frac{550}{\frac{\pi \cdot 2^3}{32}} = 700 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

8.32. Se dă bara cotită cu secţiunea pătrată, cu latura $a = 5$ cm, din figura 8.32. Să se verifice eforturile unitare produse de solicitările compuse pe fiecare interval.

Rezolvare. Modulul de rezistenţă la încovoiere este:

$$W = \frac{a^3}{6} = \frac{5^3}{6} = 20{,}8 \text{ cm}^3.$$

Intervalul *5—4*:

$$N = 0; \quad M_{i5} = 0; \quad M_{i4} = Hl_1 = 100 \cdot 50 = 5\,000 \text{ daNcm},$$

$$M_{t5} = M_{t4} = 0,$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i4}}{W} = \frac{5\,000}{20{,}8} = 240 \text{ daN/cm}^2.$$

Intervalul *4—3*:

$$N = 0; \quad M_{t4} = 0,$$

$$M_{iy3} = Hl_2 = 100 \cdot 60 = 6\,000 \text{ daNcm},$$

$$M_t = Hl_1 = 100 \cdot 50 = 5\,000 \text{ daNcm},$$

$$\sigma = \frac{M_{iy3}}{W} = \frac{6\,000}{20{,}8} = 288 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar tangenţial maxim, pentru secţiunea pătrată supusă la răsucire, este dat de formula (6.16):

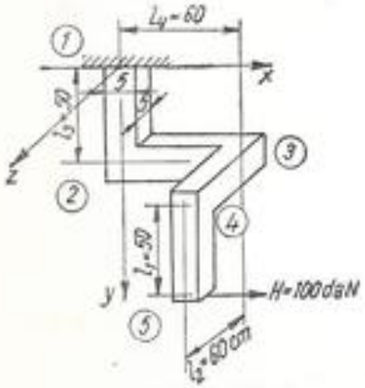


Fig. 8.32

$$\tau = \frac{M_t}{0{,}208 \cdot a^3} = \frac{5\,000}{0{,}208 \cdot 5^3} = 192 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar echivalent, după teoria *I*, este:

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(288 + \sqrt{288^2 + 4 \cdot 192^2}\right) =$$

$$= 384 \text{ daN/cm}^2.$$

Intervalul *2—3*:

$$N = 100 \text{ daN}.$$

Există momente încovoietoare faţă de două axe:

$$M_{iy3} = M_{iy2} = Hl_2 = 100 \cdot 60 = 6\,000 \text{ daNcm},$$

$$M_{iz3} = M_{iz2} = Hl_1 = 100 \cdot 50 = 5\,000 \text{ daNcm}; \quad M_t = 0,$$

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{iy3}}{W_y} + \frac{M_{iz3}}{W_z} = \frac{100}{5^2} + \frac{6\,000}{\frac{5^3}{6}} + \frac{5\,000}{\frac{5^3}{6}} = 532 \text{ daN/cm}^2.$$

Intervalul *2—1*:

$$N = 0; \quad M_{iz2} = Hl_1 = 100 \cdot 50 = 5\,000 \text{ daNcm},$$

$$M_{iz1} = H(l_1 + l_2) = 100(50 + 50) = 10\,000 \text{ daNcm},$$

$$M_t = Hl_2 = 100 \cdot 60 = 6\,000 \text{ daNcm}; \quad \sigma = \frac{M_{iz1}}{W} = \frac{10\,000}{\frac{5^3}{6}} = 480 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau = \frac{M_t}{0{,}208\, a^3} = \frac{6\,000}{0{,}208 \cdot 5^3} = 231 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) = \frac{1}{2}\left(480 + \sqrt{480^2 + 4 \cdot 231^2}\right) = 573 \text{ daN/cm}^2.$$

8.33. Să se dimensioneze, după teoria *I* de rezistenţă, o bară de oţel cu secţiunea pătrată, supusă unui moment încovoietor $M_i = 5\,000$ daNcm şi unui moment de răsucire $M_t = 8\,000$ daNcm, cu $\sigma_a = 800$ daN/cm².

Rezolvare. Se aplică formula (8.11):

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) = \sigma_a.$$

Efortul unitar maxim de încovoiere este:

$$\sigma = \frac{M_i}{W} = \frac{5\,000}{\frac{a^3}{6}} = \frac{30\,000}{a^3}.$$

Efortul unitar tangenţial maxim, pentru secţiunea pătrată, este:

$$\tau = \frac{M_t}{0{,}208\, a^3} = \frac{8\,000}{0{,}208\, a^3} = \frac{38\,400}{a^3}.$$

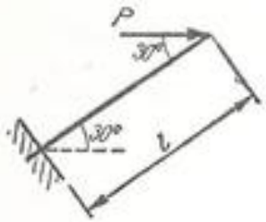


Fig. 8.34

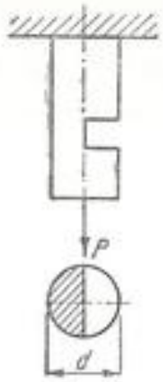


Fig. 8.35

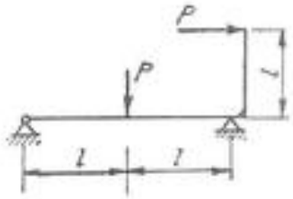


Fig. 8.36

Înlocuind în formula (8.11), se obţine:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{30\,000}{a^3}+\sqrt{\frac{30\,000^2}{a^6}+\frac{4\cdot 38\,400^2}{a^6}}\right)=800,$$

$$\frac{10^4}{2a^3}(3+\sqrt{3^2+4\cdot 3{,}84^2})=\frac{56\,300}{a^3}=800;\quad a=\sqrt[3]{\frac{56\,300}{800}}=4{,}13\text{ cm}.$$

Se alege:

$$a=42\text{ mm}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

8.34. Să se verifice eforturile unitare care se produc în bara din figura 8.34, avînd secţiunea circulară, cu $d=10$ cm, dacă $l=1$ m şi $P=500$ daN.

Răspuns: $\sigma=+260$ daN/cm².

8.35. Să se dimensioneze bara din figura 8.35, cu $P=2\,000$ daN şi $\sigma=100$ daN/cm².

Răspuns: $d=13{,}5$ cm.

8.36. La bara cotită din figura 8.36, se dau: $P=10$ kN; $a=1$ m. Se cere:

a) să se construiască diagramele N, T şi M pentru ambele porţiuni ale barei cotite;

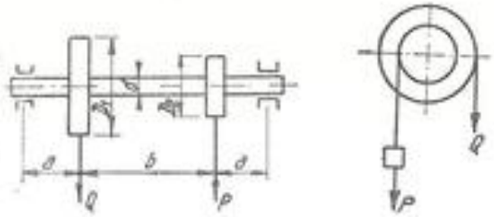


Fig. 8.37

b) să se dimensioneze bara din lemn, cu secţiunea constantă pătrată, ţinînd seamă de solicitarea compusă. Se dă $\sigma_a=100$ daN/cm².

Răspuns: $a=19$ cm.

8.37. La mecanismul de ridicare din figura 8.37 se dau:
$P=100$ daN, $a=50$ cm, $b=150$ cm, $D_1=180$ cm, $D_2=60$ cm.
Se cere să se afle sarcina Q care se poate ridica şi să se dimensioneze arborele, luînd $\sigma_a=600$ daN/cm².

Răspuns: $d=4{,}4$ cm.

CAPITOLUL 9

BARE CURBE[1]

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. Pentru un element de lungime ds din bara curbă, ca în figura 9. *a*, pe ale cărui secţiuni lucrează eforturile N, T, M, $N + dN$, $T + dT$, $M + dM$ şi încărcat cu o sarcină uniform distribuită q, se pot scrie relaţiile diferenţiale între aceste elemente, servind la construirea diagramelor N, T, M:

$$\frac{dN}{ds} = \frac{T}{R}\,;\ \frac{dT}{ds} = -q - \frac{N}{R}\,;$$

$$\frac{dM}{ds} = T. \tag{9.1}$$

2. La bara curbă plană, cu secţiune simetrică, reprezentată în figura 9. *b*, solicitată la încovoiere pură prin momentul M, efortul unitar pe un element de suprafaţă situat la distanţa y de la axa neutră este:

$$\sigma = \frac{M}{Ae}\,\frac{y}{r - y}, \tag{9.2}$$

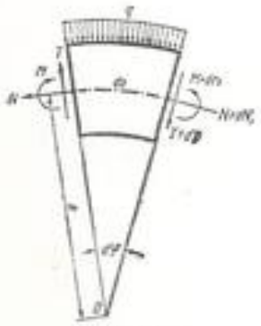


Fig. 9. *a*

în care: A este aria secţiunii, în cm²; e — excentricitatea axei neutre ($e = GN$); r — distanţa de la axa neutră la centrul de curbură al barei.

În general, se cunoaşte raza R corespunzătoare centrului de greutate al secţiunii. De pe desen rezultă:

$$r + e = R.$$

Poziţia axei neutre, respectiv valoarea excentricităţii e sau a razei r pentru diferite forme de secţiuni, se calculează conform tabelei 9.1.

[1] În scopul unei prezentări unitare a barelor curbe, s-au inclus şi unele probleme de deplasări şi sisteme static nedeterminate, care fac obiectul capitolelor 10 şi 11, unde este expusă teoria corespunzătoare lor.

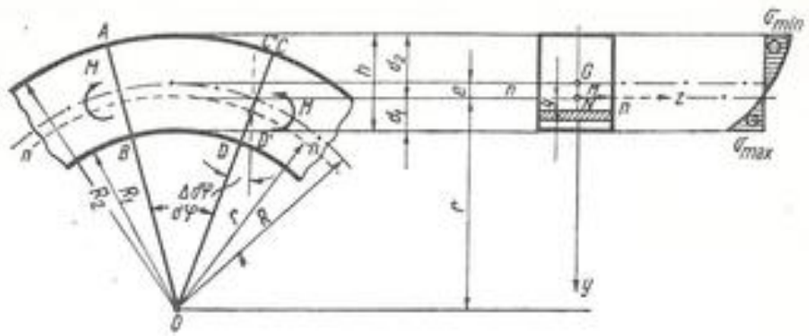


Fig. 9.*b*

Tabela 9.1

Poziţia axei neutre la diferite secţiuni ale barelor curbe

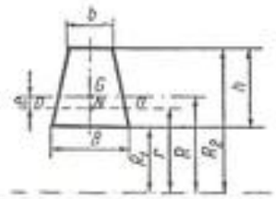
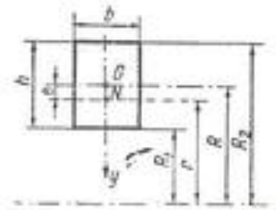
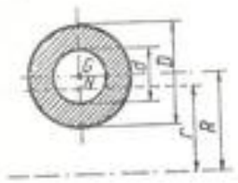
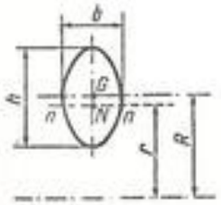
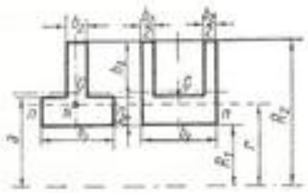
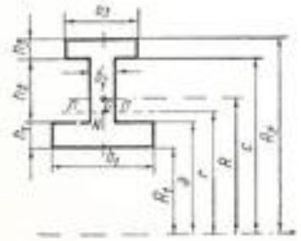
Nr. crt.	Forma secţiunii	Poziţia r a axei neutre A = aria secţiunii R = raza centrului de greutate
1		$r = \dfrac{\dfrac{B+b}{2}\,h}{\dfrac{BR_2 - bR_1}{h}\,\ln\dfrac{R_2}{R_1} - (B-b)}$
2		$r \cong \dfrac{R}{1 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{h}{2R}\right)^2}$ $e \cong \dfrac{h^2}{12\,R}$
3		$r = \dfrac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})}$

Tabela 9.1 (continuare)

Nr. crt.	Forma secţiunii	Poziţia r a axei neutre A = aria secţiunii R = raza centrului de greutate
4		$r = \dfrac{A}{2\pi\left(\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} - \sqrt{R^2 - \frac{D^2}{4}}\right)}$
5		$r = \dfrac{h^2}{4\left(2R - \sqrt{4R^2 - b^2}\right)}$
6		$r = \dfrac{b_1h_1 + b_2h_2}{b_1 \ln \frac{a}{R_1} + b_2 \ln \frac{R_2}{a}}$ $a = R_1 + h_1$
7		$r = \dfrac{b_1h_1 + b_2h_2 + b_3h_3}{b_1 \ln \frac{a}{R_1} + b_2 \ln \frac{c}{a} + b_3 \ln \frac{R_2}{c}}$

O metodă aproximativă determină poziţia axei neutre prin relaţia:

$$e = \frac{I_G}{AR}, \tag{9.3}$$

în care I_G este momentul de inerţie al secţiunii faţă de axa care trece prin centrul de greutate, paralelă cu axa neutră.

Pentru o bară de secţiune dreptunghiulară cu dimensiunile din figura 9. *c*, valoarea lui r este dată de formula:

$$r = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \tag{9.4}$$

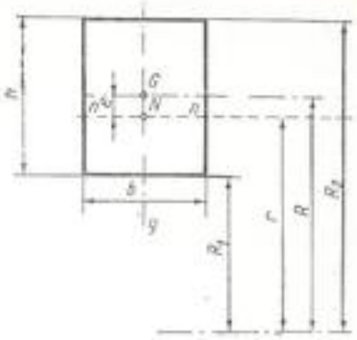


Fig. 9.*c*

care prin dezvoltarea în serie a logaritmului şi neglijarea unor termeni puţin importanţi se transformă în următoarea:

$$r = \frac{R}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R}\right)^2}. \tag{9.5}$$

Atunci excentricitatea e a axei neutre se calculează cu formula:

$$e = R - r \approx \frac{h^2}{12R}. \tag{9.6}$$

Variaţia unghiului $d\varphi$ pe care îl formează secţiunile AB şi CD se determină cu relaţia:

$$\Delta d\varphi = \frac{M d\varphi}{EAe}. \tag{9.7}$$

În fibrele extreme ale secţiunii, la $y = d_1$ şi $y = -d_2$, eforturile unitare au valorile:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{M}{Ae} \cdot \frac{d_1}{r - d_1} = \frac{M}{Ae} \cdot \frac{d_1}{R_1} \\ \sigma_{min} &= -\frac{M}{Ae} \frac{d_2}{r + d_2} = -\frac{M}{Ae} \cdot \frac{d_2}{R_2} \end{aligned}\right\}. \tag{9.8}$$

Variaţia eforturilor unitare pe secţiune este redată în figura 9.*b*.

Dacă momentul încovoietor are sensul invers decît în desen, în formulele (9.8) el va fi introdus cu semnul minus.

3. Dacă în secţiunea barei curbe există şi o forţă axială N, aşa cum este cazul uzual, la formulele (9.8) se adaugă efortul unitar:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

pozitiv dacă forţa N este de întindere şi negativ dacă ea este de compresiune. Efortul unitar rezultant în fibrele extreme devine:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{max} &= \frac{M}{Ae}\cdot\frac{d_1}{R_1}+\frac{N}{A}\\ \sigma_{min} &= -\frac{M}{Ae}\cdot\frac{d_2}{R_2}+\frac{N}{A}\end{aligned}\right\}. \tag{9.9}$$

4. Un alt mod de a exprima eforturile unitare în barele curbe solicitate prin momente M şi forţe axiale N este redat de formula:

$$\sigma = \frac{N}{A}+\frac{M}{RA}+\frac{MR}{I'}\,\frac{y}{R+y}. \tag{9.10}$$

La folosirea acestei formule, momentul M se consideră pozitiv cînd are sensul din figura 9.*d* (invers decît în fig. 9.*b*). Distanţele y se măsoară de la centrul de greutate în sus, spre deosebire de figura 9.*b*, unde se măsurau de la axa neutră în jos. Cele două metode menţionate dau acelaşi rezultat.

În formulele (9.10), mărimea I' este analogă unui moment de inerţie şi este definită prin relaţia:

$$I' = \int \frac{R}{R+y}\,y^2 dA, \tag{9.11}$$

cu y măsurat ca în figura 9.*d*.

Pentru secţiunea dreptunghiulară de lăţime b şi înălţime h, I' are expresia:

$$I' = bR^2\left(R\ln\frac{2R+h}{2R-h}-h\right). \tag{9.12}$$

Pentru secţiunea trapezoidală din figura 9.*e* se scrie relaţia:

$$I' = R^2\left[b+\frac{B-b}{h}(e_1+R)\ln\frac{R+e_1}{R-e_2}\right]-\left[\frac{B-b}{h}R+\frac{B+b}{2}\right]R^2h, \tag{9.13}$$

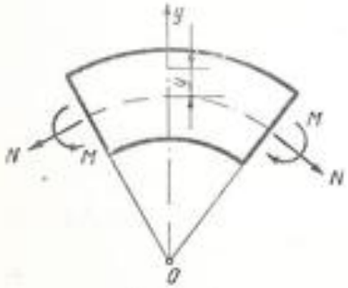


Fig. 9. *d*

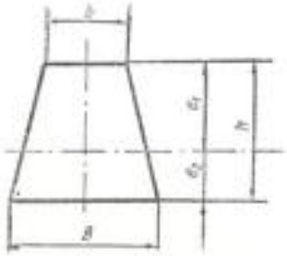


Fig. 9. *e*

în care distanţele e_1 şi e_2 sînt:

$$\left.\begin{aligned}e_1 &= \frac{2B+b}{3(B+b)}\,h\\ e_2 &= \frac{2b+B}{3(B+b)}\,h\end{aligned}\right\}. \tag{9.14}$$

La secţiunea circulară de rază r, a unei bare curbe cu raza R, se scrie:

$$I' = \frac{\pi r^4}{4}\left(1+\frac{r^2}{2R^2}+\frac{5}{4}\,\frac{r^4}{R^4}+\ldots\right). \tag{9.15}$$

5. La o bară cu rază mare de curbură, variaţia unghiului φ, cu notaţiile din figura 9.*b*, este:

$$\Delta\varphi = \int_0^s \frac{M ds}{EI_z} = \int_0^\varphi \frac{MR d\varphi}{EI_z}. \tag{9.16}$$

6. Deplasările diferitelor puncte ale barelor curbe cu rază mare de curbură se calculează prin aplicarea teoremei lui *Castigliano*:

$$f = \frac{\partial L}{\partial P} = \frac{1}{EI_z}\int_0^\varphi M\frac{\partial M}{\partial P}\,R d\varphi. \tag{9.17}$$

7. Deplasarea unui punct al unei bare curbe cu rază mare de curbură pe o direcţie oarecare se poate calcula şi prin metoda *Mohr-Maxwell*. În secţiunea respectivă a barei se aplică pe acea direcţie o forţă $P = 1$ (unitatea de forţă).

Se notează:

M_z (sau M_φ) momentul încovoietor într-o secţiune oarecare a barei, datorit forţelor care o solicită:

m_z (sau m_φ) momentul încovoietor într-o secţiune oarecare a barei, datorit forţei $P = 1$.

Neglijînd influenţa forţei tăietoare şi a forţei axiale, valoarea deplasării este dată de formula:

$$\delta = \int_0^s \frac{M_z m_z}{EI}\,ds; \tag{9.18}$$

sau:

$$\delta = \int_0^\alpha R\,\frac{M_\varphi m_\varphi}{EI}\,d\varphi. \tag{9.19}$$

8. La barele a căror axă este un arc de cerc de rază R, se poate scrie o ecuaţie diferenţială a fibrei medii deformate:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\frac{u}{R^2} = -\frac{M}{EI_z}, \tag{9.20}$$

în care u este creşterea razei, ca în figura 9. *f*.

Fig. 9. *f*

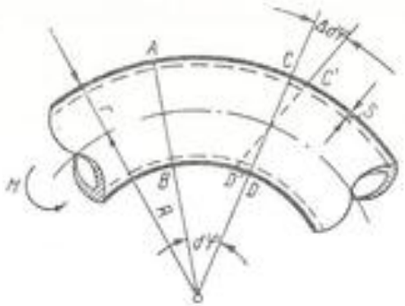


Fig. 9. *g*

9. La tubul curb, figura 9.*g*, efortul unitar maxim este:

$$\sigma_{max} = \frac{k_1 M d}{2 I_z}, \tag{9.21}$$

unde:

$d = 2r$ este diametrul exterior al tubului;

k_1 — un coeficient dat de relaţia:

$$k_1 = \frac{2}{3k\sqrt{35}}, \tag{9.22}$$

$$k = 1 - \frac{9}{10 + 12\left(\frac{sR}{r^2}\right)^2}, \tag{9.23}$$

$$\beta = \frac{6}{5 + 6\left(\frac{sR}{r^2}\right)^2}. \tag{9.24}$$

În loc de a aplica formulele (9.22) — (9.24) se pot lua valorile lui k_1 după cum urmează:

$\frac{sR}{r^2} =$	0,3	0,5	1,0
$k_1 =$	1,98	1,30	0,88

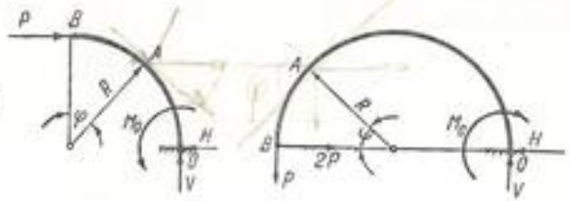
B. PROBLEME REZOLVATE

9.1. Să se determine reacţiunile din încastrarea O şi să se construiască diagramele N, T, M pentru arcele din figura 9.1, *a*.

Rezolvare. Pentru primul arc, din ecuaţiile de echilibru rezultă:

$$H = P; \quad V = 0; \quad M_0 = PR.$$

Fig. 9.1, *a*



Într-o secţiune oarecare A, determinată prin unghiul φ:

$N = -P\cos\varphi$; $T = P\sin\varphi$; $M = P(R - R\cos\varphi) = PR(1 - \cos\varphi)$.

Expresiile de mai sus verifică ecuaţiile diferenţiale (9.1)

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{R}\frac{dN}{d\varphi} = \frac{P\sin\varphi}{R} = \frac{T}{R},$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{R}\frac{dT}{d\varphi} = -\frac{P\cos\varphi}{R} = -\frac{N}{R}, \quad \frac{dM}{ds} = \frac{1}{R}\frac{dM}{d\varphi} = \frac{PR\sin\varphi}{R} = P\sin\varphi = T.$$

Valorile maxime şi minime ale acestor eforturi sînt:

Pentru N: $N_B = -P$; $N_0 = 0$.

Pentru T: $T_B = 0$; $T_0 = P$.

Pentru M: $M_B = 0$; $M_0 = PR$.

Diagramele N, T, M sînt desenate în figura 9.1, *b*.

Pentru al doilea arc, din ecuaţiile de echilibru rezultă:

$H = 2P$; $V = P$; $M_0 = 2PR$.

Într-o secţiune oarecare A, determinată prin unghiul φ:

$N = P\cos\varphi - 2P\sin\varphi = P(\cos\varphi - 2\sin\varphi)$,

$T = -P\sin\varphi - 2P\cos\varphi = -P(\sin\varphi + 2\cos\varphi)$,

$M = -P(R - R\cos\varphi) - 2PR\sin\varphi = -PR(1 - \cos\varphi + 2\sin\varphi)$.

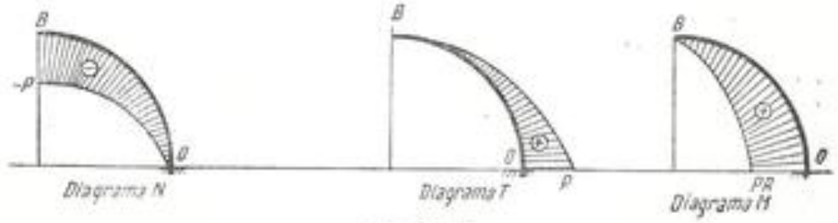


Fig. 9.1, *b*

Aceste expresii verifică ecuațiile diferențiale (9.1)

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{R}\,\frac{dN}{d\varphi} = \frac{-P(\sin\varphi + 2\cos\varphi)}{R} = \frac{T}{R};$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{R}\cdot\frac{dT}{d\varphi} = \frac{-P(\cos\varphi - 2\sin\varphi)}{R} = -\frac{N}{R};$$

$$\frac{dM}{ds} = \frac{1}{R}\cdot\frac{dM}{d\varphi} = \frac{-PR(\sin\varphi + 2\cos\varphi)}{R} = -P(\sin\varphi + 2\cos\varphi) = T.$$

Valorile maxime și minime ale acestor eforturi sînt:

Pentru N: $N_B = P$; $N_0 = -P$; $\frac{dN}{d\varphi} = P(-\sin\varphi - 2\cos\varphi) = 0$.

Rezultă: $\operatorname{tg}\varphi = -2$; $\varphi = 116°30'$; $N_{max} = P(\cos 116°30' - 2\sin 116°30') = -2{,}23\,P$.

Pentru T: $T_B = -2P$; $T_0 = 2P$; $\frac{dT}{d\varphi} = -P(\cos\varphi - 2\sin\varphi) = 0$

Rezultă: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$; $\varphi = 26°30'$.

$T_{max} = -P(\sin 26°30' + 2\cos 26°30') = -2{,}23\,P$.

Pentru M: $M_B = 0$; $M_0 = -2PR$;

$$\frac{dM}{d\varphi} = -PR(\sin\varphi + 2\cos\varphi) = 0.$$

Rezultă: $\operatorname{tg}\varphi = -2$; $\varphi = 116°30'$.

$M_{max} = -PR(1 - \cos 116°30' + 2\sin 116°30') = -3{,}23\,PR$.

Diagramele N, T, M pentru al doilea arc sînt desenate în figura 9.1, *c*.

9.2. Să se determine reacțiunile din reazemul simplu (1) și articulația (2) și să se construiască diagramele N, T, M pentru arcul din figura 9.2, *a*.

Rezolvare. Din ecuațiile de echilibru rezultă:

$$H_2 = 0;\quad V_1 = \frac{M_0}{2R};\quad V_2 = \frac{M_0}{2R}.$$

Expresiile eforturilor într-o secțiune A sînt:

$$N = -V_1\cos\varphi = -\frac{M_0\cos\varphi}{2R},$$

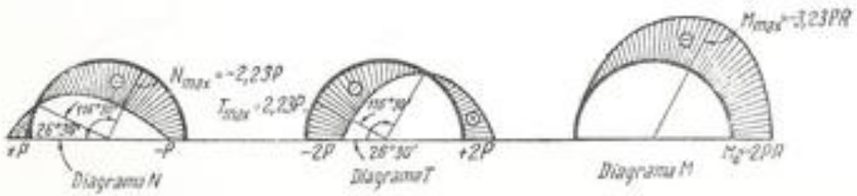


Fig. 9.1, *c*

iar

$$N_1 = -V_1 = -\frac{M_0}{2R},$$

și

$$N_3 = 0;\quad N_2 = \frac{M_0}{2R}.$$

$$T = V_1\sin\varphi = \frac{M_0\sin\varphi}{2R};$$

$$T_1 = 0;\quad T_3 = \frac{M_0}{2R};\quad T_2 = 0.$$

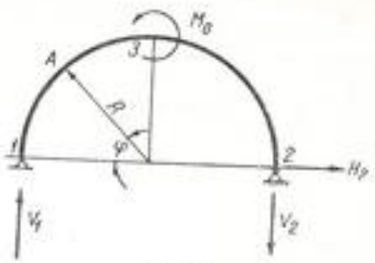


Fig. 9.2, *a*

Pe porțiunea *1–3*: $M = V_1(R - R\cos\varphi) = \frac{M_0}{2R}R(1-\cos\varphi) = \frac{M_0(1-\cos\varphi)}{2}$.

Pe porțiunea *3–2*: $M = V_1(R - R\cos\varphi) - M_0 = -\frac{M_0(1+\cos\varphi)}{2}$.

Aceste expresii verifică ecuațiile diferențiale (9.1):

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{R}\cdot\frac{dN}{d\varphi} = \frac{1}{R}\,\frac{M_0\sin\varphi}{2R} = \frac{T}{R};\quad \frac{dT}{ds} = \frac{1}{R}\cdot\frac{dT}{d\varphi} = \frac{1}{R}\cdot\frac{M_0\cos\varphi}{2R} = -\frac{N}{R},$$

$$\frac{dM}{ds} = \frac{1}{R}\,\frac{dM}{d\varphi} = \frac{1}{R}\,\frac{M_0\sin\varphi}{2} = T \text{ (Pe porțiunea } 1-3),$$

$$\frac{dM}{ds} = \frac{1}{R}\,\frac{dM}{d\varphi} = \frac{1}{R}\,\frac{M_0\sin\varphi}{2} = T \text{ (Pe porțiunea } 3-2).$$

Rezultă: $M_1 = 0$; $M_3' = \frac{M_0}{2}$; $M_3'' = -\frac{M_0}{2}$; $M_2 = 0$.

Diagramele N, T, M pentru arcul din figura 9,2, *a* sînt desenate în figura 9.2, *b*.

9.3. Să se determine reacțiunile și să se traseze diagrama momentelor încovoietoare pentru arcul triplu articulat din figura 9.3, *a*, știind că axa

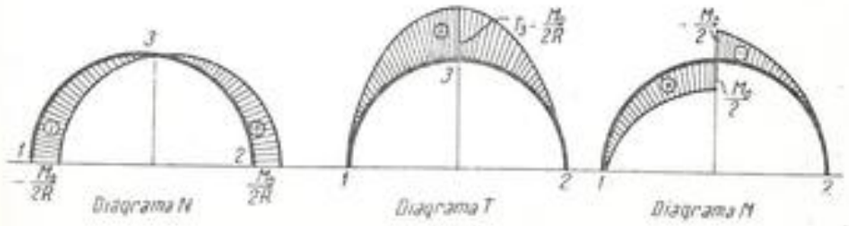


Fig. 9.2, *b*

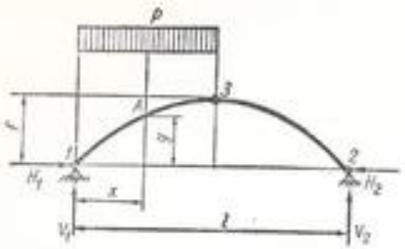


Fig. 9.3, *a*

sa este parabolică. Să se deducă aceeaşi diagramă pentru cazul cînd întregul arc ar fi încărcat cu o sarcină uniform distribuită pe orizontală (Fig. 9.3, *c*).

Rezolvare. Ecuaţiile de echilibru sînt:

$$H_1 - H_2 = 0; \quad V_1 + V_2 - p\frac{l}{2} = 0,$$

$$V_1 l - p\frac{l}{2}\cdot\frac{3l}{4} = 0.$$

La acestea se adaugă condiţia ca în articulaţia *3* momentul încovoietor să fie nul:

$$-H_1 f + V_1\frac{l}{2} - \frac{pl}{2}\cdot\frac{l}{4} = 0.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuaţii, se găseşte:

$$V_1 = \frac{3pl}{8}; \quad V_2 = \frac{pl}{8}; \quad H_1 = H_2 = \frac{pl^2}{16f}.$$

Ecuaţia axei geometrice a arcului este de forma:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Punînd condiţia ca să treacă prin articulaţiile *1, 2, 3*:

$$\left(x = 0;\ y = 0;\ x = l,\ y = 0 \text{ şi } x = \frac{l}{2},\ y = f\right),$$

se găseşte:

$$a = -\frac{4f}{l^2}; \quad b = \frac{4f}{l}; \quad c = 0.$$

Rezultă:

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l - x).$$

Expresia momentului încovoietor este diferită pe porţiunile *1—3* şi *3—2*, şi anume:

Porţiunea *1—3*: $M = V_1 x - H_1 y - \frac{px^2}{2}; \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right).$

Porţiunea *3—2*: $M = -[H_2 y - V_2(l - x)]; \quad \left(\frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l\right)$

Ţinînd seamă de valorile reacţiunilor, se obţine:

Porţiunea *1—3*:

$$M = \frac{3pl}{8}x - \frac{pl^2}{16f}\cdot\frac{4f}{l^2}x(l - x) - \frac{px^2}{2} = \frac{px(l - 2x)}{8}.$$

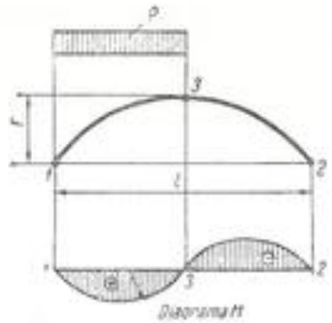


Fig. 9.3, *b*

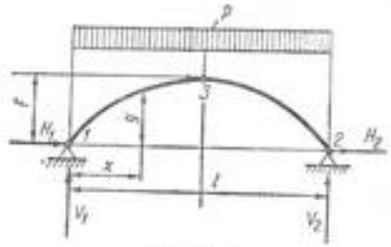


Fig. 9.3, *c*

Porţiunea *3—2*:

$$M = -\frac{pl^2}{16f}\cdot\frac{4f}{l^2}x(l - x) + \frac{pl}{8}(l - x) = \frac{p(l - x)(l - 2x)}{8}.$$

Diagrama M este desenată în figura 9.3, *b*.

Pentru arcul încărcat ca în figura 9.3, *c*, se calculează mai întîi reacţiunile. Ecuaţiile de echilibru sînt: $H_1 - H_2 = 0; \quad V_1 + V_2 - pl = 0;$ $V_1 l - pl\cdot\frac{l}{2} = 0.$

Condiţia ca în articulaţia *3* momentul încovoietor să fie nul este următoarea:

$$V_1\frac{l}{2} - H_1 f - p\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4} = 0.$$

Din aceste ecuaţii se obţine:

$$V_1 = V_2 = \frac{pl}{2}, \quad H_1 = H_2 = \frac{pl^2}{8f}.$$

Expresia momentului încovoietor într-o secţiune oarecare este:

$$M = V_1 x - H_1 y - px\frac{x}{2} = \frac{pl}{2}x - \frac{pl^2}{8f}\cdot\frac{4f}{l^2}x(l - x) - \frac{px^2}{2} = 0.$$

Această expresie fiind valabilă pe tot arcul, rezultă că momentul încovoietor este nul în orice secţiune.

Parabola este curba funiculară (sau curba de coincidenţă) a unei sarcini uniform distribuite pe orizontală.

9.4. Să se verifice eforturile unitare ce se produc în secţiunea dreptunghiulară a unei bare curbe, cu $b = 3$ cm, $h = 5$ cm, $R = 10$ cm, solicitată la încovoiere pură printr-un moment $M = 125$ daNm. Se va compara rezultatul obţinut cu acela care se găseşte prin aplicarea formulei barelor drepte, trasînd diagrama comparativă a variaţiei eforturilor unitare pe secţiune (Fig. 9.4).

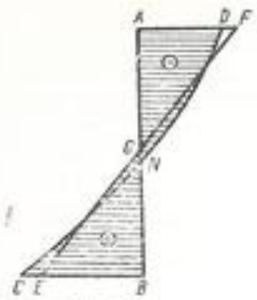


Fig. 9.4

Rezolvare. Se determină, în prealabil, elementele care intră în formulele (9.8):

$$M = 12\,500 \text{ daNcm},$$

$$A = bh = 15 \text{ cm}^2,$$

$$R_1 = R - \frac{h}{2} = 10 - 2{,}5 = 7{,}5 \text{ cm},$$

$$R_2 = R + \frac{h}{2} = 10 + 2{,}5 = 12{,}5 \text{ cm},$$

$$e = \frac{h^2}{12R} = \frac{5^2}{12 \cdot 10} = 0{,}208 \text{ cm},$$

$$d_1 = \frac{h}{2} - e = 2{,}5 - 0{,}208 = 2{,}292 \text{ cm},$$

$$d_2 = \frac{h}{2} + e = 2{,}5 + 0{,}208 = 2{,}708 \text{ cm}.$$

Se aplică formulele (9.9):

$$\sigma_{max} = \frac{M}{Ae} \cdot \frac{d_1}{R_1} = \frac{12\,500}{15 \cdot 0{,}208} \cdot \frac{2{,}292}{7{,}5} = 1\,223 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{min} = -\frac{M}{Ae} \cdot \frac{d_2}{R_2} = -\frac{12\,500}{15 \cdot 0{,}208} \cdot \frac{2{,}708}{12{,}5} = -868 \text{ daN/cm}^2.$$

Dacă s-ar aplica formula barelor drepte (formula lui *Navier*):

$$\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \frac{M}{W} = \frac{M}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{6 \cdot 12\,500}{3 \cdot 5^2} = 1\,000 \text{ daN/cm}^2.$$

În figura 9.4 s-a reprezentat variația efortului unitar σ pe secțiune în cele două alternative de calcul.

Curba *CND* reprezintă variația reală a lui σ, conform ipotezelor de calcul ale barelor curbe, pe cînd linia dreaptă *EF* arată variația conform formulei lui *Navier*. Eroarea maximă ce se obține prin aplicarea formulei lui *Navier* este:

$$\delta = \frac{1\,223 - 1\,000}{1\,223} \cdot 100 = 18{,}5\%.$$

9.5. Dacă bara curbă din problema 9.4 este solicitată printr-un moment $M = 100$ daNm și o forță axială $N = 3\,000$ daN, să se calculeze efortul unitar maxim atît prin formula (9.9) cît și prin formula (9.10).

Rezolvare. Pentru formula (9.9) se cunosc din problema precedentă $A = 15$ cm²; $e = 0{,}208$ cm; $d_1 = 2{,}292$ cm; $R_1 = 7{,}5$ cm.

$$\sigma_{max} = \frac{3\,000}{15} + \frac{10\,000}{15 \cdot 0{,}208} \frac{2{,}292}{7{,}5} = 1\,178 \text{ daN/cm}^2.$$

Prin cealaltă metodă se folosește formula:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{RA} + \frac{MR}{I'} \frac{y}{R + y}.$$

Valoarea lui I' este dată de formula (9.12):

$$I' = bR^2\left(R \cdot \ln\frac{2R + h}{2R - h} - h\right),$$

$$I' = 3 \cdot 10^2\left(10 \cdot \ln\frac{2 \cdot 10 + 5}{2 \cdot 10 - 5} - 5\right) = 32{,}13 \text{ cm}^4.$$

Pentru folosirea formulei (9.10) se va observa că:

— momentul, în cazul problemei de față, este negativ, față de convențiile formulei, deci $M = -10\,000$ daN cm;

— y_{max} are loc în fibra interioară, este negativ și se măsoară de la centrul de greutate:

$$y_{max} = -\frac{h}{2} = -2{,}5 \text{ cm},$$

$$\sigma_{max} = \frac{3\,000}{15} - \frac{10\,000}{10 \cdot 15} +$$

$$+ \frac{-10\,000 \cdot 10}{32{,}13} \frac{-2{,}5}{10 - 2{,}5} = 1\,171 \text{ daN/cm}^2.$$

Se obțin rezultate foarte apropiate, diferențele fiind de ordinul aproximației calculul ui cu rigla. La calcularea logaritmului nat ural, trebuie luate cel puțin patru zecimale, întrucît erori foarte mici la calculul lui au drept consecință variații mari ale lui I' și deci ale lui σ.

9.6. Un cîrlig de macara are forma din figura 9.6, secțiunea fiind trapezoidală, cu bazele rotunjite. Forța care solicită cîrligul este $P = 1\,000$ daN.

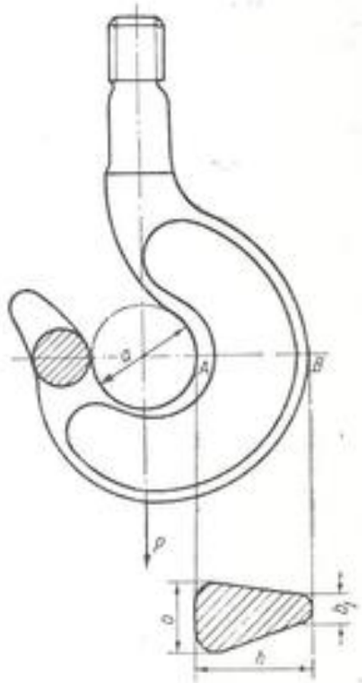


Fig. 9.6

Dimensiunile secţiunii AB, conform STAS 1944-68 sînt următoarele:

$$b = 3{,}2 \text{ cm}; \; b_1 = 1{,}2 \text{ cm}; \; h = 4{,}0 \text{ cm}; \; a = 4{,}5 \text{ cm}.$$

Să se calculeze efortul unitar maxim şi minim din secţiune.

Rezolvare. Secţiunea AB este solicitată de forţa axială:

$$N = P = 1\,000 \text{ daN},$$

şi momentul încovoietor:

$$M = PR.$$

Raza exterioară este:

$$R_2 = R_1 + h = 2{,}25 + 4{,}0 = 6{,}25 \text{ cm},$$

în care raza interioară este:

$$R_1 = \frac{a}{2} = \frac{4{,}5}{2} = 2{,}25 \text{ cm}.$$

Aplicînd formula din tabela 9.1, poziţia *1*, se găseşte:

$$r = \frac{\frac{b_1 + b}{2} h}{\frac{bR_2 - b_1R_1}{h} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} - b(-b_1)} = \frac{\frac{3{,}2 + 1{,}2}{2} \cdot 4{,}0}{\frac{3{,}2 \cdot 6{,}25 - 1{,}2 \cdot 2{,}25}{4{,}0} \ln \frac{6{,}25}{2{,}25} - (3{,}2 - 1{,}2)} \approx 3{,}62 \text{ cm}.$$

Poziţia centrului de greutate al trapezului faţă de baza mare este dată de formula:

$$e_2 = \frac{2b_1 + b}{3(b_1 + b)} h = \frac{2 \cdot 1{,}2 + 3{,}2}{3(3{,}2 + 1{,}2)} 4{,}0 = 2{,}3 \text{ cm}.$$

Excentricitatea axei neutre este:

$$e = (R_1 + e_2) - r = 2{,}25 + 2{,}3 - 3{,}62 = 0{,}93 \text{ cm}.$$

Celelalte date necesare sînt:

$$R = R_1 + e_2 = 2{,}25 + 2{,}3 = 4{,}55 \text{ cm},$$

$$d_1 = r - R_1 = 3{,}62 - 2{,}25 = 1{,}37 \text{ cm},$$

$$d_2 = h - d_1 = 4{,}0 - 1{,}37 = 2{,}63 \text{ cm},$$

$$M = PR = 1\,000 \cdot 4{,}55 = 4550 \text{ daN cm},$$

$$A = \frac{b + b_1}{2} h = \frac{3{,}2 + 1{,}2}{2} 4{,}0 = 8{,}8 \text{ cm}^2.$$

Se aplică formulele (9.9). Rezultă:

$$\sigma_{max} = \frac{1\,000}{8{,}8} + \frac{4\,550}{8{,}8 \cdot 0{,}93} \cdot \frac{1{,}37}{2{,}25} = 452 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{min} = \frac{1\,000}{8{,}8} - \frac{4\,550}{8{,}8 \cdot 0{,}93} \cdot \frac{2{,}63}{6{,}25} = -120 \text{ daN/cm}^2.$$

9.7. Să se verifice un cîrlig de macara, de secţiune circulară cu $R = 70$ mm, $d = 70$ mm, $P = 2\,000$ daN.

Rezolvare. Se foloseşte formula din tabela 9.1, poziţia *3*:

$$r = \frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})} = \frac{7^2}{4(2 \cdot 7 - \sqrt{4 \cdot 7^2 - 7^2})} = 6{,}48 \text{ cm},$$

$$e = R - r = 7 - 6{,}48 = 0{,}52 \text{ cm},$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 7^2}{4} = 38{,}48 \text{ cm}^2,$$

$$M = PR = 2\,000 \cdot 7 = 14\,000 \text{ daN cm},$$

$$R_1 = R - \frac{d}{2} = 7 - 3{,}5 = 3{,}5 \text{ cm},$$

$$R_2 = R + \frac{d}{2} = 7 + 3{,}5 = 10{,}5 \text{ cm},$$

$$d_1 = r - R_1 = 6{,}48 - 3{,}5 = 2{,}98 \text{ cm},$$

$$d_2 = d - d_1 = 7 - 2{,}98 = 4{,}02 \text{ cm}.$$

Se aplică formulele (9.9):

$$\sigma_{max} = \frac{14\,000}{38{,}48 \cdot 0{,}52} \cdot \frac{2{,}98}{3{,}5} + \frac{2\,000}{38{,}48} = 642 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{min} = -\frac{14\,000}{38{,}48 \cdot 0{,}52} \cdot \frac{4{,}02}{10{,}5} + \frac{2\,000}{38{,}48} = -216 \text{ daN/cm}^2.$$

9.8. Se dă bara semicirculară de oţel, cu secţiunea pătrată, din figura 9.8 la care se cunosc $a = 10$ cm, $R = 50$ cm, $\sigma_a = 1000$ daN/cm².

Se cere:

a) să se determine forţa maximă P cu care se poate încărca bara;

b) după determinarea forţei P, să se facă o verificare cu formula barelor drepte.

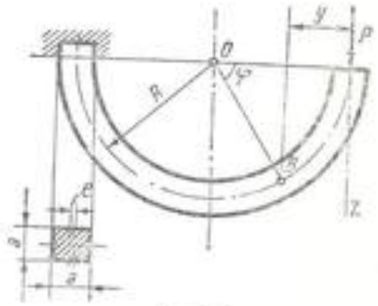


Fig. 9.8

Rezolvare. a) Se determină poziția axei neutre:

$$e = \frac{h^2}{12R} = \frac{a^2}{12R} = \frac{10^2}{12 \cdot 50} = 0{,}167 \text{ cm},$$

$$r = R - e = 50 - 0{,}167 = 49{,}833 \text{ cm},$$

$$d_1 = \frac{a}{2} - e = 5 - 0{,}167 = 4{,}833 \text{ cm},$$

$$R_1 = R - \frac{a}{2} = 50 - 5 = 45 \text{ cm}.$$

Se aplică formula (9.9) în care:

$$\sigma_a = \sigma_{max}; \quad M = 2\ PR = 100\ P,$$

$$A = 100 \text{ cm}^2,$$

necunoscuta fiind P:

$$1\,000 = \frac{100P}{100 \cdot 0{,}167} \cdot \frac{4{,}833}{45} + \frac{P}{100} = 0{,}656\ P,$$

$$P = 1\,526 \text{ daN}. \qquad (1)$$

b) Verificarea cu formula barelor drepte:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} = \frac{P}{a^2} + \frac{2PR}{\frac{a^3}{6}},$$

$$\sigma_{max} = \frac{1\,524}{10^2} + \frac{2 \cdot 1524 \cdot 50 \cdot 6}{10^3} = 931 \text{ daN/cm}^2. \qquad (2)$$

Se constată o diferență de 7% între valorile lui σ_{max} date de cele două metode de calcul.

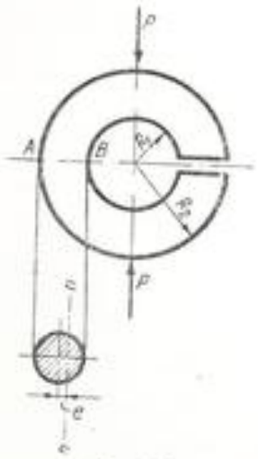


Fig. 9.9

9.9. Se cere să se calculeze efortul unitar în secțiunea AB a inelului din figura 9.9, de secțiune circulară, dacă $R_1 = 40$ mm, $R_2 = 140$ mm, $P = 2\,000$ daN.

Rezolvare. Diametrul barei este:

$$d = R_2 - R_1 = 100 \text{ mm}.$$

Pentru calcularea poziției axei neutre se folosește formula (9.3):

$$I_G = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 10^4}{64} = 491 \text{ cm}^4,$$

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2} = 9 \text{ cm},$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 78{,}5 \text{ cm}^2,$$

$$e = \frac{I_G}{A \cdot R} = \frac{491}{78{,}5 \cdot 9} = 0{,}695 \text{ cm}.$$

În secțiunea AB, momentul încovoietor și forța axială sînt:

$$M = -PR = -2\,000 \cdot 9 = -18\,000 \text{ daNcm},$$

$$N = -P = -2\,000 \text{ daN}.$$

Se aplică formula (9.9):

$$d_1 = \frac{d}{2} - e = 5 - 0{,}695 = 4{,}305 \text{ cm},$$

$$d_2 = \frac{d}{2} + e = 5 + 0{,}695 = 5{,}695 \text{ cm},$$

$$\sigma_{max} = -\frac{18\,000}{78{,}5 \cdot 0{,}695} \cdot \frac{4{,}305}{4} - \frac{2\,000}{78{,}5} = -380 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{min} = +\frac{18\,000}{78{,}5 \cdot 0{,}695} \cdot \frac{5{,}695}{14} - \frac{2\,000}{78{,}5} = +109 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar maxim (negativ) se produce în B.

9.10. Să se verifice eforturile unitare ce se produc în secțiunea cea mai solicitată a barei din figura 9.10, dacă se dau: $R = 80$ mm; $a = 10$ mm; $d = 80$ mm; $P = 1\,000$ daN.

Rezolvare. Se procedează analog ca la problema precedentă, cu observația că forța axială și momentul încovoietor sînt pozitive:

$$I_G = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 8^4}{64} = 201 \text{ cm}^4,$$

$$R = 8 \text{ cm},$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 50{,}3 \text{ cm}^2,$$

$$e = \frac{201}{50{,}3 \cdot 8} = 0{,}5 \text{ cm},$$

$$M = M_{max} = P(a + R) = 1\,000(1 + 8) = 9\,000 \text{ daNcm},$$

$$N = P = 1\,000 \text{ daN},$$

$$d_1 = \frac{d}{2} - e = 3{,}5 \text{ cm}; \quad d_2 = \frac{d}{2} + e = 4{,}5 \text{ cm},$$

$$R_1 = R - \frac{d}{2} = 4 \text{ cm}; \quad R_2 = R + \frac{d}{2} = 12 \text{ cm},$$

$$\sigma_{max} = \frac{9\,000}{50{,}3 \cdot 0{,}5} \cdot \frac{3{,}5}{4} + \frac{1\,000}{50{,}3} = 333 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{min} = -\frac{9\,000}{50{,}3 \cdot 0{,}5} \cdot \frac{4{,}5}{12} + \frac{1\,000}{50{,}3} = -114 \text{ daN/cm}^2.$$

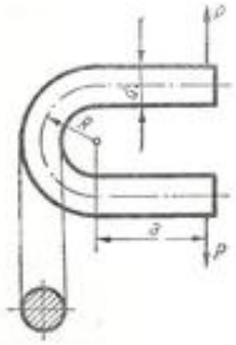


Fig. 9.10

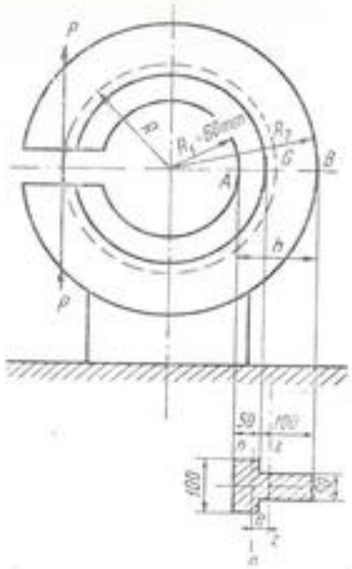


Fig. 9.11

9.11. Secţiunea barei curbe din figura 9.11 are forma de T, cu cotele din desen (în mm). Dacă bara este executată din fontă cu $\sigma_{ad} = 300$ daN/cm² şi $\sigma_{ac} = 900$ daN/cm², se cere să se afle valoarea maximă a forţei P, care se poate aplica în centrul de greutate al secţiunii, astfel încît să nu se depăşească rezistenţele admisibile.

Rezolvare. Această bară curbă alcătuieşte un batiu similar aceluia studiat în problema 8.10, la capitolul *Solicitări compuse*. Pentru secţiunea periculoasă AB se caută poziţia centrului de greutate, dată de segmentul AG:

$$AG = \frac{10 \cdot 5 \cdot 2{,}5 + 10 \cdot 5 \cdot 10}{50 + 50} = 6{,}25 \text{ cm}.$$

Se calculează razele R, R_2:

$$R_1 = 6 \text{ cm},$$
$$R = R_1 + AG = 6 + 6{,}25 = 12{,}25 \text{ cm},$$
$$R_2 = R_1 + h = 6 + 15 = 21 \text{ cm}.$$

Momentul de inerţie faţă de axa centrului de greutate $(z - z)$ este:

$$I_G = I_z = \frac{10 \cdot 5^3}{12} + 50 \cdot (6{,}25 - 2{,}5)^2 + \frac{5 \cdot 10^3}{12} + 50(10 - 6{,}25)^2 = 1\,926 \text{ cm}^4,$$

iar aria este: $A = 100$ cm².

Poziţia axei neutre este dată de formula aproximativă (9.3):

$$e = \frac{1\,926}{100 \cdot 12{,}25} = 1{,}573 \text{ cm}.$$

Momentul încovoietor şi forţa axială sînt:

$$M = 2\,PR = 24{,}5\ P;$$
$$N = P,$$
$$d_1 = AG - e = 6{,}25 - 1{,}573 = 4{,}677 \text{ cm},$$
$$d_2 = h - d_1 = 15 - 4{,}677 = 10{,}323 \text{ cm}.$$

Se aplică formulele (9.9), în care se înlocuieşte σ_{max} prin σ_{ad} şi σ_{min} prin σ_{ac}.

$$300 = \frac{24{,}5\ P}{100 \cdot 1{,}573} \cdot \frac{4{,}677}{6} + \frac{P}{100},$$

$$-900 = -\frac{24{,}5\ P}{100 \cdot 1{,}573} \cdot \frac{10{,}323}{21} + \frac{P}{100}.$$

Se rezolvă separat cele două ecuaţii şi se găsesc soluţiile:

$$P' = 2\,290 \text{ daN},$$
$$P'' = 13\,500 \text{ daN}.$$

Spre a nu depăşi nici una din rezistenţele admisibile, trebuie aleasă forţa cea mai mică:

$$P = 2\,290 \text{ daN}.$$

Diferenţa mare dintre cele două soluţii arată că secţiunea barei nu este economică pentru o construcţie din fontă.

9.12. La inelul din figura 9.12, *a*, solicitat prin cele două forţe P, avînd raza R mare în comparaţie cu grosimea h, se cere să se construiască diagramele N, T, M şi să se determine lungirea, respectiv scurtarea celor două diametre perpendiculare care formează axele de simetrie ale figurii deformate.

Rezolvare. Problema este static nedeterminată. Se foloseşte metoda *Mohr-Maxwell*. Se consideră un sfert de inel ca în figura 9.12, *b*.

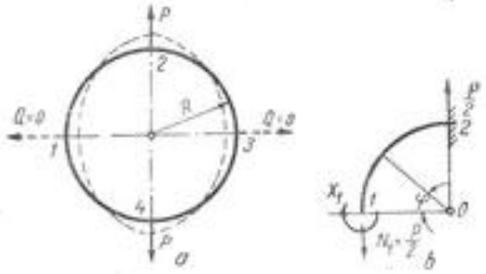


Fig. 9.12, *a*, *b*

Din motive de simetrie, în *2* nu există forţă axială, iar în *1* nu există forţă tăietoare. Se notează cu X_1 momentul încovoietor în *1*, cu sensul din figură.

Ecuaţia de condiţie este:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0.$$

Într-o secţiune oarecare la unghiul φ se obţine:

$$M_\varphi = -\frac{PR}{2}(1 - \cos\varphi).$$

$$m_\varphi = 1.$$

Atunci:

$$\delta_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} m_\varphi \cdot m_\varphi \frac{ds}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot 1 \frac{Rd\varphi}{EI} = \frac{\pi R}{2EI},$$

$$\delta_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi m_\varphi \frac{ds}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{PR}{2}(1 - \cos\varphi) \cdot 1 \cdot \frac{Rd\varphi}{EI} = -\frac{PR^3(\pi - 2)}{4\,EI}.$$

Ecuaţia de condiţie devine:

$$\frac{\pi R}{2\,EI} X_1 - \frac{PR^3(\pi - 2)}{4\,EI} = 0,$$

de unde:

$$X_1 = M_1 = \frac{PR}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 0{,}182\,PR. \qquad (1)$$

Expresia momentului încovoietor într-o secţiune oarecare devine:

$$M = \frac{PR}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi} - 1 + \cos\varphi\right) = \frac{PR}{2}\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right). \qquad (2)$$

Cu ajutorul acesteia se construieşte diagrama de momente încovoietoare din figura 9.12, *c*.

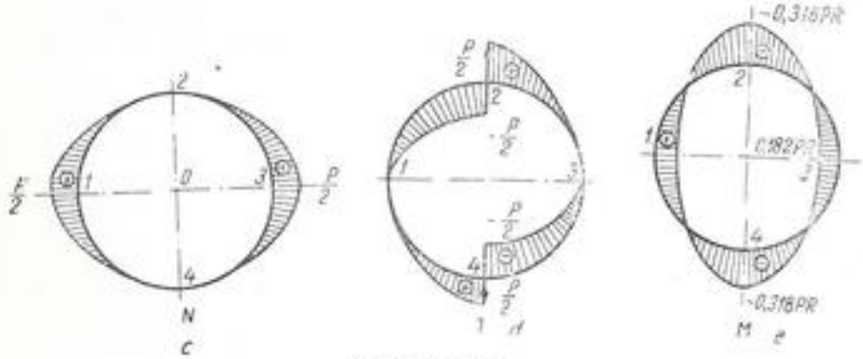


Fig. 9.12, *c*, *d*, *e*

Momentul în secţiunea $2\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ este:

$$M_2 = \frac{PR}{2}\left(0 - \frac{2}{\pi}\right) = -0{,}318\,PR. \qquad (3)$$

Forţa axială într-o secţiune oarecare este:

$$N = \frac{P}{2}\cos\varphi; \qquad (4)$$

iar forţa tăietoare este:

$$T = -\frac{P}{2}\sin\varphi. \qquad (5)$$

Cu ajutorul formulelor (4) şi (5) se construiesc diagramele N, T din figurile 9.12, *c* şi 9.12, *d*.

Deformaţiile diametrelor perpendiculare *(1—3)* şi *(2—4)* se calculează prin metoda *Mohr-Maxwell*, folosind în acest scop formula (9.19).

Pentru calculul lungirii diametrului *(2—4)* se aplică în *2*, pe direcţia lui, o forţă $P = 1$.

Atunci în *4*, pe aceeaşi direcţie, apare o forţă opusă $P = 1$. Utilizînd formula (2) rezultă:

$$M_\varphi = \frac{PR}{2}\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right); \quad m_\varphi = \frac{R}{2}\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right).$$

Notînd cu v lungirea diametrului *(2—4)*, se obţine, prin aplicarea formulei amintite:

$$v = \frac{4}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi m_\varphi\, ds = \frac{4}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR}{2}\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right)\frac{R}{2}\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right) R\, d\varphi =$$

$$= \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right)^2 d\varphi = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right)\frac{PR^3}{EI} = 0{,}149\frac{PR^3}{EI}.$$

Pentru calculul scurtării diametrului *(1—3)* se aplică în *1* pe direcţia lui o forţă $Q = 1$. Atunci în *3*, pe aceeaşi direcţie, apare o forţă opusă $Q = 1$. Pentru jumătatea de inel *(123)* revine în *1* forţa $\frac{Q}{2} = \frac{1}{2}$ (Fig. 9.12, *f*). Utilizînd tot formula (2), rezultă şi în acest caz:

$$M_\varphi = \frac{PR}{2}\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right).$$

Din figura 9.12, *f* se obţine:

$$m_\varphi = \frac{1}{2} R \sin \varphi.$$

Notînd cu *u* lungirea (respectiv scurtarea) diametrului (*1—3*), se obţine prin aplicarea formulei amintite:

$$u = \frac{4}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi m_\varphi \, ds = \frac{4}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR}{2}\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right)\frac{R}{2}\sin\varphi \, R d\varphi =$$

$$= \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right) d\varphi = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\right) = -0{,}137\frac{PR^3}{EI}.$$

Semnul minus arată că deformaţia este de sens contrar forţei *Q*.

9.13. Un inel circular, fără eforturi iniţiale, este tăiat într-o secţiune (Fig. 9.13), iar capetele sînt îndepărtate cu o distanţă *f*, prin acţiunea forţelor *P*.

Se cere să se calculeze forţa *P* necesară pentru producerea deformaţiei *f*, respectiv să se determine valorile *f* şi *P* aşa ca să nu se depăşească rezistenţa admisibilă.

Aplicaţie numerică: secţiunea dreptunghiulară cu $b = 4$ mm; $h = 3$mm; $R = 50$ mm; materialul: fontă cu $E = 10^6$ daN/cm²; $\sigma_a = 300$ daN/cm².

Rezolvare. Se aplică relaţia (9.17). Momentul încovoietor în secţiunea φ este:

$$M = PR(1 - \cos\varphi), \quad \frac{\partial M}{\partial P} = R(1 - \cos\varphi).$$

Săgeata *f*, în direcţia forţei *P*, este:

$$f = \frac{\partial L}{\partial P} = \frac{1}{EI}\int_0^{2\pi} M\frac{\partial M}{\partial P} R d\varphi = \frac{1}{EI}\int_0^{2\pi} PR(1 - \cos\varphi)\, R(1 - \cos\varphi)\, R d\varphi =$$

$$= \frac{3\pi PR^3}{EI}.$$

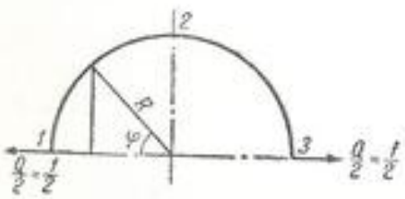


Fig. 9.12, *f*

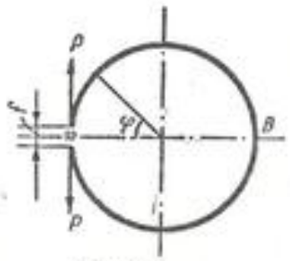


Fig. 9.13

Forţa necesară este:

$$P = \frac{EIf}{3\pi R^3}. \tag{1}$$

Considerînd bara cu rază de curbură mare, se aplică formula barelor drepte şi se calculează momentul încovoietor capabil:

$$M_{max} = W\sigma_a = \frac{bh^2}{6}\sigma_a = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}3^2}{6} \cdot 300 = 1{,}8 \text{ daNcm}.$$

Acest moment are loc în secţiunea *B*:

$$M_{max} = M_B = 2\,PR = 1{,}8 \text{ daNcm}.$$

$$P = \frac{M_{max}}{2R} = \frac{1{,}8}{2 \cdot 5} = 0{,}18 \text{ daN}. \tag{2}$$

Săgeata se află din (1):

$$f = \frac{3\pi PR^3}{EI} = \frac{3\pi \cdot 0{,}18 \cdot 5^3}{10^6 \cdot \frac{1}{12}\left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^3} = 0{,}235 \text{ cm}. \tag{3}$$

Problema reprezintă operaţia de montare a unui segment de fontă pe piston. În realitate, la segment, distanţa *f* este mai mare, întrucît s-a tăiat o porţiune din inel, necesară producerii presiunii pe cilindru în stare montată.

9.14. Cele două arce de oţel din figura 9.14, *a* de rază $R = 50$ cm şi moment de inerţie $I_z = 1$ cm⁴ sînt apăsate cu forţele $P = 500$ daN. Să se calculeze cu cît se apropie punctele de aplicaţie ale forţelor *P*.

Rezolvare. Se separă barele ca în figura 9.14, *b* şi se scrie momentul încovoietor într-o secţiune oarecare *D*:

$$M = \frac{P}{2}x = \frac{P}{2}\left(\frac{R}{2} - R\sin\varphi\right).$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{2} - R\sin\varphi\right).$$

Se aplică teorema lui *Castigliano*, cu limite de la 0 la 30°, de patru ori:

$$f = \frac{\partial L}{\partial P} = \frac{4}{EI_z}\int_0^{30^\circ} M\frac{\partial M}{\partial P} R d\varphi =$$

$$= \frac{4}{EI_z}\int_0^{30^\circ} \frac{PR^3}{4}\left(\frac{1}{2} - \sin\varphi\right)^2 d\varphi,$$

$$f = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{30^\circ}\left(\frac{1}{4} - \sin\varphi + \sin^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{PR^3}{EI_z}\left(\frac{3\pi}{24} + \frac{3\sqrt{3}}{8} - 1\right) = 0{,}042\frac{PR^3}{EI_z}.$$

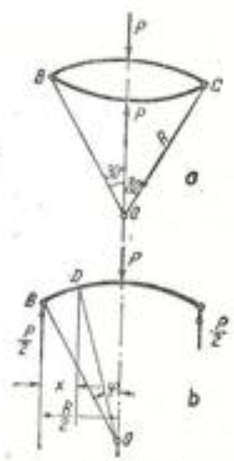


Fig. 9.14

Cu datele numerice:

$$f = 0{,}042\,\frac{500 \cdot 50^3}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 1} = 1{,}25 \text{ cm}.$$

9.15. Să se calculeze cu cît se depărtează capetele unui inel tăiat, de forma celui reprezentat în figura 9.13, dacă în locul forţelor P se aplică două cupluri egale M_0.

Rezolvare. Spre a putea aplica teorema lui *Castigliano*, alături de cuplurile M_0 se aplică şi două forţe fictive, ca în figura 9.13, de valoare $P = 0$, şi se scrie ecuaţia momentului într-o secţiune:

$$M = M_0 + PR(1 - \cos\varphi),$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = R(1 - \cos\varphi).$$

Făcînd $P = 0$, rămîne:

$$M = M_0,$$

$$f = \frac{1}{EI_z}\int_0^{2\pi} M\,\frac{\partial M}{\partial P}\cdot Rd\varphi = \frac{1}{EI_z}\int_0^{2\pi} M_0R^2(1 - \cos\varphi)\,d\varphi = \frac{2\pi M_0R^2}{EI}.$$

9.16. Un tub curb din oţel are următoarele dimensiuni, corespunzînd figurii 9, g: $d = 2r = 121$ mm; $s = 8$ mm; $R = 400$ mm. Se cere să se determine momentul încovoietor M pe care îl poate suporta tubul, astfel încît să nu se depăşească rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 800$ daN/cm².

Rezolvare. Se aplică formula (9.23):

$$k = 1 - \frac{9}{10 + 12\left(\frac{8 \cdot 400}{60{,}5^2}\right)^2} = 0{,}531.$$

Din formula (9.24): $\beta = \dfrac{6}{5 + 6\left(\frac{8 \cdot 400}{60{,}5^2}\right)^2} = 0{,}626.$

Din (9.22): $k_1 = \dfrac{2}{3k\sqrt{3\beta}} = \dfrac{2}{3 \cdot 0{,}531\sqrt{3 \cdot 0{,}626}} = 0{,}913.$

Dacă se notează cu D_e diametrul exterior şi cu D_i cel interior, momentul de inerţie al secţiunii tubului este:

$$I_z = \frac{\pi}{64}(D_e^4 - D_i^4) = \frac{\pi}{64}(12{,}1^4 - 10{,}5^4) = 452 \text{ cm}^4,$$

$$D_e = d = 12{,}1 \text{ cm},$$

$$D_i = D_e - 2s = 12{,}1 - 2 \cdot 0{,}8 = 10{,}5 \text{ cm}.$$

Din formula (9.21), făcînd $\sigma_{max} = \sigma_a$, se află momentul încovoietor pe care-l suportă tubul:

$$M = \frac{2I_z\sigma_a}{k_1 d} = \frac{2 \cdot 452 \cdot 800}{0{,}913 \cdot 12{,}1} = 65\,746 \text{ daN cm}.$$

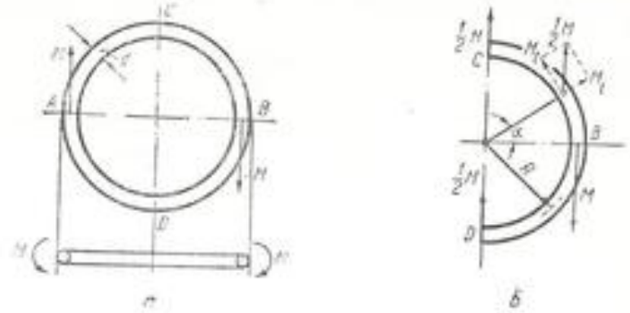


Fig. 9.17

9.17. Inelul din figura 9.17, *a* este solicitat prin cuplul M, ca în desen. Se cere să se determine momentele de încovoiere şi de torsiune într-o secţiune oarecare şi să se calculeze unghiul $\Delta\varphi$ cu care se rotesc, una faţă de alta, secţiunile A şi B.

Rezolvare. Se taie inelul ca în figura 9.17, *b* introducînd în secţiuni cuplurile $\frac{1}{2}M$.

Într-o secţiune oarecare α, cuplul $\frac{1}{2}M$ dă momentele:

$$M_t = \frac{1}{2}M\cos\alpha; \quad M_i = \frac{1}{2}M\sin\alpha.$$

Unghiul căutat este:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial L}{\partial M} = 4\left[\frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}M\sin\alpha\,\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot Rd\alpha + \frac{1}{GI_p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}M\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}\cos\alpha\,Rd\alpha\right],$$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi MR}{4}\left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GI_p}\right) = \frac{\pi MR}{4}\left(\frac{64}{\pi d^4E} + \frac{32}{\pi d^4G}\right) = \frac{8MR}{d^4}\left(\frac{2}{E} + \frac{1}{G}\right).$$

9.18. Pentru barele curbe cu secţiune constantă din figura 9.18, *a*, *b* se cere să se calculeze deplasările pe orizontală ale secţiunii 2.

Rezolvare. Pentru ambele cazuri se aplică metoda *Mohr-Maxwell* (v. cap. 10).

a) Pentru bara din figura 9.18, *a* (v. Fig. 9.18, *c* şi Fig. 9.18, *d)*:

$$(1-3) \quad M_\varphi = Pr\sin\varphi - \frac{P}{2}r(1 - \cos\varphi); \quad m_\varphi = r\sin\varphi;$$

$$(2-3) \quad M_\varphi = \frac{P}{2}r(1 - \cos\varphi); \quad m_\varphi = r\sin\varphi.$$

$$\delta_{2k} = \frac{1}{EI}\int_1^2 M_\varphi m_\varphi r\,d\varphi = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[Pr\sin\varphi - \frac{P}{2}r(1 - \cos\varphi)\right]r\sin\varphi\,rd\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{P}{2}r(1 - \cos\varphi)\,r\sin\varphi\,rd\varphi\right\} = \frac{\pi Pr^3}{4EI}.$$

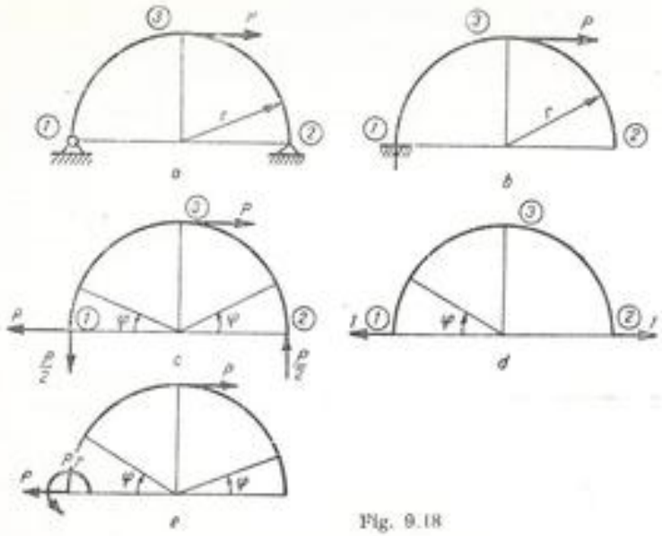


Fig. 9.18

b) Pentru bara din figura 9.18, *b* (Fig. 9.18, *e* şi 9.18, *d)*:

(*1—3*) $M_\varphi = Pr\sin\varphi - Pr$; $m_\varphi = r\sin\varphi$;

(*2—3*) $M_\varphi = 0$; $m_\varphi = r\sin\varphi$.

$$\delta_{24} = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Pr(\sin\varphi - 1)\, r\sin\varphi\, r d\varphi = \frac{Pr^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{Pr^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) = \frac{(\pi - 4)Pr^3}{4EI}.$$

9.19. Pentru bara de secţiune constantă din figura 9.19, *a*, se cere să se calculeze reacţiunile în reazeme şi să se determine deplasarea pe direcţia forţei *P*.

Rezolvare. Problema este static nedeterminată.

Se aplică metoda *Mohr-Maxwell*. Se consideră sistemul de bază din figura 9.19, *b* (v. cap. 11).

$$X_2\delta_{22} + \delta_{20} = 0,$$

3—2 $\quad M_x = -Px$;

$\quad m_x = 0$;

2—1 $\quad M_\varphi = -Pa(2 - \cos\varphi)$; $m_\varphi = a(1 - \cos\varphi)$.

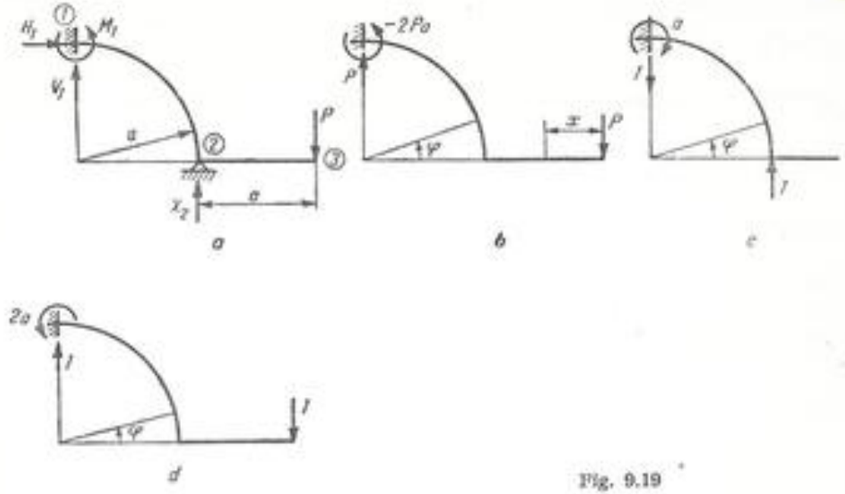


Fig. 9.19

Se aplică în *2*, pe direcţia necunoscutei X_2 o forţă unitară (Fig. 9.19, *c*).

$$\delta_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} m_\varphi m_\varphi \frac{ds}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(1 - \cos\varphi)^2 \frac{a d\varphi}{EI} =$$

$$= \frac{a^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi = \frac{a^3}{EI}\left[\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{(3\pi - 8)a^3}{4EI};$$

$$\delta_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi m_\varphi \frac{ds}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-Pa(2 - \cos\varphi)][a(1 - \cos\varphi)]\frac{a d\varphi}{EI} =$$

$$= -\frac{Pa^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos\varphi)(1 - \cos\varphi)\, d\varphi = -\frac{Pa^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 3\cos\varphi +$$

$$+ \cos^2\varphi)\, d\varphi = -\frac{Pa^3}{EI}\left[2\frac{\pi}{2} - 3 + \frac{\pi}{4}\right] = -\frac{(5\pi - 12)Pa^3}{4EI}.$$

$$\frac{3\pi - 8}{4EI}a^3X_2 - \frac{(5\pi - 12)a^3P}{4EI} = 0; \quad X_2 = \frac{(5\pi - 12)P}{3\pi - 8},$$

$$H_1 = 0; \quad V_1 = -1{,}6\ P; \quad V_2 = X_2 = 2{,}6\ P; \quad M_1 = -0{,}6\ Pa.$$

Pentru calculul deplasării pe direcţia forţei *P*, se aplică în *3* o forţă unitară (Fig. 9.19, *d*).

$$\delta_3 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a (-Px)(-x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-P[a + a(1-\cos\varphi)] + \right.$$

$$\left. + 2{,}6\,Pa(1-\cos\varphi)\} \cdot [-a - a(1-\cos\varphi)]\,a\,d\varphi\right] =$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\int_0^a Px^2 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} Pa^3(-1{,}2 + 3{,}8\cos\varphi - 1{,}6\cos^2\varphi)\,d\varphi\right] =$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{Pa^3}{3} + Pa^3\left(-1{,}2\frac{\pi}{2} + 3{,}8 - 1{,}6\frac{\pi}{4}\right)\right] = 0{,}97\frac{Pa^3}{EI}.$$

9.20. Pentru bara închisă din figura 9.20, *a*, cu secţiune constantă, se cere să se calculeze deplasarea pe direcţia forţei *P*, a punctului 7.

Rezolvare. Problema este static nedeterminată. Se aplică metoda *Mohr-Maxwell*. Se izolează un sfert din bară ca în figura 9.20, *b*. Din motive de simetrie în *1* nu există forţă tăietoare, iar în *3* nu există forţă normală.

$$X_1\delta_{11} + \delta_{10} = 0;$$

$$\delta_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} m_\varphi m_\varphi \frac{ds}{EI} + \int_0^a m_x m_x \frac{dx}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \frac{a\,d\varphi}{EI} + \int_0^a 1 \cdot \frac{dx}{EI} =$$

$$= \frac{\pi a}{2EI} + \frac{a}{EI} = \frac{(\pi+2)a}{2EI};$$

$$\delta_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi m_\varphi \frac{ds}{EI} + \int_0^a M_x m_x \frac{dx}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{P}{2}a(1-\cos\varphi)\frac{a\,d\varphi}{EI} +$$

$$+ \int_0^a -\frac{P}{2}(a+x) \cdot \frac{dx}{EI} = -\frac{Pa^2(\pi-2)}{4EI} - \frac{3Pa^3}{4EI} = -\frac{Pa^3}{4EI}(\pi+1);$$

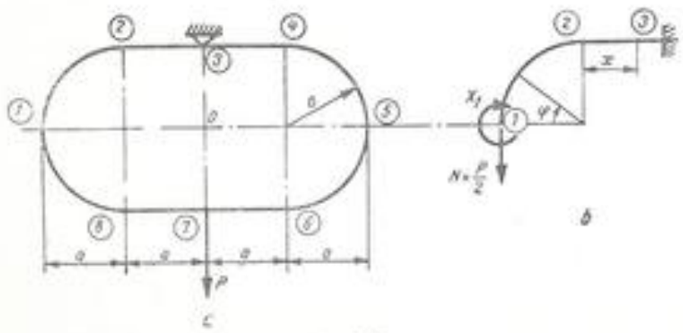


Fig. 9.20

de unde:

$$\frac{(\pi+2)a}{2EI}X_1 - \frac{Pa^2}{4EI}(\pi+1) = 0,$$

$$X_1 = \frac{(\pi+1)}{2(\pi+2)}Pa \cong 0{,}4\ Pa;$$

$$(1-2)\quad M = X_1 - \frac{P}{2}a(1-\cos\varphi) = 0{,}4\ Pa - \frac{Pa}{2}(1-\cos\varphi) =$$

$$= -Pa(0{,}1 - 0{,}5\cos\varphi);$$

$$(2-3)\quad M = X_1 - \frac{P}{2}(a+x) = 0{,}4\ Pa - \frac{P}{2}(a+x) = -P(0{,}1\,a - 0{,}5x).$$

Pentru calculul deplasării pe direcţia forţei *P*, se aplică în *7* o forţă unitară.

Notînd cu δ_7 deplasarea căutată, rezultă:

$$\delta_7 = \frac{4}{EI}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-Pa(0{,}1 - 0{,}5\cos\varphi)][-a(0{,}1 - 0{,}5\cos\varphi)]a\,d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_0^a [-P(0{,}1a - 0{,}5x)][-(0{,}1a - 0{,}5x)]dx\right\} =$$

$$= \frac{4}{EI}\left[Pa^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (0{,}01 - 0{,}1\cos\varphi + 0{,}25\cos^2\varphi)d\varphi + \right.$$

$$\left. + P\int_0^a (0{,}01\,a^2 - 0{,}1\,ax + 0{,}25\,x^2)dx\right] = \frac{4}{EI}\left[Pa^3\left(0{,}01\frac{\pi}{2} - 0{,}1 \cdot 1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 0{,}25 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + P\left(0{,}01\,a^3 - 0{,}1\frac{a^2}{2} + 0{,}25\frac{a^3}{3}\right)\right] = \frac{4Pa^3}{EI}[0{,}11 + 0{,}04] = \frac{0{,}6Pa^3}{EI}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

9.21. Să se refacă problema 9.11, cu aceleaşi cote, dar cu secţiunea aşezată invers, adică cu partea lată în exterior. Să se compare rezultatul cu cel de la problema 9.11.

Răspuns. Se găsesc două soluţii: $P' = 1\,270$ daN, $P'' = 15\,000$ daN, dintre care se va alege prima. Rezultă că nici această formă nu este economică pentru fontă şi este mai dezavantajoasă decît cea de la problema 9.11.

9.22. La bara din figura 9.22 cu valorile numerice: $P = 1\,200$ daN; $R = 10$ cm; $a = 30$ cm; $d = 4$ cm, se cere să se construiască diagrama momentelor încovoietoare şi să se calculeze efortul unitar maxim în secţiunea cea mai solicitată.

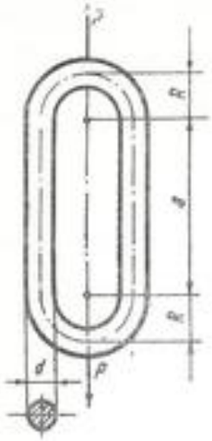


Fig. 9.22

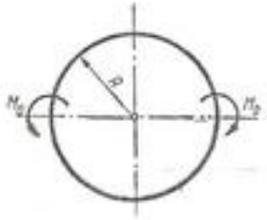


Fig. 9.23

Răspuns. Problema fiind static nedeterminată, se procedează analog problemei 9.20. Se găseşte că momentul maxim este în secţiunea unde se aplică forţele P:

$$M_{max} = -4\,890 \text{ daN cm}.$$

În această secţiune se produc eforturile unitare:
— în interior $\sigma = -926$ daN/cm².
— în exterior $\sigma = 682$ daN/cm².

În porţiunea rectilinie a barei, momentul încovoietor este constant, de valoare:

$$M = 1\,110 \text{ daN cm},$$

iar eforturile unitare ce se produc sînt inferioare celor din partea curbă.

9.23. Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare pentru inelul din figura 9.23 asupra căruia se aplică cuplurile de încovoiere M_0.

10 CAPITOLUL

CALCULUL DEPLASĂRILOR PRIN METODE ENERGETICE

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. *Metoda lui Castigliano* se bazează pe prima teoremă a lui *Castigliano:* derivata energiei mecanice de deformaţie a unui corp elastic în raport cu valoarea scalară a unei forţe P este egală cu proiecţia deplasării punctului de aplicaţie al forţei pe direcţia ei.

2. Această teoremă poate fi extinsă şi în cazul unei forţe generalizate X, derivata energiei mecanice de deformaţie fiind, în acest caz, egală cu deplasarea generalizată δ corespunzătoare.

3. Considerînd ca forţă generalizată un cuplu de moment $\overline{M}$, deplasarea corespunzătoare este egală cu proiecţia rotirii φ a secţiunii, pe direcţia vectorului $\overline{M}$.

4. Considerînd ca forţă generalizată perechea de forţe $\overline{F}$ şi $-\overline{F}$ aplicate respectiv în A şi B pe direcţia AB, deplasarea generalizată corespunzătoare este egală cu depărtarea (apropierea) reciprocă a celor două puncte.

5. În cazul cînd dorim să determinăm deplasarea unui punct în care nu acţionează nici o forţă, se introduce o forţă fictivă P, corespunzătoare deplasării pe care dorim s-o determinăm. După efectuarea calculelor, în rezultatele obţinute se face $P = 0$.

În mod analog se poate proceda, cînd se urmăreşte să se determine o deplasare generalizată.

6. Expresia energiei mecanice de deformaţie acumulată de un sistem de bare este:

$$L = \frac{1}{2}\int\frac{N^2ds}{EA} + \frac{1}{2}\int\frac{kT^2ds}{GA} + \frac{1}{2}\int\frac{M^2ds}{EI} + \frac{1}{2}\int\frac{M_t^2ds}{GI_t}, \qquad (10.1)$$

în care:

N este efortul axial;
T — forţa tăietoare;
M — momentul încovoietor;
M_t — momentul de răsucire;
E — modulul de elasticitate;
G — modulul de elasticitate transversal;
A — aria secţiunii transversale a barei;

I — momentul ei de inerţie faţă de axa neutră;
I_t — momentul ei de inerţie la răsucire faţă de centrul de greutate;
k — un coeficient care depinde de forma secţiunii.

Integralele se calculează pentru toate barele sistemului.

7. În general, lucrul mecanic datorită forfecării se neglijează. Lucrul mecanic al momentelor de răsucire şi al eforturilor axiale se neglijează în cazul barelor la care principala solicitare este încovoierea. Nu se neglijează lucrul mecanic al eforturilor axiale în cazul arcelor şi bolţilor. De asemenea nu se neglijează lucrul mecanic de răsucire la arbori.

8. *Metoda Mohr-Maxwell* se bazează pe teorema lui *Betti:* dacă se consideră două sisteme de forţe — sistemul primar şi sistemul secundar — ce pot acţiona succesiv asupra unui corp elastic, atunci lucrul mecanic produs de forţele sistemului primar, care ar parcurge deplasările produse de sistemul secundar, este egal cu lucrul mecanic produs de forţele sistemului secundar, care ar parcurge deplasările produse de sistemul primar.

În metoda *Mohr-Maxwell* se consideră ca sistem primar, sistemul de forţe dat. Ca sistem secundar se consideră o forţă $P = 1$ sau, în general, o forţă generalizată $X = 1$.

Rezultă atunci că lucrul mecanic produs de forţele sistemului primar, cînd ele parcurg deplasările produse de sistemul secundar, este egal cu deplasarea pe direcţia forţei $P = 1$ a punctului ei de aplicaţie sau, mai general, cu deplasarea generalizată care corespunde forţei generalizate $X = 1$.

9. Notînd cu M_x, N_x, M_{tx}, T_x, respectiv momentul încovoietor, forţa axială, momentul de răsucire şi forţa tăietoare produse de sistemul de forţe dat într-o secţiune oarecare şi cu m_x, n_x, m_{tx}, t_x eforturile din aceeaşi secţiune produse de forţa $P = 1$ (respectiv forţa generalizată $X = 1$), deplasarea pe direcţia forţei $P = 1$ (respectiv deplasarea generalizată) va fi:

$$\delta = \int \frac{M_x m_x}{EI}\, ds + \int \frac{N_x n_x}{EA}\, ds + \int \frac{M_{tx} m_{tx}}{GI_t}\, ds + \int \frac{k T_x t_x}{GA}\, ds. \qquad (10.2)$$

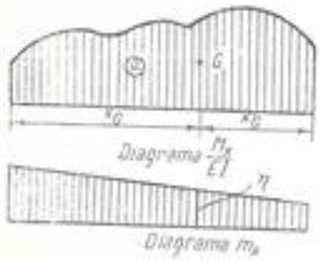


Fig. 10.a

10. După caz se pot neglija în expresia (10.2) termenii corespunzători forfecării, răsucirii sau solicitării axiale.

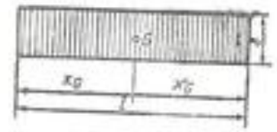
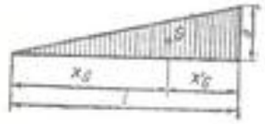
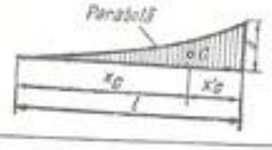
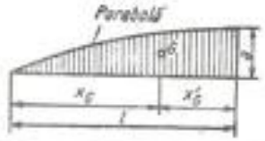
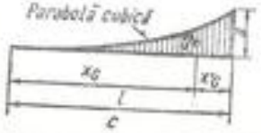
11. Regula lui *Vereşceaghin.* Calculul integralelor ce intervin în metoda *Mohr-Maxwell* (10.2) poate fi făcut în cazul cînd m_x, n_x, m_{tx}, t_x au variaţii liniare (ceea ce se întîmplă în cazul sistemelor formate din bare drepte), folosind regula lui *Vereşceaghin:* valoarea unei integrale de forma (10.2) este egală cu produsul dintre aria Ω a diagramei $\frac{M_x}{EI}$ $\left(\text{respectiv } \frac{N_x}{EA}, \frac{M_{tx}}{GI_t}, \frac{kT_x}{GA}\right)$

şi ordonata η a diagramei m_x (respectiv n_x, m_{tx}, t_x) corespunzătoare centrului de greutate G al primei diagrame (Fig. 10. *a*).

$$\int \frac{M_x m_x}{EI}\, ds = \Omega \cdot \eta. \qquad (10.3)$$

12. Pentru cazurile curente ce se întîlnesc în aplicaţii se poate utiliza tabela 10. *a*, ce conţine date privind aria Ω a diagramei $\frac{M_x}{EI}$ şi poziţia centrului ei de greutate. Pentru cazuri mai complicate se va descompune diagrama $\frac{M_x}{EI}$ în diagrame simple de forma celor din tabela 10. *a*.

Tabela 10.a

Diagrama $\frac{M_x}{EI}$	Expresia ordonatei diagramei	Ω	x_G	x'_G
	a	al	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$a\frac{x}{l}$	$\frac{al}{2}$	$\frac{2l}{3}$	$\frac{l}{3}$
	$a\frac{x^2}{l^2}$	$\frac{al}{3}$	$\frac{3l}{4}$	$\frac{l}{4}$
	$2a\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{2l}\right)$	$\frac{2al}{3}$	$\frac{5l}{8}$	$\frac{3l}{8}$
	$a\frac{x^3}{l^3}$	$\frac{al}{4}$	$\frac{4l}{5}$	$\frac{l}{5}$

B. PROBLEME REZOLVATE

10.1. Să se determine deplasarea pe verticală şi pe orizontală a punctului A al sistemului de bare articulate din figura 10.1, *a*. Să se determine apoi condiţia ca deplasarea pe orizontală să fie nulă. Barele au secţiuni şi lungimi egale.

Rezolvare. Se aplică metoda lui *Castigliano*. Se determină mai întîi eforturile în bare produse de forţa P.

a) Deplasarea pe verticală (Fig. 10.1, *b*). Se izolează nodul A sub acţiunea forţelor P, S_1 şi S_2. Proiecţia forţelor pe orizontală dă:

$$S_1 \cos\alpha - S_2 \cos\beta = 0; \quad S_2 = S_1 \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Proiecţia forţelor pe verticală dă:

$$S_2 \sin\beta + S_1 \sin\alpha = P,$$

de unde:

$$S_1 = \frac{P\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{şi} \quad S_2 = \frac{P\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Expresia generală a energiei de deformaţie acumulată de o bară de lungime l şi secţiune A, solicitată de o forţă axială, este: $L = \frac{N^2 l}{2EA}$ care, pentru sistemul de bare din figura 10.1, *a*, devine:

$$L = \frac{l}{2AE}\left[\frac{P^2\cos^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} + \frac{P^2\cos^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right] = \frac{P^2 l}{2AE}\left[\frac{\cos^2\beta+\cos^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right].$$

Pentru a obţine deplasarea pe verticală, se derivează energia în raport cu forţa care dă deplasarea:

$$v = \frac{\partial L}{\partial P} = \frac{Pl}{AE}\cdot\frac{\cos^2\beta+\cos^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

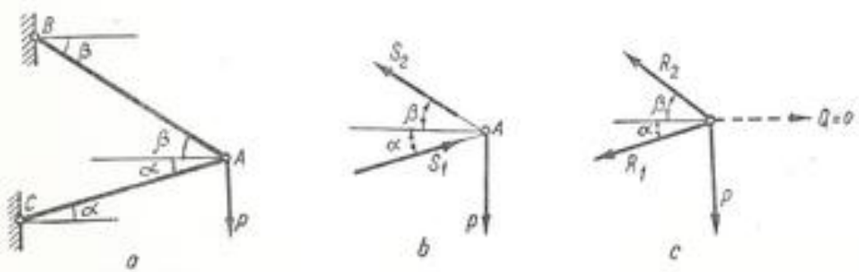


Fig. 10.1

b) Deplasarea pe orizontală. Se introduce forţa orizontală fictivă Q (Fig. 10.1, *c*). Fie T_1 şi T_2 eforturile totale în bare sub acţiunea lui P şi Q, iar R_1 şi R_2 eforturile în bare numai sub acţiunea lui Q.

Ecuaţia de proiecţii pe orizontală dă:

$$R_1 \cos\alpha + R_2 \cos\beta - Q = 0.$$

Ecuaţia de proiecţii pe verticală dă:

$$R_1 \sin\alpha - R_2 \sin\beta = 0; \quad R_2 = R_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Înlocuind în ecuaţia de mai sus pe R_2 cu valoarea găsită, se obţine:

$$R_1 \cos\alpha + R_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta = Q; \quad R_1 = \frac{Q\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}; \quad R_2 = \frac{Q\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Eforturile totale în bare sînt:

$$T_1 = R_1 - S_1; \; T_2 = S_2 + R_2.$$

Deci:

$$T_1 = \frac{Q\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - \frac{P\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}; \quad T_2 = \frac{Q\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{P\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Expresia energiei de deformaţie este:

$$L = \frac{l}{2AE}\left[\frac{(Q\sin\beta - P\cos\beta)^2 + (Q\sin\alpha + P\cos\alpha)^2}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right] =$$

$$= \frac{l}{2AE}\left[\frac{Q^2\sin^2\beta - 2QP\sin\beta\cos\beta + P^2\cos^2\beta + Q^2\sin^2\alpha + 2PQ\sin\alpha\cos\alpha + P^2\cos^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right] =$$

$$= \frac{l}{2AE\sin^2(\alpha+\beta)}\left[P^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta) + PQ(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + Q^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)\right].$$

Notînd: $\frac{l}{2AE\sin^2(\alpha+\beta)} = K$, expresia energiei devine:

$$L = KP^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) + KPQ(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + KQ^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta).$$

Pentru a determina deplasarea, se derivează expresia de mai sus în raport cu forţa Q:

$$u = \frac{\partial L}{\partial Q} = KP(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + 2KQ(\sin^2\alpha + \sin^2\beta).$$

Făcînd $Q = 0$, se obţine:

$$u = \frac{P(\sin 2\alpha - \sin 2\beta)}{2AE\sin^2(\alpha+\beta)}\, l.$$

Pentru ca deplasarea pe orizontală să fie nulă, este suficient ca:

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta, \text{ adică } \alpha = \beta.$$

10.2. La sistemul articulat din figura 10.2, *a*, format din bare de aceeaşi lungime l şi secţiune A, să se calculeze deplasarea pe verticală a nodului *1* sub efectul forţei P.

Rezolvare. Se calculează întîi eforturile în bare. Fie N_1 şi N_2 eforturile de compresiune în cele două bare, concurente în punctul *1*.

Din ecuaţia de proiecţii pe verticală rezultă:

$$P = N_1 \cos 30° + N_2 \cos 30°.$$

Din ecuaţia de proiecţii pe orizontală rezultă: $N_1 = N_2 = N$, deci

$$P = 2N \cos 30°; \quad N = \frac{P}{\sqrt{3}}.$$

Pentru determinarea efortului în bara *2—3* se consideră nodul *2* detaşat, sub acţiunea forţelor: N, N_{23} şi $V_2 = \frac{P}{2}$ (Fig. 10.2, *b*).

Proiectînd pe orizontală forţele concurente în acest nod, se obţine:

$$\frac{P}{\sqrt{3}} \cos 60° = N_{23}; \quad N_{23} = \frac{P}{2\sqrt{3}}.$$

Energia totală de deformaţie este:

$$L = \frac{l}{2AE}(2N^2 + N_{23}^2) = \frac{P^2 l}{2EA}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12}\right) = \frac{3P^2 l}{8EA}.$$

Deplasarea punctului *1* pe direcţia forţei P va fi:

$$v_1 = \frac{\partial L}{\partial P} = \frac{6Pl}{8EA} = \frac{3Pl}{4EA}.$$

10.3. O bară de secţiune circulară cu diametrul de 80 mm, articulată în *0*, de lungime $l = 1{,}00$ m, este legată în A cu o altă bară AB de secţiune circulară cu diametrul de 10 mm (Fig. 10.3, *a*). Prima bară este acţionată transversal de o sarcină uniform distribuită $p = 1\,000$ daN/m. Se cere să se determine deplasarea verticală a punctului A.

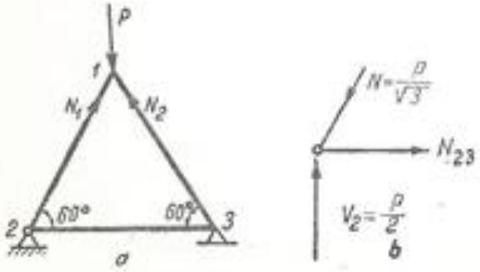


Fig. 10.2

Rezolvare. Se determină reacţiunile din articulaţia *0* şi forţa de întindere T din firul AB (Fig. 10.3, *b*). Ecuaţiile de echilibru:

$$H_0 - T \cos 45° = 0,$$

$$V_0 + T \sin 45° - 1\,000 = 0,$$

$$V_0 \cdot 1{,}00 - 1\,000 \cdot 0{,}50 = 0.$$

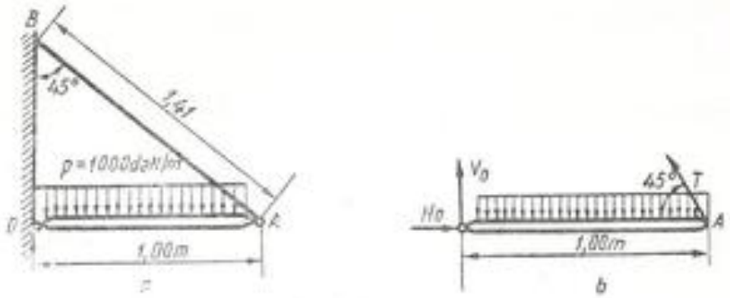


Fig. 10.3, *a*, *b*

Rezultă:

$$V_0 = 500 \text{ daN}; \quad H_0 = 500 \text{ daN}; \quad T = 707 \text{ daN}.$$

Se desenează diagrama eforturilor axiale (Fig. 10.3, *c*). Bara OA este comprimată cu 500 daN, iar AB este întinsă cu 707 daN.

Se desenează diagrama M (Fig. 10.3, *d*) pe bara OA avînd variaţia cunoscută de la grinda simplu rezemată:

$$M_{max} = \frac{1\,000 \cdot 1{,}00^2}{8} = 125 \text{ daNm}.$$

Se consideră o forţă verticală $P = 1$ în A (Fig. 10.3, *e*). Din ecuaţiile de echilibru:

$$H_0 - T \cos 45° = 0; \; V_0 + T \sin 45° - 1 = 0; \; V_0 \cdot l = 0,$$

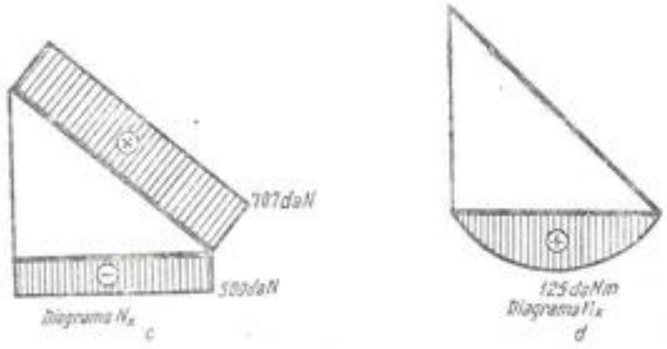


Fig. 10.3, *c*, *d*

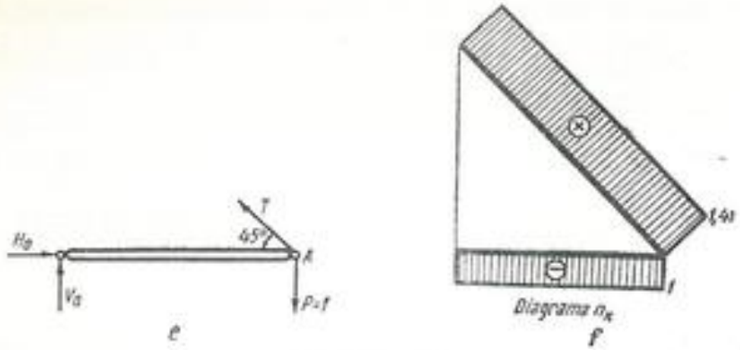


Fig. 10.3, *e*, *f*

rezultă:

$$H_0 = 1;\ V_0 = 0;\ T = 1{,}41.$$

Se desenează diagrama eforturilor axiale n. Bara OA este comprimată cu 1, iar bara AB este întinsă cu 1,41 (Fig. 10.3, *f*).

Diagrama m_x este egală cu zero, deoarece V_0 este egală cu zero. Pentru calculul săgeții v pe verticală, se aplică formula (10.2):

$$v = \int \frac{M_x m_x}{EI}\,ds + \frac{N_x n_x}{EA}\,ds,$$

în care $M_{tx} = 0$.

Se vede că:

$$\int \frac{M_x m_x}{EI}\,ds = 0,$$

deoarece $m_x = 0$ și:

$$v = \Sigma \int \frac{N_x n_x}{EA}\,ds = (-500 \cdot 100)\frac{-1}{EA_1} +$$

$$+ (+707 \cdot 141)\frac{(+1{,}41)}{EA_2} = \frac{50\,000}{EA_1} + \frac{141\,000}{EA_2}.$$

Pentru cazul aplicației numerice: $E = 2\,100\,000$ daN/cm²,

$$A_1 = \frac{3{,}14 \cdot 8^2}{4} = 50{,}26 \text{ cm}^2,$$

$$A_2 = \frac{3{,}14 \cdot 1^2}{4} = 0{,}78 \text{ cm}^2,$$

$$v = \frac{50\,000}{2\,100\,000 \cdot 50{,}26} + \frac{141\,000}{2\,100\,000 \cdot 0{,}78} \approx 0{,}086 \text{ cm}.$$

10.4. Se consideră grinda cu zăbrele din figura 10.4, *a*. Să se determine săgeata la mijlocul deschiderii. Barele sînt de secțiune constantă A. Modulul de elasticitate este E. Aplicație: $a = 5$ m, $A = 10$ cm², $E = 2\,100\,000$ daN/cm².

Rezolvare. Se determină reacțiunile din reazemul simplu *1* și articulația *9*. În cazul din figura 10.4, *a*, din motive de simetrie:

$$V_1 = V_9 = 7{,}5 \text{ kN},\ H_9 = 0.$$

Se determină eforturile N_x în bare, folosind una dintre metodele cunoscute (izolarea nodurilor, metoda secțiunilor, metoda grafică *Cremona*). Eforturile sînt date în tabela 10.4, *a*. (Eforturile pozitive sînt de întindere, iar cele negative sînt de compresiune. Valorile lor sînt rotunjite la o zecimală.)

Tabela 10.4, a

Valorile eforturilor N_x

Bara	1–2 și 9–10	1–3 și 7–9	2–3 și 7–10	2–4 și 8–10	3–4 și 7–8	3–5 și 5–7	4–5 și 5–8	4–6 și 6–8	5–6
Efortul (kN)	−7,5	0	+10,6	−7,5	−2,5	+7,5	+3,5	−10	0

Se determină apoi eforturile n_x în barele grinzii sub acțiunea unei forțe $P = 1$ kN aplicată în nodul 5 (Fig. 10.4, *b*). Reacțiunile sînt:

$$V_1 = V_9 = 0{,}5 \text{ kN};\ H_9 = 0.$$

Eforturile sînt date în tabela 10.4, *b*.

Tabela 10.4, b

Valorile eforturilor n_x

Bara	1–2 și 9–10	1–3 și 7–9	2–3 și 7–10	2–4 și 8–10	3–4 și 7–8	5–3 și 5–7	4–5 și 5–8	4–6 și 6–8	5–6
Efortul (kN)	−0,5	0	+0,7	−0,5	−0,5	+0,5	+0,7	−1	0

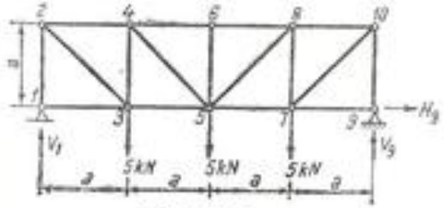


Fig. 10.4, *a*

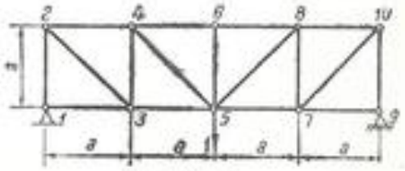


Fig. 10.4, *b*

Pentru determinarea săgeţii grinzii cu zăbrele în dreptul nodului 5 se aplică formula:

$$v_5 = \Sigma \int \frac{N_x n_x}{EA} ds,$$

dedusă din formula generală (10.1), făcînd $M_x = 0$, $M_{1x} = 0$. Ţinînd seamă că N_x şi n_x sînt constante:

$$v_5 = \Sigma \frac{N_x \cdot n_x \cdot l}{EA}.$$

Calculul săgeţii este redat în tabela 10.4, *c*.

Tabela 10.4, c

Bara	N_x	n_x	l	$\frac{N_x n_x l}{EA}$
1–2 şi 9–10	−7,5	−0,5	a	$\frac{3,75\ a}{EA}$
1–3 şi 7–9	0	0	a	0
2–3 şi 7–10	+10,6	+0,7	1,4 a	$\frac{10,4\ a}{EA}$
2–4 şi 8–10	−7,5	−0,5	a	$\frac{3,75\ a}{EA}$
3–4 şi 7–8	−2,5	−0,5	a	$\frac{1,25\ a}{EA}$
3–5 şi 5–7	+7,5	+0,5	a	$\frac{3,75\ a}{EA}$
4–5 şi 5–8	+3,5	+0,7	1,4 a	$\frac{3,43\ a}{EA}$
4–6 şi 6–8	−10	−1	a	$\frac{10\ a}{EA}$
5–6	0	0	a	0

Atunci săgeata pe verticală a nodului *5* este:

$$v_5 = 2[3,75 + 10,4 + 3,75 + 1,25 + 3,75 + 3,43 + 10]\frac{a}{EA} = \frac{72,66a}{EA}.$$

În cazul aplicaţiei numerice:

$$v_5 = \frac{7\,266 \cdot 500}{2\,100\,000 \cdot 10} = 0,173 \text{ cm}.$$

10.5. Un cadru cotit în spaţiu (Fig. 10.5) are secţiunea circulară de moment de inerţie I. Materialul din care este făcut cadrul are modulul de elasticitate longitudinal E şi modulul de elasticitate transversal G. Se cere să se determine săgeata pe verticală a extremităţii sale *4*, cînd este solicitat de forţa verticală P. (Barele *1–2* şi *2–3* sînt într-un plan vertical, iar barele *2–3* şi *3–4* sînt într-un plan orizontal.)

Rezolvare. Se aplică metoda *Castigliano*: Bara *3–4* (încovoiere):

$$M = -Px; \frac{\partial M}{\partial P} = -x.$$

Bara *2–3* (încovoiere şi răsucire):

$$M = -Py; \frac{\partial M}{\partial P} = -y, \text{ apoi } M_t = Pa, \frac{\partial M_t}{\partial P} = a.$$

Bara *1–2* (încovoiere şi compresiune):

$$M = -P\sqrt{a^2 + b^2}; \frac{\partial M}{\partial P} = -\sqrt{a^2 + b^2}; N = P; \frac{\partial N}{\partial P} = 1.$$

Atunci:

$$v_4 = \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} ds + \int \frac{M_t}{GI_p} \frac{\partial M_t}{\partial P} ds + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P} \cdot ds.$$

Însă:

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} ds = \int_0^a \frac{(-Px)(-x)}{EI} dx + \int_0^b \frac{(-Py)(-y)}{EI} dy +$$

$$+ \int_0^c \frac{(-P\sqrt{a^2 + b^2})(-\sqrt{a^2 + b^2})}{EI} dz = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pb^3}{3EI} + \frac{P(a^2 + b^2)c}{EI}.$$

Apoi, fiindcă la o secţiune circulară $I_p = 2I$:

$$\int \frac{M_t}{GI_p} \frac{\partial M_t}{\partial P} ds = \int_0^b \frac{Pa \cdot a}{2GI} dy = \frac{Pa^2b}{2GI}.$$

Apoi:

$$\int \frac{N}{EA} \cdot \frac{\partial N}{\partial P} \cdot ds = \int_0^c \frac{P \cdot 1}{EA} \cdot dz = \frac{P \cdot c}{EA},$$

încît:

$$v_4 = \frac{P}{3EI}[a^3 + b^3 + 3(a^2 + b^2)c] + \frac{Pa^2b}{2GI} + \frac{Pc}{EA}.$$

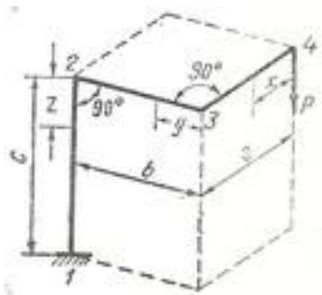


Fig. 10.5

10.6. O grindă orizontală cotită în unghi drept, încastrată la o extremitate şi liberă la cealaltă, este solicitată la capătul liber de o forţă verticală P. Să se determine săgeata la extremitatea grinzii. Secţiunea barei fiind circulară plină, se cere să se determine raportul dintre a şi b, astfel încît săgeata datorită încovoierii să fie egală cu cea datorită răsucirii (Fig. 10.6). Să se studieze influenţa răsucirii, indicîndu-se în ce caz poate fi neglijată.

Rezolvare. Se aplică metoda *Castigliano*.

Bara *1—2* (încovoiere):

$$M = -Px; \frac{\partial M}{\partial P} = -x.$$

Bara *2—3* (încovoiere şi răsucire):

$$M = -Py, \frac{\partial M}{\partial P} = -y; \quad M_t = Pa, \quad \frac{\partial M_t}{\partial P} = a.$$

Atunci:

$$v_1 = \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \cdot ds + \int \frac{M}{GI_p} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial P} \cdot ds.$$

Dar:

$$\int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \cdot ds = \int_0^a \frac{Px \cdot x}{EI} \cdot dx + \int_0^b \frac{Py \cdot y}{EI} \cdot dy = \frac{P(a^3 + b^3)}{3EI}$$

şi:

$$\int \frac{M_t}{GI_p} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial P} \cdot ds = \int_0^b \frac{Pa \cdot a}{GI_p} \cdot dy = \frac{Pa^3 \cdot b}{GI_p}.$$

Săgeata va fi:

$$v_1 = \frac{P(a^3 + b^3)}{3EI} + \frac{Pa^3 \cdot b}{GI_p}.$$

Primul termen reprezintă săgeata datorită încovoierii, iar al doilea termen, săgeata datorită răsucirii. Pentru ca aceste două săgeţi să fie egale, trebuie ca:

$$\frac{P(a^3 + b^3)}{3EI} = \frac{Pa^3b}{GI_p}.$$

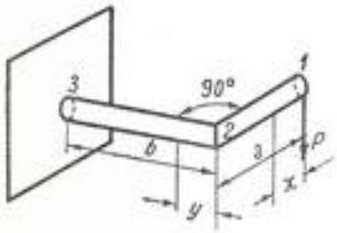


Fig. 10.6

Pentru secţiunea circulară $I = \frac{\pi d^4}{64}$, $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$. Dacă bara este de oţel, $G = \frac{3}{8}E$. Înlocuind şi simplificînd, găsim condiţia:

$$a^3 + b^3 = 4a^3b \text{ sau } \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 4\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = 0.$$

Rădăcinile acceptabile sînt, cu aproximaţie, $\frac{a}{b} = 0{,}54$ şi $\frac{a}{b} = 3{,}94$.

Cînd $\frac{a}{b} < 0{,}54$ sau $\frac{a}{b} > 3{,}94$, influenţa încovoierii este mai mare decît aceea a răsucirii. Cînd $0{,}54 < \frac{a}{b} < 3{,}94$, influenţa răsucirii este mai mare decît a încovoierii. Pentru ca influenţa răsucirii să poată fi neglijată, trebuie ca aportul ei să nu reprezinte mai mult decît 2% din săgeata totală, adică:

$$0{,}02(a^3 + b^3 + 4a^3b) = 4a^3b;$$

sau:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 196\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = 0,$$

cu rădăcinile $\frac{a}{b} = 0{,}072$ şi $\frac{a}{b} = 196$. Influenţa răsucirii poate fi neglijată cînd $\frac{a}{b} < 0{,}072$ sau cînd $\frac{a}{b} > 196$.

10.7. Să se determine deplasarea pe verticală şi rotirea secţiunii în punctul *2* pentru grinda încastrată din figura 10.7, ştiind că are momentul de inerţie constant.

Rezolvare. 1) Pentru a determina deplasarea punctului *2* pe verticală, se consideră că în acest punct lucrează o forţă fictivă Q.

Intervalul *2—1*:

$$M = -\left(Qx + q\frac{x^2}{2}\right); \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = -x.$$

Intervalul *1—0*:

$$M = -\left[Q(3a + x) + q \cdot 3a\left(\frac{3a}{2} + x\right)\right]; \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = -(3a + x),$$

$$v_2 = \frac{1}{EI}\int_0^{3a}\left(Qx + q\frac{x^2}{2}\right)x\,dx + \frac{1}{EI}\int_0^a\left[Q(3a + x) + 3aq\left(\frac{3a}{2} + x\right)\right](3a + x)\,dx.$$

Făcînd $Q = 0$, se obţine:

$$v_2 = \frac{1}{EI}\int_0^{3a} q\frac{x^3}{2}\,dx + \frac{1}{EI}\int_0^a\left(\frac{27}{2}a^3q + 9a^3qx + \frac{9}{2}a^2qx + 3aqx^2\right)dx;$$

$$v_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{81a^4q}{8} + \frac{27}{2}a^4q + \frac{9}{2}a^4q + \frac{9}{4}a^4q + a^4q\right] = 31{,}375\,q\frac{a^4}{EI}.$$

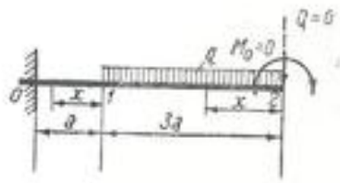


Fig. 10.7

2) Pentru a determina rotirea secţiunii în punctul *2*, se consideră că în acest punct lucrează un moment fictiv M_0.

Intervalul $2-1$:

$$M = -\left(M_0 + q\frac{x^2}{2}\right); \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = -1.$$

Intervalul $1-0$:

$$M = -\left[M_0 + q \cdot 3a\left(\frac{3a}{2} + x\right)\right]; \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = -1.$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI}\int_0^{3a}\left(M_0 + q\frac{x^2}{2}\right)dx + \frac{1}{EI}\int_0^{a}\left[M_0 + q \cdot 3a\left(\frac{3a}{2} + x\right)\right]dx.$$

Făcînd $M_0 = 0$, obţinem:

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI}\int_0^{3a} q\frac{x^2}{2}\,dx + \frac{1}{EI}\int_0^{a} 3aq\left(\frac{3a}{2} + x\right)dx.$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{27}{6}qa^3 + \frac{9}{2}qa^3 + \frac{3}{2}qa^3\right] = \frac{10{,}5}{EI}qa^3.$$

10.8. Să se determine deplasarea pe verticală şi pe orizontală a punctului *3* pentru grinda cotită din figura 10.8, ştiind că are momentul de inerţie constant. Se va neglija lungirea barei *1—2*.

Rezolvare. Se aplică metoda *Mohr-Maxwell-Vereşceaghin*. Cu ajutorul diagramelor M şi m_v se obţine:

$$v_3 = \frac{1}{EI}\Sigma\int Mm\,dx = \frac{1}{EI}\Sigma\,\Omega\eta = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(-Pa)a\,\frac{2}{3}(-a) + \right.$$

$$+ (-Pa)\,b(-a) + \frac{1}{2}(-Pa)c\left\{\frac{2}{3}(-a) + \frac{1}{3}[-(a+c)]\right\} +$$

$$\left. + \frac{1}{2}[-P(a+c)]c\left\{\frac{1}{3}(-a) + \frac{2}{3}[-(a+c)]\right\}\right] = \frac{P}{EI}\left[\frac{a^3}{3} + a^2b + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2c}{3} + \frac{ac(a+c)}{6} + \frac{ac(a+c)}{6} + \frac{c(a+c)^2}{3}\right] = \frac{P}{3EI}[(a+c)^3 + 3a^2b].$$

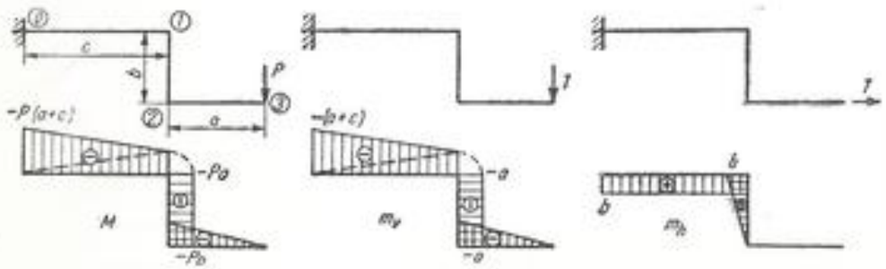


Fig. 10.8

Cu ajutorul diagramelor M şi m_h:

$$u_3 = \frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{2}[Pa + P(a+c)]\,c(+b) + \right.$$

$$\left. + (-Pa)b\,\frac{1}{2}(+b)\right] = -\frac{Pb}{2EI}[ab + 2ac + c^2].$$

Semnul (—) arată că deplasarea se face în sens invers forţei unitare.

10.9. Să se determine rotirea secţiunii *3* a unei grinzi simplu rezemate, încărcată ca în figura 10.9, ştiind că are momentul de inerţie constant.

Rezolvare. Se aplică metoda *Mohr-Maxwell-Vereşceaghin*. Se introduce un moment fictiv $M = 1$ în secţiunea respectivă. Rezultă deci:

$$EI\varphi_3 = \left[\frac{1}{2}2a\left(-\frac{Ha}{3}\right)\right] \cdot \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} \cdot 4a \cdot \frac{2}{3}Ha\right] \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3};$$

$$EI\varphi_3 = \frac{2}{27}Ha^2 + \frac{16}{27}Ha^2; \quad \varphi_3 = \frac{2Ha^2}{3EI}.$$

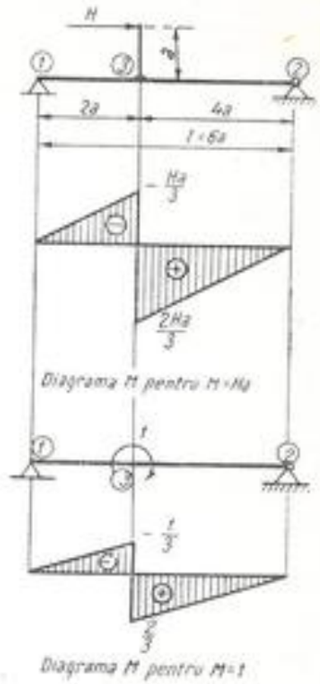


Fig. 10.9

10.10. Să se determine rotirea reazemului *2* la grinda simplu rezemată cu consolă, încărcată ca în figura 10.10, ştiind că are momentul de inerţie constant.

Rezolvare. Se foloseşte metoda *Mohr-Maxwell*. Reacţiunile:

$$V_1 = -\frac{M_0}{l}; \quad V_2 = +\frac{M_0}{l};$$

$$M_1 = M_0; \quad M_2 = 0.$$

Pentru calculul rotirii se introduce un moment fictiv $M = 1$ pe reazemul *2*, considerînd grinda numai sub acţiunea acestui moment.

Reacţiunile sînt:

$$V_1' = \frac{1}{l} \text{ şi } V_2' = -\frac{1}{l}.$$

Rezultă diagrama m_v (Fig. 10.10).

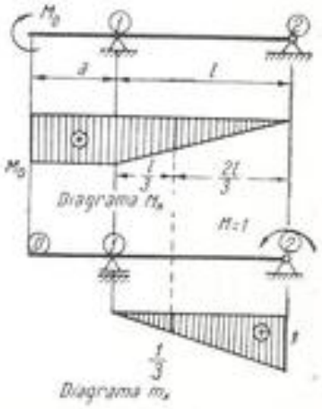


Fig. 10.10

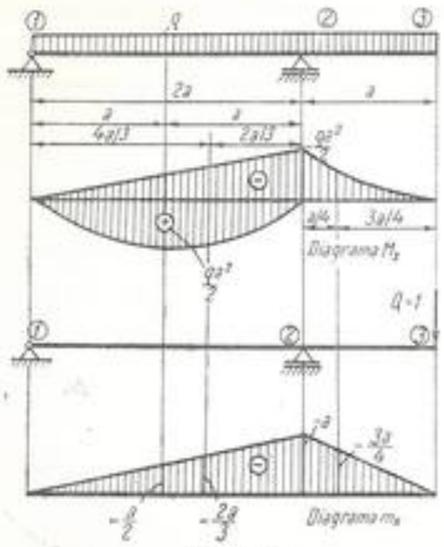


Fig. 10.11

Se folosește metoda de integrare *Vereșceaghin*.

$$EI\varphi_2 = \frac{1}{2} l \cdot M_0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} M_0 l;$$

$$\varphi_2 = \frac{M_0 l}{6EI}.$$

10.11. Să se determine deplasarea pe verticală a punctului *3* la grinda din figura 10.11 încărcată cu sarcina uniform distribuită q, știind că are moment de inerție constant.

Rezolvare. Se folosește metoda *Mohr-Maxwell*. Pentru aceasta s-au trasat: diagrama M_z (prin metoda suprapunerii efectelor) și diagrama m_z pentru forța $Q = 1$ (unitatea de forță), aplicată în *3*. Notînd cu f_3 săgeata în *3*, aplicînd procedeul *Vereșceaghin*, rezultă:

$$EIf_3 = \frac{2}{3}\frac{qa^2}{2} 2a\left(-\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{qa^2}{2}\right) 2a\left(-\frac{2a}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{qa^2}{2}\right) a \cdot \left(-\frac{3a}{4}\right) =$$

$$= -\frac{qa^4}{3} + \frac{qa^4}{3} + \frac{qa^4}{8} = \frac{qa^4}{8},$$

de unde:

$$f_3 = \frac{qa^4}{8EI}.$$

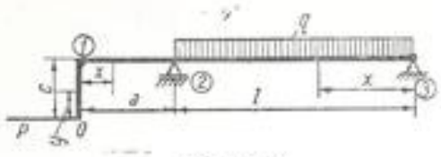


Fig. 10.12

10.12. Se consideră grinda cotită din figura 10.12, de secțiune constantă, încărcată cu o sarcină uniform distribuită q pe deschiderea l. Să se determine sarcina P, astfel ca extremitatea O a consolei să nu se deplaseze pe orizontală. Să se determine în acest caz valoarea forței P, dacă: $l = 5$ m; $q = 1$ kN/m; $a = 2$ m; $c = 1{,}20$ m. Se vor neglija scurtările datorite compresiunii.

Rezolvare. Se folosește metoda lui *Castigliano*. Se calculează întîi reacțiunile:

$$H_2 = P;\ V_2 = \frac{ql}{2} + \frac{Pc}{l};\ V_3 = \frac{ql}{2} - \frac{Pc}{l}.$$

În tabela 10.12 se dau expresiile M și $\frac{\partial M}{\partial P}$ în diferitele regiuni ale grinzii:

$$u_0 = \frac{1}{EI}\int M \cdot \frac{\partial M}{\partial P}\,dx = \frac{1}{EI}\left[\int_0^c Py^2 dy + \int_0^a Pc^2 dx + \int_0^l \frac{c}{l}\left(\frac{qx^2}{2} + \frac{Pcx^2}{l} - \frac{qlx^2}{2}\right) dx\right] = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pc^3}{3} + Pc^2 a + \frac{Pc^2 l}{3} - \frac{ql^2 c}{24}\right].$$

Egalînd cu zero această expresie, se obține:

$$P = \frac{1}{24}\frac{qcl^2}{\frac{c^3}{3} + c^2 a + \frac{c^2 l}{3}} = \frac{1 \cdot 1{,}2 \cdot 5^2}{24\left[\frac{1{,}2^3}{3} + 2 \cdot 1{,}2^2 + \frac{1{,}2^2 \cdot 5}{3}\right]} = 1{,}067 \text{ kN}.$$

Tabela 10.12

Regiunea	0–1	1–2	2–3
M	$-Py$	$-Pc$	$V_2 x - \frac{qx^2}{2} = \left(\frac{ql}{2} - Pc\right)\frac{x}{l} - \frac{qx^2}{2}$
$\frac{\partial M}{\partial P}$	$-y$	$-c$	$-\frac{c}{l}x$

10.13. Se consideră cadrul din figura 10.13, *a*. Să se determine cu cît se apropie în urma deformației punctele *A* și *B*. Rigla și stîlpii au același moment de inerție *I*. Modulul de elasticitate al materialului este *E*.

Rezolvare. Se consideră două stări de încărcare:

— starea reală (Fig. 10.13, *a*);

— o încărcare cu două forțe $P = 1$ opuse, avînd ca suport dreapta *AB* (Fig. 10.13, *b*).

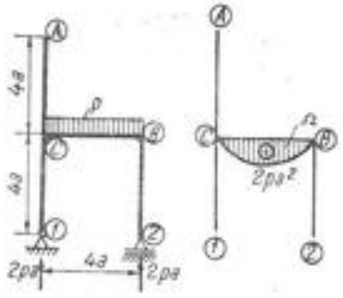


Fig. 10.13, *a*

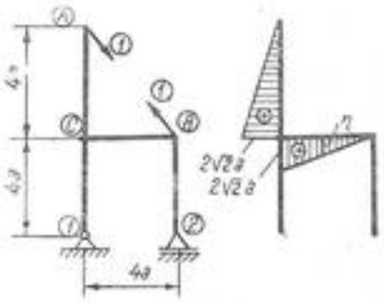


Fig. 10,13, *b*

Pentru prima stare (Fig. 10.13, *a*), reacţiunile sînt: $V_1 = V_2 = 2pa$; $H_1 = 0$. Pe stîlpi, momentele încovoietoare sînt nule. Valoarea maximă a momentului încovoietor pe riglă este: $M = \frac{p(4a)^2}{8} = 2pa^2$.

Pentru a doua stare (Fig. 10.13, *b*), reacţiunile sînt nule, iar diagrama momentelor încovoietoare este liniară pe stîlpul AC şi pe rigla BC, avînd valorile maxime în C, egale cu:

$$1 \cdot 4a\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \cdot a.$$

Se aplică metoda de integrare Vereşceaghin.

$$\Omega = \frac{2}{3} \cdot \frac{2pa^2}{EI} \cdot 4a = \frac{16pa^3}{3EI}.$$

Centrul de greutate al acestei suprafeţe se află la mijlocul deschiderii riglei CB. În dreptul mijlocului grinzii, ordonata diagramei m_x din figura 10.13, *b* are valoarea:

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot a = a\sqrt{2}.$$

Distanţa cu care se apropie punctele A şi B va fi:

$$\Delta = \Omega\eta = \frac{16pa^3}{3EI} \cdot a\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}\,pa^4}{3EI}.$$

10.14. Să se determine deplasarea pe orizontală a reazemului *2* la cadrul din figura 10.14. Ambele grinzi ale cadrului au acelaşi moment de inerţie I. Se neglijează deformaţiile datorite eforturilor axiale.

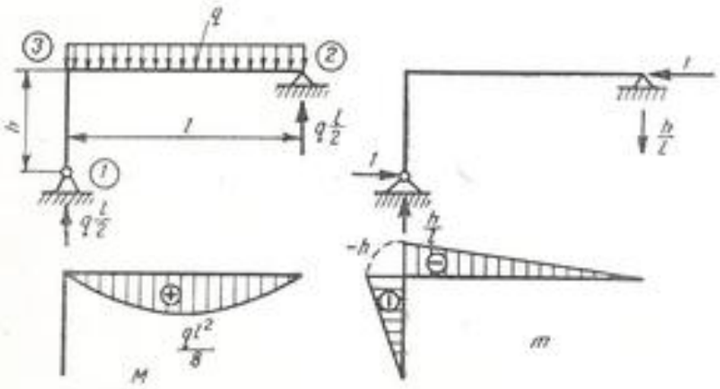


Fig. 10.14

Rezolvare. Se aplică metoda *Mohr-Maxwell-Vereşceaghin.*

$$u_2 = \int_1^2 \frac{M_x m_x}{EI}\,dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3}\,\frac{pl^2}{8}\,l\left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{pl^3h}{24EI}.$$

Semnul (—) arată că deplasarea reazemului *2* se face în sens invers sensului forţei unitare.

10.15. Se consideră cadrul din figura 10.15 încărcat cu sarcina p, considerată uniform distribuită pe proiecţia orizontală. Să se determine deplasarea pe orizontală a reazemului din dreapta. Barele cadrului au acelaşi moment de inerţie I.

Rezolvare. Se foloseşte metoda de rezolvare *Mohr-Maxwell*, aplicînd regula de integrare a lui *Vereşceaghin*:

$$\delta = \int \frac{M_x m_x}{EI}\,ds = 2\,\frac{1}{EI}\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{l}{2}\right]\left(-\frac{5}{8}h\right) = -\frac{5pl^3h}{96EI}.$$

Semnul lui δ fiind negativ, înseamnă că deplasarea se va produce spre dreapta, întrucît forţa unitară a fost considerată dirijată spre stînga.

10.16. Să se determine deplasarea reazemului *2* al cadrului din figura 10.16, încărcat cu o sarcină uniform distribuită q pe grinda orizontală. Cadrul este articulat la capătul *1* şi simplu rezemat în *2*. Toate grinzile cadrului au acelaşi moment de inerţie I.

Rezolvare. Se aplică metoda lui *Castigliano*. Pentru uşurinţa calculului se întocmeşte tabela 10.16.

Înlocuind $H = 0$ în aceste expresii, obţinem:

$$u_2 = \frac{1}{EI}\int M \cdot \frac{\partial M}{\partial H}\,ds = \frac{1}{EI}\int_0^l \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right)(-h)\,dx = -\frac{ql^3h}{12\,EI}.$$

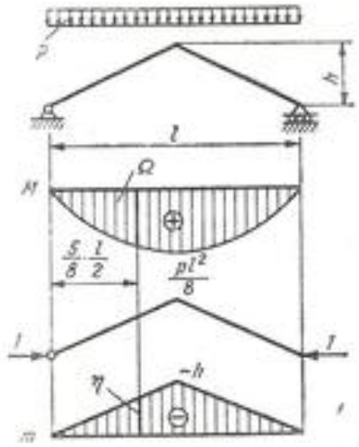


Fig. 10.15

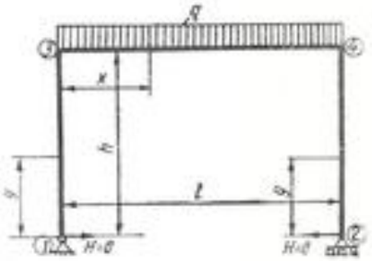


Fig. 10.16

Tabela 10.16

Regiunea	1–3	3–4	4–2
M	$-Hy$	$\frac{qlx}{2}-\frac{qx^2}{2}-Hh$	$-Hy$
$\frac{\partial M}{\partial H}$	$-y$	$-h$	$-y$

10.17. Să se determine deplasarea reazemului *1* pentru cadrul din figura 10.17. Toate grinzile cadrului au acelaşi moment de inerţie *I*.

Rezolvare. Se foloseşte metoda *Mohr-Maxwell-Vereşceaghin.*

$$u_1=\int_1^2\frac{M_xm_x}{EI}\,dx=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{qh^2}{2}\right)h\cdot\frac{3}{4}(-h)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(-\frac{qh^2}{2}-qh^2\right)l(-h)+\frac{1}{2}(-qh^2)h\frac{2}{3}(-h)\right]=$$

$$=\frac{1}{EI}\left[\frac{qh^4}{8}+\frac{3qh^2l}{4}+\frac{qh^4}{3}\right]=\frac{qh^2}{24EI}(11\,h+18\,l).$$

10.18. Se consideră sistemul de bare articulate din figura 10.18, *a*. Se cere să se determine deplasarea pe orizontală a articulaţiei *3*. Secţiunile barelor se vor presupune constante (moment de inerţie *I*), iar modulul de elasticitate *E*.

Rezolvare. Se determină reacţiunile cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru:

$$-H_1+H_2=0,$$

$$V_1+V_2-P-2P=0,$$

$$-5a\cdot P+4a\cdot V_1+2Pa=0.$$

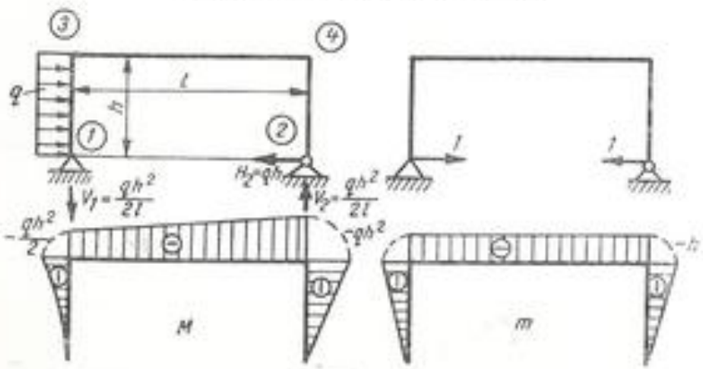


Fig. 10.17

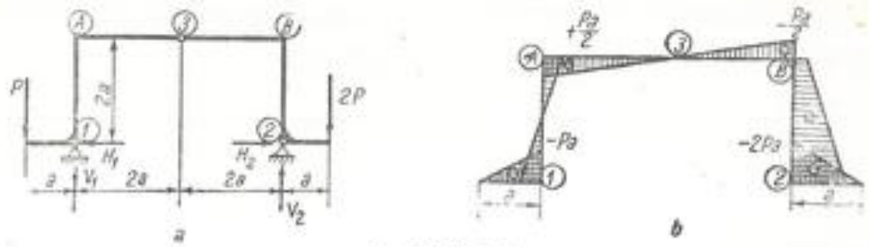


Fig. 10.18, *a*, *b*

La aceste ecuaţii adăugăm condiţia ca momentul încovoietor în articulaţia *3* să fie nul:

$$-P\cdot 3a+V_1\cdot 2a+H_1\cdot 2a=0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii, obţinem:

$$V_1=\frac{3P}{4};\ V_2=\frac{9P}{4};\ H_1=H_2=\frac{3P}{4}.$$

Se trasează diagrama momentelor încovoietoare (Fig. 10.18, *b*).

Momentele maxime sînt: $M_1=-Pa$; $M_A=-Pa+H_1\cdot 2a=\frac{Pa}{2}$, $M_2=-2Pa$; $M_B=-2Pa+H_2\cdot 2a=-\frac{Pa}{2}$. Pe toate barele diagramele sînt liniare.

Pentru că se cere deplasarea pe orizontală a articulaţiei *3*, se presupune aplicată în această articulaţie o forţă fictivă orizontală egală cu 1 şi se determină diagrama momentelor încovoietoare pentru acest caz.

Se găseşte: $H_1=H_2=V_1=V_2=0{,}5$ (Fig. 10.18, *c*), iar diagrama momentelor m_x este cea din figura 10.18, *d*, momentele maxime fiind în colţurile *A* şi *B*, $m_A=+a$ şi $m_B=-a$.

Deplasarea pe orizontală a articulaţiei *3* va fi:

$$u_3=\int\frac{M_xm_x}{EI}\,ds.$$

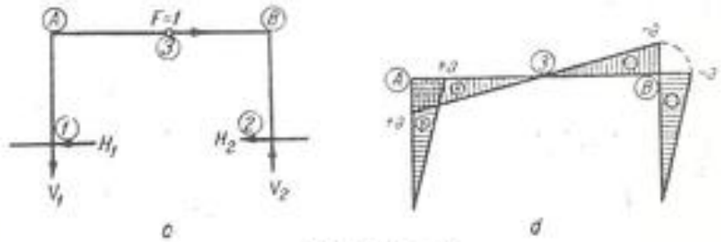


Fig. 10.18, *c*, *d*

Aplicînd metoda de integrare a lui *Vereşceaghin*, se obţine:

$$u_3 = \left(-\frac{1}{2}\frac{Pa}{EI}\cdot 2a\right)\cdot\left(\frac{1}{3}a\right)+\left(\frac{1}{2}\frac{Pa}{2EI}\cdot 2a\right)\left(\frac{2}{3}a\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Pa}{2EI}\cdot 2a\right)\left(\frac{2}{3}a\right)+$$
$$+\left(-\frac{1}{2}\frac{Pa}{2EI}\cdot 2a\right)\left(-\frac{2}{3}a\right)+\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{Pa}{2EI}2a\right)\left(-\frac{2}{3}a\right)+$$
$$+\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2Pa}{EI}2a\right)\left(-\frac{1}{3}a\right).$$

Efectuînd calculele se obţine: $u_3 = \frac{5Pa^3}{3EI}$.

10.19. Se consideră cadrul închis din figura 10.19, *a*, acţionat de o sarcină uniform distribuită p. Se cere să se determine deplasarea pe verticală a articulaţiei *5*. Secţiunea barelor este constantă (momentul de inerţie *I*), iar modulul de elasticitate este *E*.

Rezolvare. Se determină reacţiunile cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru:

$$-H_1 + 2pa = 0,$$
$$-V_1 + V_2 = 0,$$
$$2pa\cdot a - 4a\cdot V_2 = 0.$$

Rezultă: $H_1 = 2pa$; $V_1 = V_2 = \frac{pa}{2}$.

Apoi se determină forţele interioare din articulaţia *5* în modul următor. Se presupune articulaţia *5* desfăcută: pe secţiunea din stînga acţionează două forţe H_5 şi V_5, iar pe secţiunea din dreapta aceleiaşi forţe cu sensuri opuse (Fig. 10.19, *b*). Se scrie că momentele încovoietoare în articulaţiile *3* şi *4* sînt nule:

$$+H_5\cdot 2a - V_5\cdot 2a + 2pa\cdot 2a - 2pa\cdot a = 0;\ H_5\cdot 2a + V_5\cdot 2a = 0.$$

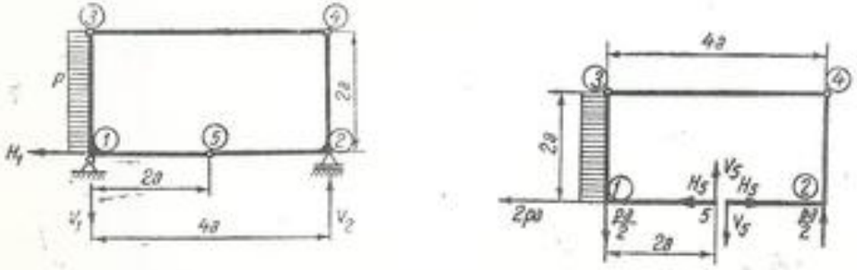


Fig. 10.19, *a*, *b*

De aici se deduc valorile H_5 şi V_5:

$$H_5 = -\frac{pa}{2};\ V_5 = \frac{pa}{2}.$$

Se trasează diagrama momentelor încovoietoare. S-a ales în mod convenţional sensul de parcurgere *5—2—4—3—1—5*. Rezultă:

$$M_2 = -V_5\cdot 2a = -pa^2;\quad M_4 = 0,$$
$$M_3 = 0,\ M_1 = V_5\cdot 2a = pa^2.$$

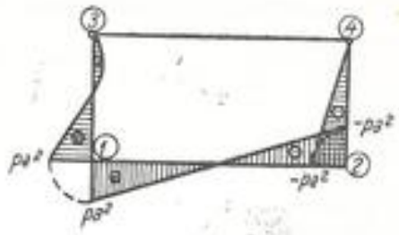


Fig. 10.19, *c*

Pe bara *1 — 3* variaţia este parabolică. Pe bara *3 — 4*, $M_x = 0$. Pe barele *4 — 2* şi *1 — 2* variaţiile sînt liniare (Fig. 10.19, *c*).

O b s e r v a ţ i e. Dacă se alegea ca sens de parcurgere al cadrului sensul *5—1—3—4—2—5*, semnele momentelor se inversau.

Se presupune acum acelaşi cadru solicitat de o sarcină concentrată verticală $P = 1$ în articulaţia 5. Procedînd ca mai sus, rezultă:

— reacţiunile: $V_1 = V_2 = 0{,}5$; $H_1 = 0$,
— componentele reacţiunii din articulaţia 5: $H_5 = 0$; $V_5 = 0{,}5$,
— diagrama momentelor încovoietoare (Fig. 10.19, *d*).

Deplasarea pe verticală a articulaţiei 5 este:

$$v_5 = \int \frac{M_x m_x}{EI}\,ds.$$

Integralele se calculează cu metoda *Vereşceaghin*. Pentru bara *1—3* se descompune diagrama din figura 10.19, *c* în două diagrame (Fig. 10.19, *e*): una parabolică datorită sarcinii uniform repartizate p acţionînd pe grinda simplu rezemată *1 — 3* şi una triunghiulară datorită momentului $M_1 = pa^2$ acţionînd în secţiunea 1.

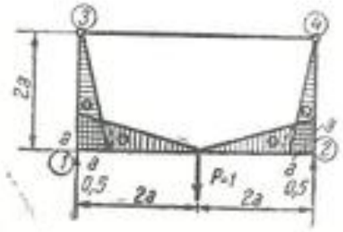


Fig. 10.19, *d*

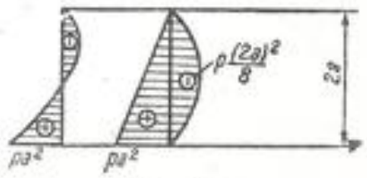


Fig. 10.19, *e*

$$v_5 = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}pa^2 \cdot 2a \cdot \left(-\frac{2}{3}a\right) + \left(-\frac{2}{3}\frac{p \cdot (2a)^3}{8}\right) 2a\left(-\frac{a}{2}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}pa^2 \cdot 2a \cdot \left(-\frac{2}{3}a\right) + \left(-\frac{1}{2}pa^2 \cdot 2a\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}a\right) +$$

$$\left. + \frac{1}{2}(-pa^2) \cdot 2a \cdot \left(-\frac{2}{3}a\right)\right] = \frac{pa^4}{3EI}.$$

Deplasarea articulației *5* se face în jos ($v_5 > 0$).

10.20. Să se determine deplasarea pe verticală și pe orizontală a punctului *2* la grinda curbă din figura 10.20, încărcată cu o sarcină verticală P în punctul *2*. Secțiunea grinzii este constantă (momentul de inerție I), iar modulul de elasticitate este E. Se va neglija deformația datorită compresiunii și forfecării.

Rezolvare.

a) *Deplasarea pe verticală.* Expresia momentului într-o secțiune oarecare este $M = -PR(1 - \cos\varphi)$. Derivata momentului în raport cu forța care dă deplasarea este: $\frac{\partial M}{\partial P} = -R(1 - \cos\varphi)$, iar elementul de arc este $ds = Rd\varphi$.

Aplicînd teorema lui *Castigliano*, se obține:

$$EIv_2 = \int_0^\pi PR^3(1 - \cos\varphi)^2 d\varphi = \int_0^\pi PR^3(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi,$$

$$EIv_2 = PR^3\left[\pi + 0 + \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi\right] = \frac{3PR^3\pi}{2};\ v_2 = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{PR^3}{EI}$$

b) *Deplasarea pe orizontală.* Pentru a putea aplica teorema lui *Castigliano*, se introduce forța fictivă Q. Expresia momentului încovoietor devine, în acest caz:

$$M = -PR(1 - \cos\varphi) + QR\sin\varphi;\ \frac{\partial M}{\partial Q} = R\sin\varphi;\ ds = Rd\varphi.$$

$$EIu_2 = \int_0^\pi -PR^3(1 - \cos\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

(în expresia lui M s-a făcut $Q = 0$).

$$EIu_2 = -PR^3\int_0^\pi\left(\sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= -PR^3\left|-\cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{4}\right|_0^\pi = -2PR^3$$

$$u_2 = -\frac{2PR^3}{EI}.$$

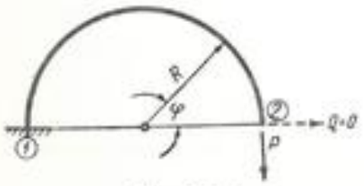


Fig. 10.20

10.21. Să se determine deplasarea pe verticală și pe orizontală a punctului *2* al stîlpului din figura 10.21, încărcat cu o sarcină verticală P în punctul *2*. Secțiunea stîlpului este constantă (momentul de inerție I), iar modulului de elasticitate este E. Se va neglija deformația datorită compresiunii și forfecării.

Rezolvare. În problema 10.20 s-a determinat deplasarea punctului 2 pentru o bară semicirculară încastrată în *1*, și s-au găsit expresiile:

$$v_2 = \frac{3\pi PR^3}{2EI};\ u_2 = -\frac{2PR^3}{EI}.$$

Pentru determinarea deplasării punctului *2*, pentru cazul de față, se adună la expresiile de mai sus valorile obținute prin integrarea pe bara *1—3* a derivatei lucrului mecanic în raport cu forța care dă deplasarea.

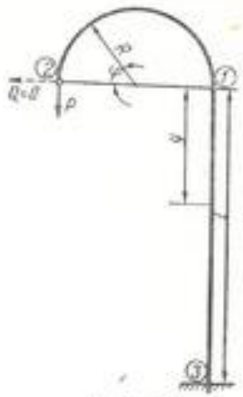


Fig. 10.21

a) *Deplasarea pe verticală.*

Momentul într-o secțiune oarecare la distanța y este $M = -2PR$:

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -2R;\ ds = dy;\ \int_0^l 4PR^2 dy = 4PR^2 l;$$

$$EIv_2 = \frac{3\pi}{2}PR^3 + 4PR^2 l;\ v_2 = \frac{PR^3}{EI}\left[\frac{3\pi}{2}R + 4l\right].$$

b) *Deplasarea pe orizontală.*

Momentul încovoietor într-o secțiune oarecare la distanța y este:

$$M = -2PR - Qy;\ \frac{\partial M}{\partial Q} = -y;\ ds = dy.$$

$$\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial Q}ds = \int_0^l(-2PR - Qy)(-y)dy.$$

Ținînd seamă că forța $Q = 0$, rezultă:

$$\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial Q}ds = PR \cdot l^2;$$

$$u_2 = -\frac{2PR^3}{EI} + \frac{PRl^3}{EI};\ u_2 = \frac{PR}{EI}(-2R^2 + l^2).$$

10.22. Se consideră arcul cu consolă din figura 10.22, *a*. Se cere să se determine deplasarea pe verticală a articulației *4*. Momentul de inerție al grinzii este I_1, iar al arcului I_2. Se va neglija influența eforturilor axiale și de forfecare asupra acestei deplasări.

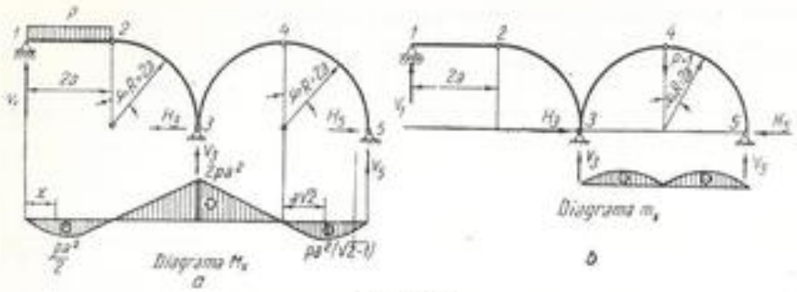


Fig. 10.22

Rezolvare. Se determină reacţiunile din reazemul simplu *1* şi articulaţiile *3* şi *5*, scriind ecuaţiile de echilibru:

$$-H_3 + H_5 = 0,$$

$$V_1 + V_3 - V_5 - 2pa = 0,$$

$$8a \cdot V_1 - 2pa \cdot 7a + 4aV_3 = 0,$$

la care se adaugă două ecuaţii care exprimă că momentele încovoietoare în articulaţiile *2* şi *4* sînt nule:

$$2a \cdot V_1 - 2pa \cdot a = 0,$$

$$H_5 \cdot a - V_5 a = 0.$$

Rezolvînd sistemul format de cele cinci ecuaţii cu cinci necunoscute, se găseşte: $V_1 = pa$, $V_3 = \frac{3pa}{2}$, $V_5 = \frac{pa}{2}$, $H_3 = H_5 = \frac{pa}{2}$. Cu aceste date se trasează diagrama M_x, care are:

Pe bara *1 — 2* expresia: $M_x = \frac{1}{2} px(2a - x)$.

Pe arcul *2 — 3* expresia: $M_x = -pa \cdot 2a \sin\varphi = -2pa^2 \sin\varphi$.

Pe arcul *3—4—5* expresia: $M_x = -\frac{pa}{2}(1 - \sin\varphi)\, 2a + \frac{pa}{2}\, 2a \cdot \cos\varphi = pa^2 (\sin\varphi + \cos\varphi - 1)$

(unghiul φ se măsoară în sensul acelor de ceas de la verticală).

Momentele maxime au loc:

— la mijlocul grinzii *1 — 2*: $M_{max} = \frac{pa^2}{2}$,

— în dreptul reazemului *3*: $M_{max} = -2pa^2$.

Pentru $\varphi = 45°$, cînd expresia $(\sin\varphi + \cos\varphi - 1)$ devine maximă, adică la distanţa $2a\frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$ de articulaţia *4*, valoarea maximă a momentului este $pa^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = pa^2(\sqrt{2} - 1)$.

Se consideră acum arcul încărcat cu o sarcină fictivă verticală $P = 1$, în articulaţia *4*. Reacţiunile în această situaţie se calculează cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru.

$$H_3 - H_5 = 0;\ V_1 + V_3 + V_5 - 1 = 0;\ 8a \cdot V_1 + 4a \cdot V_3 - 2a \cdot 1 = 0$$

şi al ecuaţiilor de moment încovoietor nul în articulaţiile *2* şi *4*:

$$2a \cdot V_1 = 0;\ 2a \cdot V_5 - 2a \cdot H_5 = 0.$$

Rezultă: $V_1 = 0$; $V_3 = 0{,}5$; $V_5 = 0{,}5$; $H_3 = H_5 = 0{,}5$.

Se calculează m_x (Fig. 10.22, *b*) care are următoarele expresii:

Pe bara *1 — 2*: $m_x = 0$.

Pe arcul *2 — 3*: $m_x = 0$.

Pe arcul *3 — 4*: $m_x = 0{,}5\,(2a + 2a\sin\varphi) - 0{,}5\,(2a\cos\varphi) = a(1 + \sin\varphi - \cos\varphi)$.

Pe arcul *4 — 5*: $m_x = 0{,}5\,(2a - 2a\sin\varphi) - 0{,}5 \cdot 2a\cos\varphi = a(1 - \sin\varphi - \cos\varphi)$.

Pentru a calcula săgeata v_4, se aplică formula (10.2) în care se neglijează influenţa forţei axiale şi se ia $M_t = 0$.

$$v_4 = \int \frac{M_x}{EI_z} m_x ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} pa^2(\sin\varphi + \cos\varphi - 1)a \cdot (1 + \sin\varphi - \cos\varphi)\frac{2 \cdot a d\varphi}{EI_z} +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} pa^2\,(\sin\varphi + \cos\varphi - 1) \cdot a\,(1 - \sin\varphi - \cos\varphi)\frac{2a\, d\varphi}{EI_z} =$$

$$= \frac{2pa^4}{EI_z}\left(4 - \frac{3\pi}{2}\right) \cong -\frac{1{,}42\, pa^4}{EI_z}.$$

Articulaţia 4 se deplasează în sus.

10.23. Să se verifice bara din figura 10.23, *a*, ştiind că are secţiunea circulară, din oţel cu diametrul $d = 6$ cm; $P = 50$ daN; $R = 40$ cm; $\sigma_a = 1200$ daN/cm².

Să se calculeze deplasarea pe verticală a secţiunii 3.

Rezolvare. Forţa P aplicată în *3* produce într-o secţiune oarecare *6* a barei curbe *2 — 3* un moment $M = P \cdot 2R \sin\frac{\varphi}{2}$, avînd direcţia *2 — 6* (v. fig. 10.23, *b*). Componentele pe normala şi tangenta la bara curbă duse în 6 sînt tocmai momentul încovoietor, respectiv de răsucire, adică

$$M_i = M \cos\frac{\varphi}{2} = 2PR \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = PR \sin\varphi,$$

$$M_t = M \sin\frac{\varphi}{2} = 2PR \sin^2\frac{\varphi}{2} = PR(1 - \cos\varphi).$$

Diagramele N, M_{ix}, M_{iy}, M_t sînt trasate în figura 10.23, *c*. Din analiza acestora rezultă că trebuie verificate secţiunile *1*, pe bara dreaptă şi *2* pe bara curbă.

Verificarea secţiunii *1*.

În secţiunea *1*

$$M_{ix} = -11PR;\ M_{iy} = -4PR;\ M_t = 3PR.$$

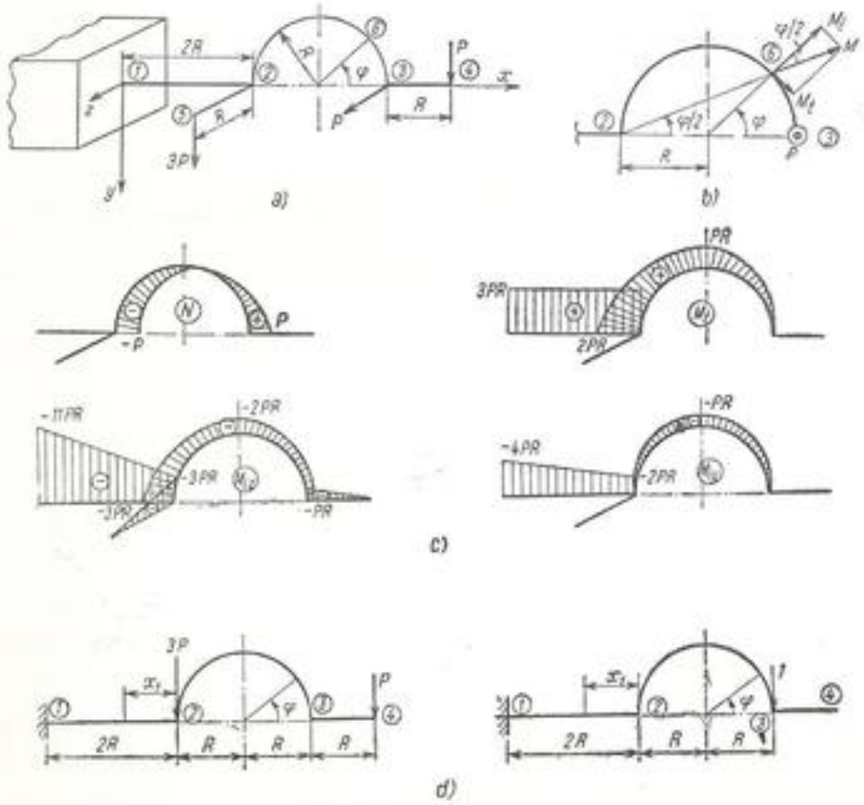


Fig. 10.23

Momentul încovoietor total este

$$M_{i\,tot} = \sqrt{M_{ix}^2 + M_{iy}^2}.$$

După teoria a III-a de rezistenţă se obţine

$$M_{i\,ech} = \sqrt{M_{i\,tot}^2 + M_t^2} = PR\sqrt{11^2 + 4^2 + 3^2} = 12{,}1\ PR,$$

$$\sigma_{ech} = \frac{M_{i\,ech}}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{32 \cdot 12{,}1\ PR}{\pi d^3} = 1\,140\ \text{daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

Verificarea secţiunii *2*.

Bara curbă *2 — 3* are în secţiunea *2*

$$N = -P;\ M_{ix} = -3PR;\ M_t = 2PR.$$

Efortul unitar σ se calculează considerînd bara *2 — 3* cu curbură mare

$$e = \frac{I_G}{AR} = \frac{d^2}{16R} = 0{,}056\ \text{cm},$$

$$d_1 = \frac{d}{2} - e = 2{,}944\ \text{cm};\ R_1 = R - \frac{d}{2} = 37\ \text{cm}.$$

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} - \frac{M_{ix}d_1}{AeR_1} = -1{,}77 - 302 \approx -304\ \text{daN/cm}^2.$$

Datorită răsucirii se produce efortul unitar

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{2PR}{\frac{\pi d^3}{16}} = 94{,}4\ \text{daN/cm}^2.$$

Efortul unitar echivalent este (după teoria a III-a de rezistenţă)

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 358\ \text{daN/cm}^2.$$

Pentru calculul deplasării pe verticală a secţiunii *3* se consideră toate sarcinile verticale, reduse în planul $x - y$ al barei *1—2—3—4* (v. fig. 10.23 *d*). Neglijînd efectul forţelor axiale şi tăietoare, rezultă

$$M_{1-2} = -P(3R + x_1) - 3Px_1 = -P(4x_1 + 3R);$$

$$M_{2-3} = -P(R + R - R\cos\varphi) = -PR(2 - \cos\varphi).$$

Forţa unitate aplicată în *3* produce momentele

$$m_{1-2} = -(2R + x_1);\ m_{2-3} = -R(1 - \cos\varphi).$$

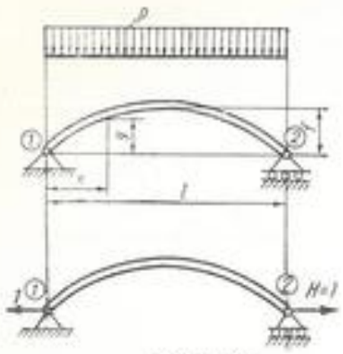


Fig. 10.24

Se obține

$$EI_s v_3 = P\int_0^{2R}(4x_1 + 3R)\ (2R + x_1)\ dx +$$

$$+ PR^3\int_0^{\pi}(2 - \cos\varphi)\ (1 - \cos\varphi)\ d\varphi;$$

$$v_3 = \frac{52{,}51\ PR^3}{EI_s} = 1{,}26 \text{ cm}.$$

10.24. Un arc articulat la o extremitate și simplu rezemat la cealaltă, avînd forma unei parabole de deschidere l și săgeata f este acționat de o sarcină uniform distribuită pe orizontală p (Fig. 10.24). Știind că legea de variație a momentelor de inerție este dată de formula $I = \frac{I_0}{\cos\varphi}$, I_0 fiind momentul de inerție al secțiunii de la cheie, se cere să se determine deplasarea pe orizontală a extremității rezemate, neținînd seamă de efectul eforturilor axiale și de forfecare.

Rezolvare. Ecuația axei arcului este:

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l - x).$$

Într-o secțiune oarecare $M_x = \frac{p}{2}x(l - x)$.

Momentul m_x produs de o forță $H = 1$ aplicată în reazemul simplu 2 avînd sensul spre dreapta este:

$$m_x = 1 \cdot y = \frac{4f}{l^2}x(l - x).$$

Reazemul simplu se va deplasa pe orizontală cu:

$$u_2 = \int \frac{M_x m_x}{EI}\,ds.$$

În cazul de față, $I = \frac{I_0}{\cos\varphi}$, iar $dx = ds\cos\varphi$, astfel încît:

$$u_2 = \int \frac{M_x m_x}{\frac{EI_0}{\cos\varphi}} \cdot \frac{dx}{\cos\varphi} = \int_0^l \frac{M_x m_x}{EI_0}\,dx = \frac{1}{EI_0}\int_0^l \frac{p}{2}x(l - x) \cdot \frac{4f}{l^2}x(l - x)dx;$$

$$u_2 = \frac{2pf}{EI_0 l^2}\int_0^l x^2(l - x)^2 dx = \frac{2pf}{EI_0 l^2}\int_0^l x^2(l^2 - 2lx + x^2)\ dx =$$

$$= \frac{2pf}{EI_0 l^2}\left|\frac{x^3 l^2}{3} - \frac{2lx^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right|_0^l = \frac{pl^3 f}{15\ EI_0}.$$

10.25. Pentru grinda cotită din figura 10.25 se cere să se calculeze deplasarea pe verticală și pe orizontală a extremității libere 4, E și I fiind constante pe toată lungimea grinzii.

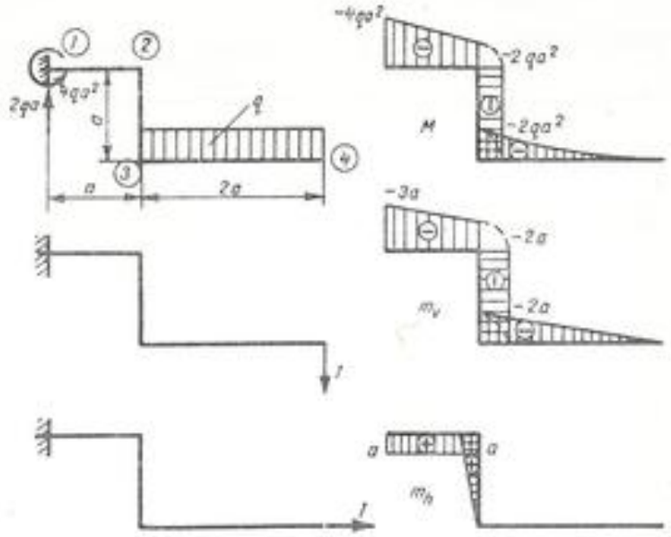


Fig. 10.25

Rezolvare. Se aplică metoda *Mohr-Maxwell-Vereșceaghin*. Cu ajutorul diagramelor M și m_v se obține:

$$v_4 = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}(-2qa^2)2a\left(-\frac{3}{4}2a\right) + (-2qa^2)\ a(-2a) +\right.$$

$$\left. + (-2qa^2)\ a\left(\frac{-5a}{2}\right) + \frac{1}{2}(-2qa^2)\ a\left(-2a - \frac{2a}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{qa^4}{EI}\left[2 + 4 + 5 + \frac{8}{3}\right] = \frac{41qa^4}{3EI}.$$

Cu ajutorul diagramelor M și m_h se obține:

$$h_4 = \frac{1}{EI}\left[(-2qa^2)\ a\left(+\frac{a}{2}\right) + (-2qa^2)\ a(+a) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(-2qa^2)\ a(+a)\right] = -\frac{qa^4}{EI}[1 + 2 + 1] = -\frac{4qa^4}{EI}.$$

10.26. Pentru cadrul din figura 10.26 se cere să se determine deplasarea pe verticală și pe orizontală a punctului 4.

Rezolvare. Se aplică metoda *Mohr-Maxwell*.

Pe intervalul $1 - 2$:

$$M_x = \frac{qax}{6}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right);$$

$$m_{xh} = x;\ m_{xv} = -x.$$

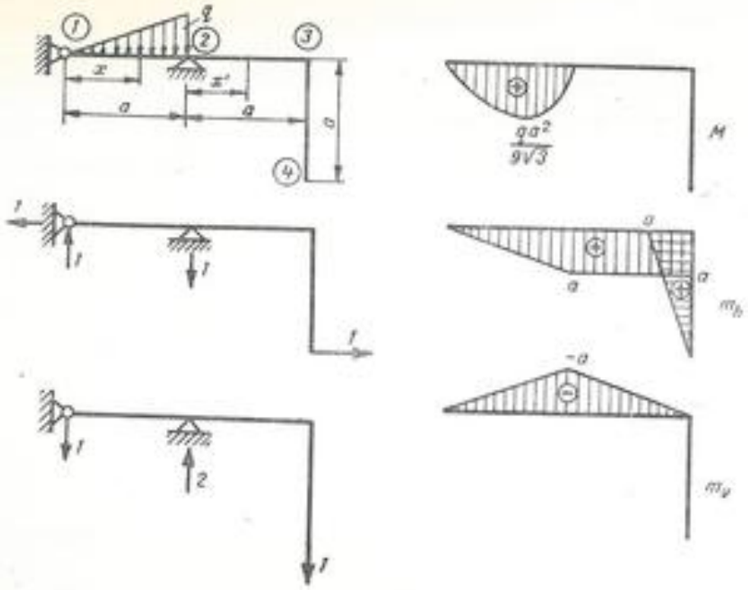


Fig. 10.26

$$h_4 = \frac{1}{EI}\int_0^a \frac{qa}{6}\left(x - \frac{x^3}{a^2}\right) x\,dx = \frac{1}{EI}\cdot\frac{qa}{6}\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^5}{5a^2}\right) =$$

$$= \frac{qa^4}{6EI}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{qa^4}{6EI}\cdot\frac{2}{15} = \frac{qa^4}{45EI}.$$

$$v_4 = \frac{1}{EI}\int_0^a \frac{qa}{6}\left(x - \frac{x^3}{a^2}\right)(-x)\,dx = -\frac{1}{EI}\cdot\frac{qa}{6}\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^5}{5a^2}\right) = -\frac{qa^4}{45EI}.$$

10.27. La cadrul din figura 10.27, *a* se cere să se calculeze deplasarea în punctul *2* pe direcţia forţei *P*. Ambele bare ale cadrului au acelaşi *E* şi *I*.

Rezolvare. Se aplică metoda *Mohr-Maxwell-Vereşceaghin*. Cadrul este simplu static nedeterminat.

1) Fie sistemul de bază ca în figura 10.27, *b*, şi necunoscuta static nedeterminată — momentul din încastrare.

Cu ajutorul diagramelor M_0 şi m_1 din figura 10.27, *c*, se calculează:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{-Pa}{2}\right)\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{6} = -\frac{Pa^2}{48EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\,\frac{1}{2}\,a\cdot 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{a}{3EI},$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{Pa}{16}.$$

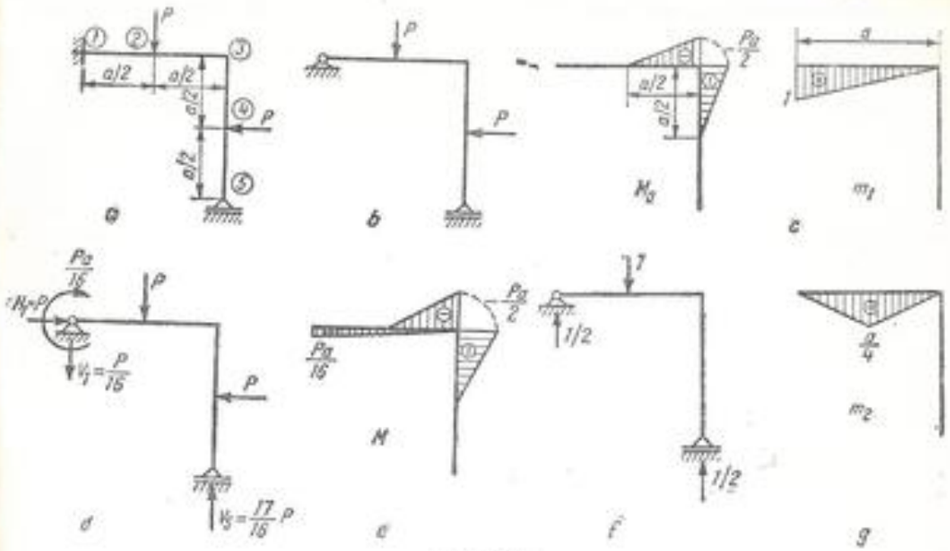


Fig. 10.27

2) La cadrul din figura 10.27, *d* se construieşte diagrama *M* (Fig. 10.27, *e*).

3) Pentru încărcarea cu forţa 1 aplicată în secţiunea *2* (Fig. 10.27, *f*) se construieşte diagrama m_2 din figura 10.27, *g*.

Cu ajutorul diagramelor *M* şi m_2 se obţine:

$$EIv_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{Pa}{2}\right)\frac{a}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{a}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{a}{2}\,\frac{Pa}{32}\,\frac{2}{3}\,\frac{a}{4} +$$

$$+ \frac{a}{2}\,\frac{Pa}{32}\,\frac{1}{2}\,\frac{a}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{a}{2}\,\frac{Pa}{32}\,\frac{1}{3}\,\frac{a}{4} = \frac{Pa^3}{1536}(-16 + 2 + 3 + 1),$$

$$v_2 = -\frac{5Pa^3}{768EI}.$$

10.28. La cadrul din figura 10.28, *a* să se calculeze deplasările pe direcţia forţei *P*, în punctele *5* şi *6*, ştiind că pentru toate barele, rigiditatea la încovoiere EI = const.

Rezolvare. Se aplică metoda *Mohr-Maxwell-Vereşceaghin*. Cadrul este static nedeterminat.

1) Se formează sistemul de bază ca în figura 10.28, *b* şi se construiesc diagramele M_0 şi m_2 (Fig. 10.28, *c*). Rezultă:

$$EI\delta_{10} = \frac{1}{2}Pa\cdot a\,\frac{2}{3}(-a) + \left[\frac{1}{2}Pa\,\frac{a}{3} + \frac{1}{2}(-2Pa)\,\frac{2a}{3}\right](-a) = \frac{Pa^3}{6};$$

$$EI\delta_{12} = 2\,\frac{1}{2}\,a(-a)\,\frac{2}{3}\,(-a) + a\,(-a)\,(-a) = \frac{5}{3}\,a^3;$$

$$X_2 = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} = \frac{-\dfrac{Pa^3}{6}}{\dfrac{5a^3}{3}} = -\frac{P}{10}.$$

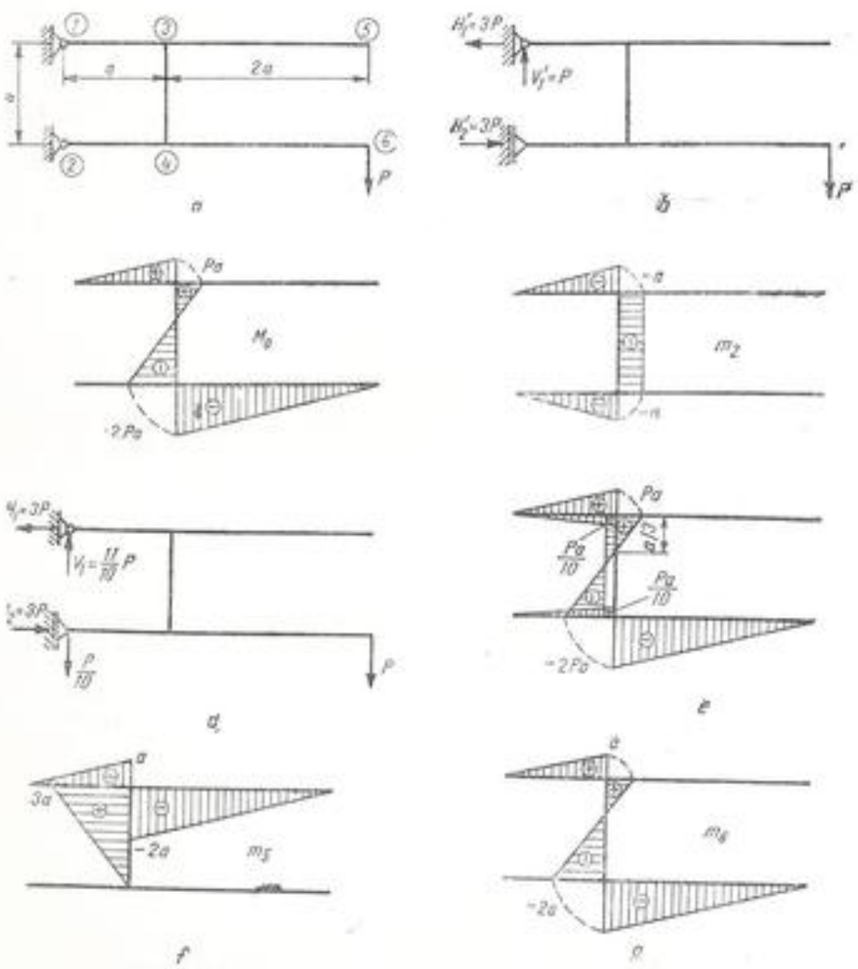


Fig. 10.28

2) La cadrul din figura 10.28, *d* se construieşte diagrama *M* (Fig. 10.28, *e*) prin suprapunerea efectelor.

3) Pentru încărcarea cu forţa 1 aplicată în punctul *5* se construieşte diagrama m_5 (Fig. 10.28, *f*). Rezultă:

$$EIv_5 = \frac{1}{2}\,a\,\frac{11Pa}{10}\,\frac{2}{3}\,a + \frac{1}{2}\,Pa\,\frac{a}{3}\,\frac{8}{9}\,3a +$$

$$+ \frac{1}{2}\,(-2Pa)\,\frac{2a}{3}\,\frac{2}{9}\,3a + \frac{Pa}{10}\,a\,\frac{3a}{2} = \frac{31}{60}\,Pa^3;\quad v_5 = \frac{31Pa^3}{60EI}.$$

4) Pentru încărcarea cu forţa 1 aplicată în punctul *6* se construieşte diagrama m_6 (Fig. 10.28, *g*). Rezultă:

$$EIv_6 = \frac{1}{2}\,a\left(Pa + \frac{Pa}{10}\right)\frac{2}{3}\,a + \frac{1}{2}\,Pa\,\frac{a}{3}\,\frac{2}{3}\,a + \frac{1}{2}\,(-2Pa)\,\frac{2a}{3}\,\frac{2}{3}\,(-2a) +$$

$$+ \frac{Pa}{10}\,\frac{a}{3}\,\frac{a}{2} + \frac{Pa}{10}\,\frac{2a}{3}\,(-a) + \frac{1}{2}\,(-2Pa)\,2a\,\frac{2}{3}\,(-2a) =$$

$$= Pa^3\left(\frac{11}{30} + \frac{1}{9} + \frac{8}{9} + \frac{1}{60} - \frac{2}{30} + \frac{8}{3}\right) = \frac{239}{60}\,Pa^3;$$

$$v_6 = \frac{239Pa^3}{60EI}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

10.29. Să se determine distanţa δ cu care se apropie extremităţile *A* şi *B* ale grinzii din figura 10.29, ştiind că este omogenă şi are secţiune constantă.

Răspuns: $\delta = \dfrac{pl^3c}{12EI}$.

10.30. Să se determine unghiul de rotire relativă a secţiunilor *1* şi *2* ale grinzii din figura 10.30, ştiind că este omogenă şi are secţiune constantă.

Răspuns: $\varphi_{12} = \dfrac{p(l-2a)(l^2+2la-2a^2)}{12EI}$.

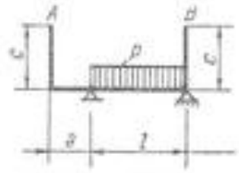


Fig. 10.29

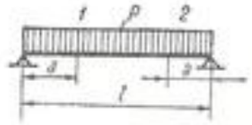


Fig. 10.30

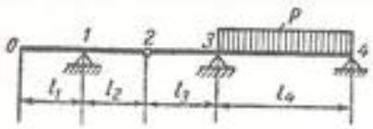


Fig. 10.31

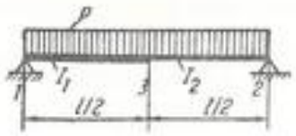


Fig. 10.32

10.31. Să se determine deplasarea pe verticală a extremității *0* a grinzii din figura 10.31, știind că este omogenă și are secțiunea constantă.

Răspuns: $v_0 = \frac{pl_1^2 l_3^2}{24EIl_2}$.

10.32. Să se determine săgeata la mijlocul unei grinzi simplu rezemate avînd pe porțiunea *1 — 3* momentul de inerție I_1 și pe porțiunea *3 — 2* momentul de inerție I_2 în cazul cînd este încărcată cu o sarcină uniform distribuită (Fig. 10.32).

Răspuns: $v_3 = \frac{5pl^4}{768E}\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right)$.

10.33. Să se determine deplasarea pe verticală și pe orizontală a punctului *2* la grinda curbă din figura 10.33, încărcată cu sarcina verticală *P*. Secțiunea grinzii este constantă (momentul de inerție *I*), iar modulul de elasticitate este *E*. Se va neglija deformația datorită compresiunii și forfecării.

Răspuns: $v_2 = \frac{\pi PR^3}{4EI}$; $u_2 = \frac{PR^3}{2EI}$.

10.34. Să se determine deplasările punctului *2* pentru grinda din figura 10.34.

Răspuns: $v_2 = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{qla^3}{EI}$; $u_2 = \frac{qla^2}{4EI}$.

10.35. Se consideră grinda cu consolă acționată între reazemele *1* și *2* de o sarcină uniform distribuită *q* (Fig. 10.35). Se cere să se determine

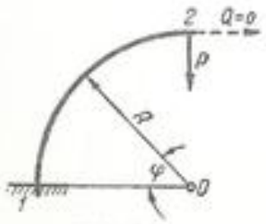


Fig. 10.33

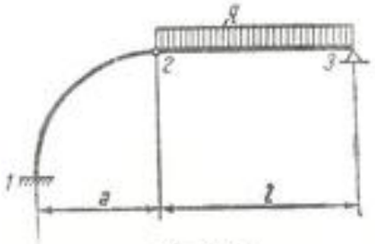


Fig. 10.34

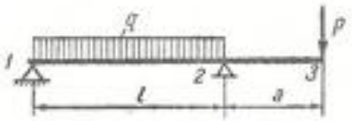


Fig. 10.35

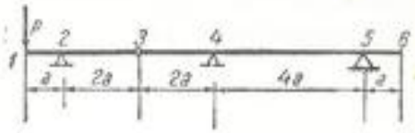


Fig. 10.36

sarcina concentrată *P* care trebuie aplicată în capătul consolei, pentru ca acest capăt să se găsească după deformarea grinzii pe aceeași dreaptă orizontală cu reazemele *1* și *2*.

Răspuns: $P = \frac{q^2}{8a(l + a)}$.

10.36. Se consideră sistemul de grinzi articulate reprezentate în figura 10.36. Se cere să se determine săgeata punctului *6*. (Se cunosc *E* și *I* = = const. în lungul tuturor grinzilor.)

Răspuns: $v_6 = \frac{2Pa^3}{3EI}$.

CAPITOLUL **11**

SISTEME STATIC NEDETERMINATE

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. Dacă pe o grindă simplu rezemată la capete sînt aplicate o serie de sarcini şi două cupluri M_1 şi M_2 pe reazeme (Fig. 11.*a*) reacţiunile pot fi exprimate pe baza principiului suprapunerii efectelor, prin relaţiile:

$$V_1 = V_{1s} + V_{1m} \qquad (11.1)$$

$$V_2 = V_{2s} + V_{2m}$$

unde V_{1s} şi V_{2s} sînt reacţiunile datorite sarcinilor de pe grindă, iar

$$V_{1m} = \frac{M_2 - M_1}{l}, \quad V_{2m} = -\frac{M_2 - M_1}{l} \qquad (11.2)$$

sînt reacţiunile datorite celor două cupluri de pe reazeme.

Momentul încovoietor şi forţa tăietoare într-o secţiune oarecare x sînt:

$$M_x = M_s + M_m = M_s + M_1 \frac{x'}{l} + M_2 \frac{x}{l}. \qquad (11.3)$$

$$T_x = T_s + T_m = T_s + \frac{M_2 - M_1}{l}.$$

În aceste relaţii, T_s şi M_s sînt forţele tăietoare şi momentele încovoietoare datorită sarciniilor de pe grindă, iar T_m şi M_m, cele datorite cuplurilor M_1 şi M_2 aplicate pe reazeme. În figura 11. *a* se vede cum se interpretează grafic formulele (11.3).

La problemele static nedeterminate, în general, mărimile M_1 şi M_2 de mai sus sînt momentele static nedeterminate de pe reazeme. Valorile lor se determină prin metodele speciale ce se vor indica, iar după aceea calculul eforturilor se face cu formulele (11.1) şi (11.3).

2. La o grindă cu o încastrare şi un reazem simplu, ca în figura 11. *b*, se produce în încastrare un moment de valoare:

$$M_1 = -\frac{3S_2}{l^2}, \qquad (11.4)$$

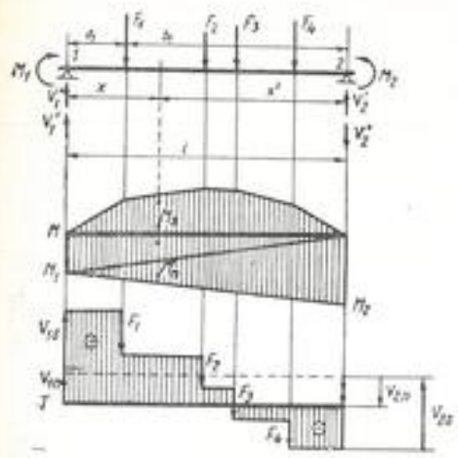


Fig. 11.*a*

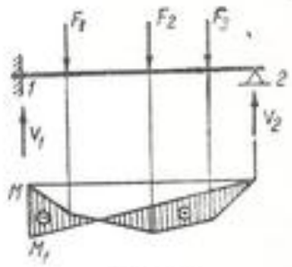


Fig. 11.*b*

unde S_2 este momentul static al suprafeţei de momente încovoietoare, faţă de reazemul 2, diagrama de momente fiind construită ca pentru o grindă simplu rezemată la capete. Construind triunghiul cu baza M_1, ca pe desen, şi suprapunîndu-l peste diagrama de momente a grinzii considerată static determinată, se află diagrama reală a grinzii static nedeterminate.

3. Pentru grinda dublu încastrată, momentele pe reazeme se determină cu ajutorul formulelor:

$$M_1 = -\frac{2}{l^2}(2S_2 - S_1); \qquad (11.5)$$

$$M_2 = -\frac{2}{l^2}(2S_1 - S_2).$$

În cazul cînd sarcina aplicată pe grindă este o singură forţă F, la distanţele a şi b de reazeme, momentele statice din formulele (11.4) şi (11.5) au expresiile:

$$S_2 = \frac{Fab(b+l)}{6}; \quad S_1 = \frac{Fab(a+l)}{6}. \qquad (11.6)$$

4. Pentru aflarea momentelor pe reazeme ale grinzii continue (fig. 11.*c*), se foloseşte *ecuaţia celor trei momente* (ecuaţia lui Clapeyron):

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} + 6A_n +$$

$$+ 6EI_z\left(\frac{f_{n-1} - f_n}{l_n} + \frac{f_{n+1} - f_n}{l_{n+1}}\right) = 0 \qquad (11.7)$$

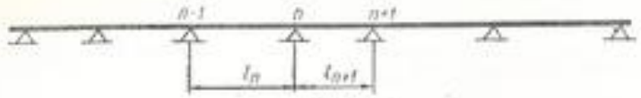


Fig. 11.*c*

în care M_{n-1}, M_n, M_{n+1} sînt momentele pe trei reazeme succesive;

f_{n-1}, f_n, f_{n+1} — denivelările celor trei reazeme;

l_n, l_{n+1} — deschiderile notate în figura 11. *c*.

A_n este reacţiunea în reazemul mijlociu n a suprafeţei de momente de pe intervalele adiacente l_n şi l_{n+1}, această suprafaţă de momente fiind construită ca şi cum grinzile l_n şi l_{n+1} ar fi simplu rezemate la capete.

Pentru A_n se poate scrie expresia:

$$A_n = \frac{S_{n-1}}{l_n} + \frac{S_{n+1}}{l_{n+1}}, \tag{11.8}$$

în care S_{n-1} este momentul static al suprafeţei de momente static determinată de pe intervalul $n-1$, n, luat faţă de reazemul $n-1$; analog S_{n+1} — calculat faţă de reazemul $n+1$.

În cazul frecvent cînd reazemele nu se deniveleazǎ (grindă cu reazeme de nivel) ecuaţia celor trei momente se reduce la:

$$M_{n-1}\, l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}\, l_{n+1} + 6A_n = 0. \tag{11.9}$$

Pentru rezolvarea unei grinzi continue, se scrie această ecuaţie succesiv, pentru grupe de cîte trei reazeme.

Astfel se obţine un sistem cu atîtea ecuaţii cîte necunoscute are problema. La aplicarea ecuaţiei pentru primele trei reazeme şi pentru ultimele trei, se va ţine seamă că momentele sînt nule pe reazemele simple situate în extremităţile grinzii.

5. Dacă grinda static nedeterminată are un reazem încastrat, cum este reazemul *1* din figura 11. *d*, se înlocuieşte încastrarea prin două reazeme simple — *0* şi *1* — cu observaţia că $M_0 = 0$ şi $l_1 = 0$ şi apoi se aplică, în modul cunoscut, ecuaţia celor trei momente.

6. Dacă grinda are o consolă, ca în figura 11. *d*, se poate înlocui consola prin momentul pe care ea îl produce în ultimul reazem ($M_3 = -Fa$ în cazul desenului) şi apoi se aplică ecuaţia celor trei momente, cu observaţia că momentul de pe ultimul reazem este cunoscut.

7. La grinzi continue, reacţiunile se calculează prin generalizarea formulelor

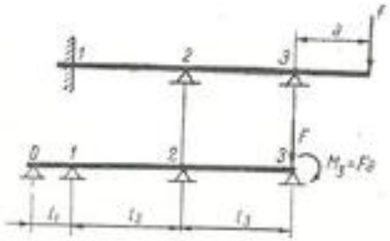


Fig. 11.*d*

(11.1). Aşa de exemplu, în reazemul n, dacă V_{ns} este reacţiunea static determinată, dată de grinzile $n-1$, n şi n, $n+1$ considerate simplu rezemate la capete, iar M_{n-1}, M_n, M_{n+1} sînt momentele pe reazeme, reacţiunea este:

$$V_n = V_{ns} - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}}. \tag{11.10}$$

8. În cazul cadrelor şi al sistemelor static nedeterminate în general se pot folosi metoda directă (*a eforturilor*) sau metode indirecte.

9. În metoda eforturilor se procedează astfel: se transformă sistemul static nedeterminat într-un sistem static determinat, înlăturînd legăturile suplimentare şi înlocuindu-le cu eforturi. Aceste eforturi (forţe sau momente) constituie necunoscutele static nedeterminate X_1, X_2,... Sistemul static determinat în care a fost transformat sistemul static nedeterminat poartă numele de *sistem de bază*. Necunoscutele static nedeterminate sînt considerate încărcări acţionînd asupra sistemului de bază.

Se scriu apoi *ecuaţiile de condiţie* care exprimă faptul că sistemul de bază are aceleaşi deformaţii ca sistemul static nedeterminat. Pentru scrierea acestor ecuaţii se folosesc: metoda *Castigliano* şi metoda *Mohr-Maxwell* (v. Cap. 10 „*Calculul deplasărilor prin metode energetice*").

10. *Metoda Castigliano*. Se scrie expresia energiei de deformaţie. Derivatele parţiale ale acestei expresii în raport cu necunoscutele static nedeterminate, în virtutea teoremei lui *Castigliano*, reprezintă deformaţiile (săgeţile sau rotirile) secţiunilor în care acţionează necunoscutele static nedeterminate. Dacă aceste deformaţii sînt nule, derivatele parţiale ale energiei vor fi şi ele nule.

Se obţine astfel un număr de ecuaţii egal cu numărul necunoscutelor:

$$\int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_1} \cdot ds = 0; \quad \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_2} \cdot ds = 0, \ \ldots \tag{11.11}$$

11. *Metoda Mohr-Maxwell* porneşte de la faptul că deplasările secţiunilor în care acţionează necunoscutele static nedeterminate sînt nule. Aceste deformaţii se exprimă cu ajutorul coeficienţilor de influenţă (deformaţiile produse de eforturi egale cu unitatea). Dacă se notează cu δ_{11}, δ_{12}... δ_{13}... δ_{1n} deformaţiile pe care le produc în secţiuneea *1* încărcările $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$,... $X_n = 1$ şi cu δ_{10} deplasarea produsă de încărcarea cu sarcinile date (statice), deformaţia secţiunii *1* este:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \ldots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} = 0.$$

12. În mod analog se găsesc şi celelalte ecuaţii, astfel încît se obţine următorul sistem de ecuaţii de condiţii:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots + \delta_{20} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \ldots + \delta_{30} = 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{n0} = 0. \end{array}\right\} \tag{11.12}$$

Coeficienţii necunoscutelor sînt simetrici faţă de diagonala principală, $\delta_{ji} = \delta_{ij}$, în virtutea teoremei lui *Maxwell*.

13. După ce necunoscutele static nedeterminate $X_1 \ldots X_n$ au fost găsite prin rezolvarea sistemului de ecuaţii respectiv, se procedează la trasarea diagramelor de eforturi.

În acest scop se poate proceda în două moduri:

14. Se recalculează reacţiunile, ţinînd seamă de corecţiile aduse pe sistemul de bază de încărcările cu forţele şi momentele static nedeterminate. După ce aceste reacţiuni au fost calculate, se determină pentru fiecare bară în parte expresia efortului căutat (moment încovoietor, forţă tăietoare, forţă axială etc.) şi apoi se trasează diagrama corespunzătoare.

15. Un al doilea mod, uşor de aplicat în cazul cînd se foloseşte metoda *Mohr-Maxwell*, pentru diagrama momentelor încovoietoare (care interesează de cele mai multe ori), constă în a suprapune peste diagrama momentelor încovoietoare dată de sarcinile exterioare, diagramele date de încărcările $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, ... $X_n = 1$ amplificate cu valorile găsite prin rezolvarea sistemului de ecuaţii pentru aceste necunoscute:

$$M_x = M_{xs} + X_1 m_{x1} + X_2 m_{x2} + \ldots + X_n m_{xn}, \qquad (11.13)$$

în care: M_x este momentul încovoietor dintr-o secţiune oarecare;

M_{xs} — momentul încovoietor produs pe sistemul de bază, de încărcările date (statice);

$m_{x1}, m_{x2}, \ldots m_{xn}$ sînt momentele încovoietoare produse în aceeaşi secţiune respectiv de încărcările $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, ..., $X_n = 1$.

B. PROBLEME REZOLVATE

11.1. Să se calculeze momentul din încastrare, reacţiunile şi să se construiască diagramele T, M pentru grinda din figura 11.1.

Rezolvare: Pentru determinarea momentului din încastrare, se foloseşte formula (11.4). Pentru efectul forţei F, care dă un moment în încastrare M_1', această formulă devine:

$$M_1' = -F\frac{b(l^2 - b^2)}{2l^2}.$$

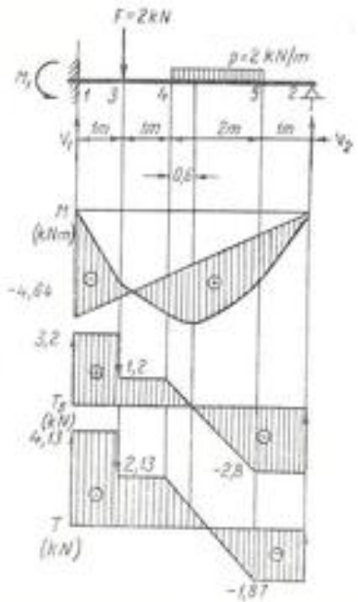


Fig. 11.1

Pentru sarcina uniform distribuită, dacă se notează cu c lungimea pe care ea este aplicată şi cu a şi b coordonatele mijlocului ei, se găseşte relaţia:

$$M_1'' = -\frac{pbc\left(l^2 - b^2 - \frac{c^2}{4}\right)}{2l^2}.$$

Momentul din încastrare este suma valorilor M_1' şi M_1''.

În formula lui M_1', se înlocuiesc valorile:

$$F = 2\text{kN}; \; b = 4 \text{ m}; \; l = 5 \text{ m}.$$

În formula lui M_1'' se înlocuiesc:

$$p = 2\text{kN/m}; \; b = 2 \text{ m}; \; c = 2 \text{ m}; \; l = 5 \text{ m}.$$

Se găseşte momentul din încastrare:

$$M_1 = M_1' + M_1'' = -2\frac{4(5^2 - 4^2)}{2 \cdot 5^2} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 2\left(5^2 - 2^2 - \frac{2^2}{4}\right)}{2 \cdot 5^2} = -4{,}64 \text{ kNm}.$$

Pentru construirea diagramelor, se calculează reacţiunile static determinate, ca şi cînd grinda ar fi simplu rezemată la capete:

$$V_{1s} = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2}{5} = 3{,}2 \text{ kN},$$

$$V_2 = 2 + 2 \cdot 2 - 3{,}2 = 2{,}8 \text{ kN}.$$

Momentele încovoietoare ale grinzii considerată static determinată, în secţiunile *1, 3, 4, 5, 2* sînt:

$$M_{1s} = 0; \; M_{3s} = 3{,}2 \cdot 1 = 3{,}2 \text{ kNm}; \; M_{4s} = 3{,}2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4{,}4 \text{ kNm};$$

$$M_{5s} = 2{,}8 \cdot 1 = 2{,}8 \text{ kNm}.$$

Forţele tăietoare pentru aceeaşi grindă, considerată static determinată, sînt:

$$T_{1s} = V_{1s} = 3{,}2 \text{kN}; \; T_{3s}' = 3{,}2 \text{ kN}; \; T_{3s}'' = 3{,}2 - 2 = 1{,}2 \text{ kN}; \; T_{4s} = 1{,}2 \text{kN};$$

$$T_{5s} = 1{,}2 - 2 \cdot 2 = -2{,}8 \text{ kN}; \; T_{2s}' = -2{,}8 \text{ kN}; \; T_{2s}'' = -2{,}8 + 2{,}8 = 0.$$

Se observă că forţa tăietoare T_x se anulează undeva între secţiunile *4* şi *5*, unde diagrama M_x va avea un maxim. Se poate scrie ecuaţia forţei tăietoare într-o secţiune oarecare x, unde x se măsoară începînd din secţiunea *4*:

$$T_{45s} = 1{,}2 - px = 1{,}2 - 2x.$$

Anulînd această valoare, se află secţiunea cu moment maxim

$$x = 0{,}6 \text{ m}$$

Momentul maxim, în această secţiune este:

$$M_{max\,s} = 3{,}2(2 + 0{,}6) - 2(1 + 0{,}6) - \frac{2 \cdot 0{,}6^2}{2} = 4{,}76 \text{ kNm}.$$

Cu aceste valori, se trasează diagrama momentelor static determinate din figura 11. 1, formată din linii drepte şi o parabolă. S-a desenat, de asemenea, diagrama forţelor tăietoare T_s pentru grinda static determinată.

Suprapunînd triunghiul cu valoarea M_1 peste diagrama M_s, rezultă diagrama reală a momentelor încovoietoare, haşurată.

Reacţiunile în reazeme sînt:

$$V_1 = V_{1s} - \frac{M_1}{l} = 3{,}2 + \frac{4{,}64}{5} = 4{,}13 \text{ kN};$$

$$V_2 = V_{2s} + \frac{M_1}{l} = 2{,}8 - \frac{4{,}64}{5} = 1{,}87 \text{ kN}.$$

Cunoscînd aceste valori, se construieşte diagrama reală a forţelor tăietoare.

Aplicaţie. Să se determine secţiunea (cuprinsă între *3* şi *4*) în care momentul încovoietor se anulează. Să se determine secţiunea în care forţa tăietoare T se anulează, calculîndu-se apoi valorea momentului încovoietor maxim pozitiv.

11.2. Să se calculeze momentele din reazeme, reacţiunile, şi să se construiască diagramele T, M la grinda dublu încastrată din figura 11.2.

Rezolvare: Se aplică formulele (11.5) şi (11.6):

$$M_1 = -\frac{2}{l^2}\left[2\,\frac{Fab(b+l)}{6} - \frac{Fab(a+l)}{6}\right]; \quad M_1 = -\frac{Fab^2}{l^2}. \tag{1}$$

Prin permutări rezultă:

$$M_2 = -\frac{Fa^2b}{l^2}. \tag{2}$$

Momentul static determinat în dreptul forţei F are valoarea:

$$M_{max\,s} = \frac{Fab}{l}.$$

Reacţiunile sînt:

$$V_1 = V_{1s} + \frac{M_s - M_1}{l} = \frac{Fb}{l} + \frac{Fab}{l^3}(b-a)$$

$$V_2 = V_{2s} - \frac{M_s - M_1}{l} = \frac{Fa}{l} - \frac{Fab}{l^3}(b-a). \tag{3}$$

Cu aceste valori, se construiesc diagramele din figura 11.2.

Aplicaţie. Să se refacă problema pentru cazul cînd forţa F este aplicată în mijlocul grinzii.

Să se generalizeze problema pentru un număr oarecare de forţe.

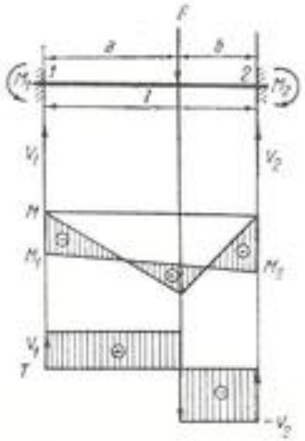


Fig. 11.2

11.3. Să se afle momentele din reazeme, reacţiunile şi să se construiască diagramele T, M la grinda din figura 11.3.

Rezolvare. Momentele din reazeme se determină prin generalizarea formulelor (1) şi (2) de la problema 11.2, notînd cu a_i şi b_i distanţele diferitelor forţe la reazemele *1* şi *2*.

$$M_1 = -\Sigma\frac{F_i a_i b_i^2}{l^2} = -\frac{3\cdot 1\cdot 8^2 + 8\cdot 3\cdot 6^2 + 4\cdot 4{,}5\cdot 4{,}5^2 + 6\cdot 7\cdot 2^2}{9^2} = -19{,}64 \text{ kNm}.$$

$$M_2 = -\Sigma\frac{F_i a_i^2 b_i}{l^2} = -\frac{3\cdot 1^2\cdot 8 + 8\cdot 3^2\cdot 6 + 4\cdot 4{,}5^2\cdot 4{,}5 + 6\cdot 7^2\cdot 2}{9^2} = -17{,}42 \text{ kNm}.$$

Reacţiunile sînt:

$$V_1 = \Sigma\frac{F_i b_i}{l} + \frac{M_2 - M_1}{l} = \frac{3\cdot 8 + 8\cdot 6 + 4\cdot 4{,}5 + 6\cdot 2}{9} + \frac{-17{,}42 + 19{,}64}{9} = 11{,}58 \text{ kN}.$$

$$V_2 = \Sigma F_i - V_1 = 3 + 8 + 4 + 6 - 11{,}58 = 9{,}42 \text{ kN}.$$

Cu aceste valori, se pot construi diagramele T, M prin puncte, după cum urmează:

$$M_1 = -19{,}64 \text{ kNm};\ M_2 = -17{,}42 \text{ kNm}$$
$$M_3 = -19{,}64 + 11{,}58\cdot 1 = -8{,}06 \text{ kNm}$$
$$M_4 = -19{,}64 + 11{,}58\cdot 3 - 3\cdot 2 = 9{,}10 \text{ kNm}$$
$$M_5 = -19{,}64 + 11{,}58\,.\,4{,}5 - 3\cdot 3{,}5 - 8\cdot 1{,}5 = 10{,}16 \text{ kNm}$$
$$M_6 = -17{,}42 + 9{,}42\cdot 2 = 1{,}42 \text{ kNm}.$$

Valorile forţei tăietoare apar pe desen.

11.4. O grindă încastrată, de lungime l, încărcată în capătul liber cu o forţă P, reazemă pe jumătate din lungimea sa pe altă grindă încastrată, ca în figura 11.4. Ambele grinzi au aceeaşi rigiditate EI.

Se cere să se afle forţa cu care cele două grinzi apasă una pe alta în capătul grinzii scurte şi apoi să se construiască, separat, diagramele de momente încovoietoare ale celor două grinzi.

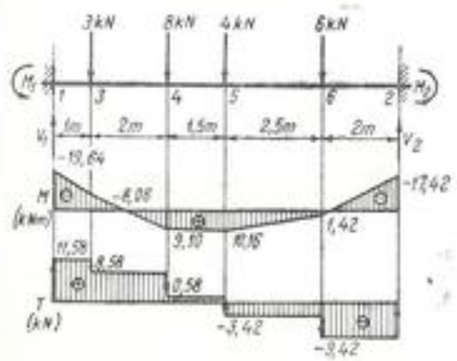


Fig. 11.3

Rezolvare. Se admite că în poziţia deformată grinzile rămîn în contact numai în încastrare şi în capătul grinzii scurte, ca în figura 11.4, *b*. Se pot separa, prin introducerea forţei X în punctul de contact (Fig. 11.4 *c*, şi 11.4, d).

Valoarea forţei X se află scriind că în punctul de aplicare al ei cele două grinzi, considerate cu acelaşi moment de inerţie şi din acelaşi material, au săgeţile egale.

Pentru grinda lungă, săgeata în secţiunea *2* produsă numai de forţa P este:

$$f_2' = \frac{P}{2EI}\left[l\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3\right] = \frac{5Pl^3}{48EI}.$$

La aceeaşi grindă, forţa X mai dă, în secţiunea *2*, o săgeată:

$$f_2'' = -\frac{X\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} = -\frac{Xl^3}{24EI}.$$

La grinda de dedesubt, săgeata este:

$$f_2 = \frac{Xl^3}{24\,EI}.$$

Se egalează săgeţile celor două grinzi în secţiunea *2*:

$$f_2' - f_2'' = f_2$$

$$\frac{5Pl^3}{48EI} - \frac{Xl^3}{24EI} = \frac{Xl^3}{24EI}$$

şi rezultă:

$$X = \frac{5}{4}P.$$

Cunoscînd această valoare, se pot construi diagramele de momente ca în figura 11.4, *e* şi 11.4, *f*.

11.5. Să se calculeze reacţiunile, momentele în reazeme şi să se construiască diagramele T, M la grinda dublu încastrată din figura 11.5.

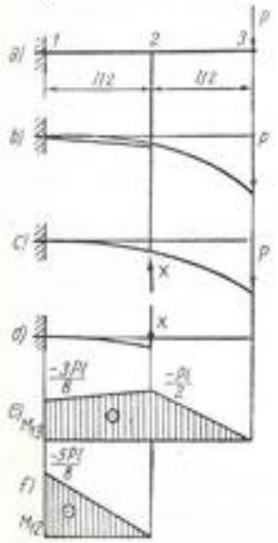


Fig. 11.4

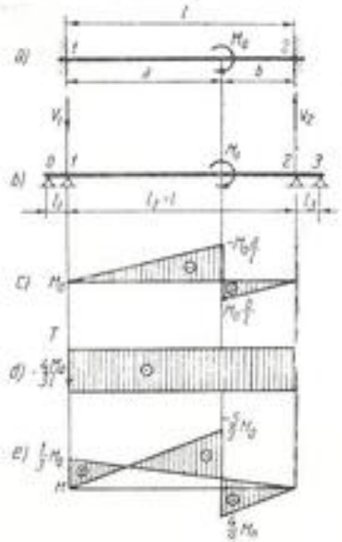


Fig. 11.5

Rezolvare. Se aplică ecuaţia celor trei momente, înlocuind încastrările prin cîte două reazeme şi scriind relaţiile:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 + 6A_1 = 0;$$

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 + 6A_2 = 0.$$

Se cunosc:

$$l_1 = l_3 = 0; \quad l_2 = l;$$

$$M_0 = M_3 = 0,$$

cu care sistemul de ecuaţii se reduce la:

$$\left.\begin{aligned} 2M_1 l + M_2 l + 6A_1 &= 0; \\ M_1 l + 2M_2 l + 6A_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Se scriu expresiile lui A_1 şi A_2, folosind diagrama de momente a grinzii static determinate din figura 11.5, *c*:

$$A_1 = \frac{S_1}{l} = \frac{-M_0\frac{a}{l}\cdot\frac{a}{2}\left(b + \frac{a}{3}\right) + M_0\frac{b}{l}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{2b}{3}}{l} = \frac{M_0}{6l^3}(2b^3 - 3a^2b - a^3);$$

$$A_2 = \frac{S_1}{l} = \frac{-M_0\frac{a}{l}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2a}{3} + M_0\frac{b}{l}\cdot\frac{b}{2}\left(a + \frac{b}{3}\right)}{l} = \frac{M_0}{6l^3}(-2a^3 + 3ab^2 + b^3).$$

Sistemul de ecuaţii (1) se transformă în:

$$\left.\begin{aligned} 2M_1 + M_2 + \frac{M_0}{l^3}(2b^3 - 3a^2b - a^3) &= 0; \\ M_1 + 2M_2 + \frac{M_0}{l^3}(-2a^3 + 3ab^2 + b^3) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Rezolvînd sistemul se obţin:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -\frac{M_0}{l^3}(b^3 - 2a^2b - ab^2); \\ M_2 &= \frac{M_0}{l^3}(a^3 - 2ab^2 - a^2b). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Reacţiunile sînt:

$$V_1 = V_{1_0} + \frac{M_2 - M_1}{l} = -\frac{M_0}{l} + \frac{M_0}{l^4}(a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + b^3). \qquad (4)$$

Reacţiunea V_2 este egală şi de sens contrar cu V_1.

Aplicaţie. Să se construiască diagramele T, M în cazul particular

$$a = \frac{2}{3}\,l,\ b = \frac{1}{3}\,l.$$

Înlocuind în ecuaţiile (3) rezultă:

$$M_1 = -\frac{M_0}{l^3}\left[\left(\frac{l}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2l}{3}\right)^2\frac{l}{3} - \frac{2l}{3}\left(\frac{l}{3}\right)^2\right] = \frac{1}{3}\,M_0;$$

$$M_2 = \frac{M_0}{l^3}\left[\left(\frac{2l}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{l}{3}\right)^2 - \left(\frac{2l}{3}\right)^2\frac{l}{3}\right] = 0.$$

Reacţiunile sînt:

$$V_1 = -\frac{M_0}{l} + \frac{M_2 - M_1}{l} = -\frac{4M_0}{3l};$$

$$V_2 = -V_1 = \frac{4M_0}{3l}.$$

Diagramele din figurile 11.5, *d* şi 11.5, *e* sînt construite în acest caz particular.

În încastrarea din stînga, momentul încovoietor are valoarea $M_1 = \frac{1}{3}\,M_0$

În secţiunea *a*, există un moment încovoietor maxim negativ:

$$M'_{max} = -\frac{2}{3}\,M_0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\,M_0 = -\frac{5}{9}\,M_0,$$

precum şi un moment încovoietor maxim pozitiv:

$$M''_{max} = \frac{1}{3}\,M_0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\,M_0 = \frac{4}{9}\,M_0.$$

11.6. La grinda din figura 11.6, încastrată în reazemul *1*, se produce o denivelare f_2 a reazemului *2*. Se cere să se calculeze reacţiunile, momentul din încastrare, să se construiască diagramele T, M şi să se scrie ecuaţia fibrei medii deformate.

Rezolvare. Se poate considera că săgeata f_2 ar fi produsă de reacţiunea V_2:

$$f_2 = \frac{V_2 l^3}{3EI}.$$

Rezultă reacţiunea:

$$V_2 = \frac{3EIf_2}{l^3}. \qquad (1)$$

Neexistînd sarcini exterioare, rezultă:

$$V_1 = -V_2.$$

Momentul din încastrare este:

$$M_1 = -V_2 l = -\frac{3EIf_2}{l^2}. \qquad (2)$$

Cu aceste valori, se construiesc diagramele T, M din figura 11.6.

Pentru studiul deformaţiei, se scrie ecuaţia momentului încovoietor într-o secţiune oarecare x şi apoi ecuaţia fibrei medii deformate:

$$M = -|M_1| + V_1 x = -\frac{3EIf_2}{l^2} + \frac{3EIf_2 x}{l^3} = \frac{3EIf_2}{l^3}\left(\frac{x}{l} - 1\right);$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{3f_2}{l^3}\left(1 - \frac{x}{l}\right);$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{3f_2}{l^3}\left(x - \frac{x^2}{2l}\right) + C_1;$$

$$v = \frac{3f_2}{l^3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l}\right) + C_1 x + C_2.$$

Din cauza încastrării, constantele sînt $C_1 = C_2 = 0$.

Rămîn ecuaţiile deformaţiei:

$$v = \frac{3f_2 x^2}{2l^3}\left(1 - \frac{x}{3l}\right); \qquad (3)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{3f_2 x}{l^3}\left(1 - \frac{x}{2l}\right). \qquad (4)$$

11.7. Dacă reazemul încastrat *1* al grinzii din figura 11.7 suferă o rotire pozitivă de valoare φ_1, grinda neavînd sarcini exterioare, se cere să se calculeze reacţiunile în reazeme, momentul din încastrare, să se construiască diagramele, T, M şi să se scrie ecuaţia fibrei medii deformate. De asemenea, se vor calcula rotirea pe reazemul *2*, precum şi săgeata maximă a grinzii.

Rezolvare. Spre a se produce rotirea φ_1, este necesar să existe un cuplu pozitiv M_1. Se scrie ecuaţia de momente faţă de încastrarea *1* (folosind semnele din figura 11.7):

$$M_1 - V_2 l = 0;$$

$$V_2 = \frac{M_1}{l} = -V_1.$$

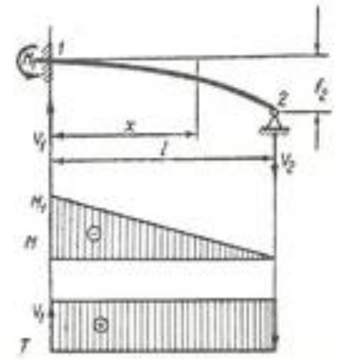


Fig. 11.6

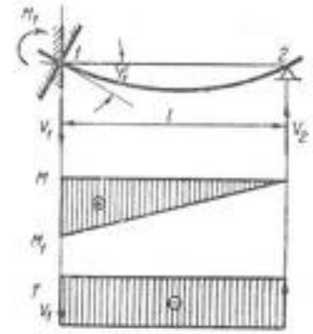


Fig. 11.7

Se scrie ecuaţia momentului într-o secţiune oarecare x şi ecuaţia fibrei medii deformate:

$$M = M_1 - V_1 x = M_1\left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -M = -M_1\left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -M_1\left(x - \frac{x^2}{2l}\right) + C_1,$$

$$EIv = -M_1\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l}\right) + C_1 x + C_2.$$

Condiţiile pentru determinarea constantelor sînt:

$$x = 0,\ v = 0,\ \text{deci } C_2 = 0;$$

$$x = l,\ v = 0,\ \text{deci } C_1 = \frac{M_1 l}{3}.$$

Înlocuind în ecuaţia lui $\frac{dv}{dx}$, se obţine:

$$EI\frac{dv}{dx} = -M_1\left(x - \frac{x^2}{2l}\right) + \frac{M_1 l}{3} = M_1\left(\frac{l}{3} + \frac{x^2}{2l} - x\right).$$

Întrucît condiţia cunoscută a problemei este că pentru $x = 0$, $\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg}\varphi_1$ (cunoscut) rezultă:

$$EI \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 = M_1\frac{l}{3}.$$

Se găseşte valoarea momentului din încastrare:

$$M_1 = \frac{3EI\operatorname{tg}\varphi_1}{l}; \tag{1}$$

$$V_2 = -V_1 = \frac{M_1}{l} = \frac{3EI\operatorname{tg}\varphi_1}{l^2}. \tag{2}$$

Înlocuind pe M_1, cele două ecuaţii de deformaţii devin

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{3EI\operatorname{tg}\varphi_1}{l}\left(\frac{l}{3} + \frac{x^2}{2l} - x\right);$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{3\operatorname{tg}\varphi_1}{l}\left(\frac{l}{3} + \frac{x^2}{2l} - x\right), \tag{3}$$

$$v = \frac{3\operatorname{tg}\varphi_1}{l}\left(\frac{lx}{3} + \frac{x^3}{6l} - \frac{x^2}{2}\right). \tag{4}$$

Diagramele T, M au fost desenate în figura 11.7.

Unghiul pe reazemul 2 se află făcînd $x = l$ în ecuaţia (3).

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=l} = \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi_1. \tag{5}$$

Pentru a găsi săgeata maximă, se caută secţiunea x_1 pentru care $\frac{dv}{dx} = 0$.

Din formula (3), rezultă

$$\frac{x_1^2}{2l} - x_1 + \frac{l}{3} = 0.$$

Soluţiile ecuaţiei sînt:

$$x_1' = 1{,}578l;\quad x_1'' = 0{,}422\ l.$$

Este valabilă numai a doua soluţie, care se înlocuieşte în formula (4)

$$f = v_{max} = \frac{3\operatorname{tg}\varphi_1}{l}\left[\frac{l \cdot 0{,}422l}{3} + \frac{(0{,}422\,l)^3}{6l} - \frac{(0{,}422\,l)^2}{2}\right] = 0{,}192 \cdot l\operatorname{tg}\varphi_1.$$

11.8. Să se calculeze reacţiunile, momentul în încastrare şi să se traseze diagramele T, M la grinda din figura 11.8.

Rezolvare. Sistemul este simplu static nedeterminat. Se utilizează metoda *Mohr-Maxwell* şi se alege ca necunoscută static nedeterminată reacţiunea X_1 din reazemul *1*. Sistemul de bază obţinut prin înlăturarea reazemului *1* este reprezentat în figura 11.8, *a*. Ecuaţia care dă necunoscuta static nedeterminată este

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0, \tag{1}$$

de unde:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}. \tag{2}$$

Deoarece grinda are rigidităţi diferite pe porţiunile *1—2* şi *2—3*, calculul săgeţilor δ_{10} şi δ_{11} se face analitic:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}} M_{12}^0 m_{12}dx + \frac{1}{2EI}\int_{\frac{l}{2}}^{l} M_{23}^0 m_{23}dx, \tag{3}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}} m_{12}^2 dx + \frac{1}{2EI}\int_{\frac{l}{2}}^{l} m_{23}^2 dx. \tag{4}$$

Expresiile momentelor $M^0(x)$ şi $m(x)$ se obţin pentru încărcările reprezentate în figurile 11.8, *b*, respectiv 11.8, *c*:

$$M_{12}^0(x) = 0$$

$$M_{23}^0(x) = -P\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

$$m_{12}(x) = x.$$

$$m_{23}(x) = x.$$

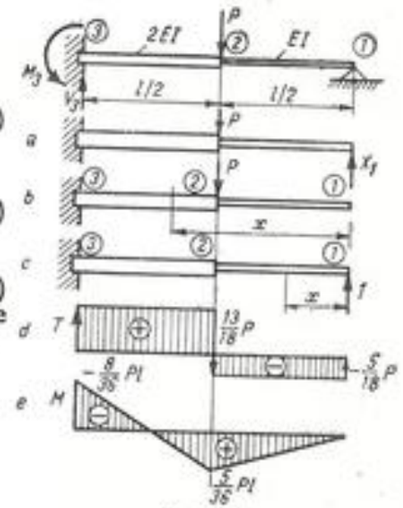


Fig. 11.8

Introducînd aceste expresii în relațiile (3) și (4) și efectuînd integrarea se obține:

$$\delta_{10} = -\frac{5Pl^3}{96EI}, \tag{5}$$

$$\delta_{11} = \frac{9l^3}{48EI}. \tag{6}$$

Reacțiunea în reazemul *1* are valoarea:

$$V_1 = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{5P}{18}.$$

Momentul și reacțiunea din încastrare se obțin din ecuațiile de echilibru:

$$V_3 - P + V_1 = 0, \quad M_3 - P\frac{l}{2} + V_1 l = 0,$$

de unde rezultă:

$$V_3 = \frac{13}{18}P, \quad M_3 = \frac{2}{9}Pl.$$

Diagramele de forțe tăietoare și momente încovoietoare sînt prezentate în figurile 11.8, *d* și 11.8, *e*.

11.9. Să se determine reacțiunile, momentele pe reazeme și să se construiască diagramele *T*, *M* la grinda continuă din figura 11.9.

Rezolvare. Din motive de simetrie, rezultă:

$$M_2 = M_3, \quad M_1 = M_4 = 0.$$

Este suficient deci a scrie o singură ecuație a celor trei momente

$$M_1 l + 2M_2(l + l) + M_3 l + 6A_2 = 0.$$

Cu condițiile de mai sus, ecuația devine:

$$5M_2 l + 6A_2 = 0.$$

Reacțiunea suprafețelor de momente pe reazemul *2*, A_2 este datorită celor două parabole de pe intervalele adiacente, adică reprezintă suprafața unei parabole întregi:

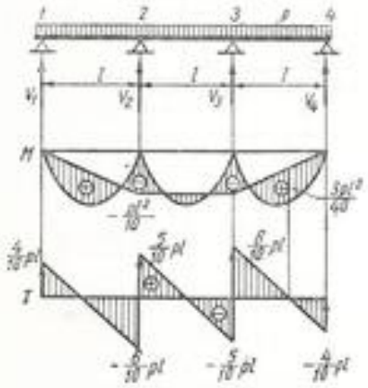


Fig. 11.9

$$A_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot l = \frac{pl^3}{12},$$

$$5M_2 l + \frac{6pl^3}{12} = 0,$$

$$M_2 = M_3 = -\frac{pl^2}{10}. \tag{1}$$

Reacțiunile sînt

$$V_1 = V_{1s} + \frac{M_2}{l} = \frac{pl}{2} - \frac{pl}{10} = \frac{4pl}{10} = V_4, \tag{2}$$

$$V_2 = V_{2s} - \frac{M_2}{l} = \frac{pl}{2} + \frac{pl}{2} + \frac{pl}{10} = \frac{11pl}{10} = V_3 \tag{3}$$

Cu aceste valori, se construiesc diagramele *T*, *M* din figura 11.9.

11.10. Să se calculeze momentele pe reazeme, reacțiunile și să se construiască diagramele *T*, *M* la grinda din figura 11.10.

Rezolvare. S-a construit diagrama de momente M_s a grinzilor static determinate, care dă:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{4} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\frac{Fl}{2}\frac{l}{2} = \frac{3Fl^2}{16}.$$

Ecuația celor trei momente, cu $M_1 = M_3 = 0$, este:

$$2M_2 2l + 6A_2 = 0,$$

$$M_2 = -\frac{3A_2}{2l} = -\frac{9Fl}{32}.$$

Cunoscînd această valoare, se construiește diagrama *M*, folosind principiul suprapunerii efectelor.

Reacțiunile sînt:

$$V_1 = \frac{F}{2} + \frac{M_2}{l} = \frac{F}{2} - \frac{9F}{32} = \frac{7F}{32}, \cong 0.4\,F$$

$$V_2 = \frac{F}{2} + F - \frac{M_2}{l} - \frac{M_3}{l} = \frac{F}{2} + F + \frac{9F}{32} + \frac{9F}{32} = \frac{66F}{32}, \cong 2.1\,F$$

$$V_3 = F + \frac{M_3}{l} = F - \frac{9F}{32} = \frac{23F}{32}. \cong 0.5\,F$$

Avînd aceste valori, se construiește diagrama forțelor tăietoare.

11.11. Să se calculeze momentele pe reazeme, reacțiunile și să se construiască diagramele *T*, *M* la grinda din figura 11.11.

Rezolvare. Se înlocuiește încastrarea prin reazemele simple *0*, *1*.

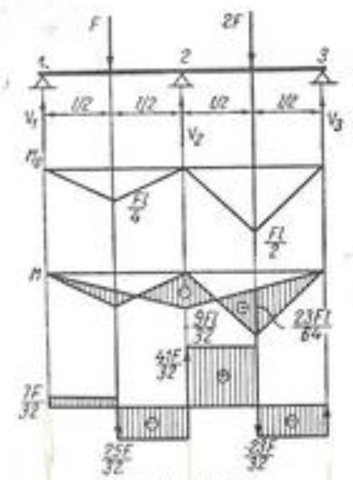


Fig. 11.10

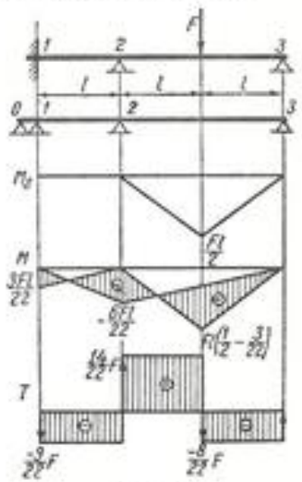


Fig. 11.11

Se desenează diagrama M_s din care rezultă:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{2} \cdot \frac{2l}{2} = \frac{Fl^2}{4}.$$

Ecuațiile celor trei momente, pentru grupele de reazeme *0-1-2*, *1-2-3*, cu $M_0 = M_3 = 0$ și $A_1 = 0$ sînt

$$2M_1 l + M_2 l = 0,$$

$$M_1 l + 2M_2 (l + 2l) + 6A_2 = 0,$$

$$2M_1 + M_2 = 0,$$

$$M_1 + 6M_2 + 6\frac{Fl}{4} = 0.$$

Soluțiile sistemului de ecuații sînt:

$$M_2 = -\frac{3Fl}{11}; \quad M_1 = \frac{3Fl}{22}. \tag{1}$$

Cu aceste valori, folosind principiul suprapunerii efectelor, se construiește diagrama M.

Reacțiunile sînt:

$$V_1 = 0 + \frac{M_2 - M_1}{l} = -\frac{9F}{22},$$

$$V_2 = \frac{F}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l} + \frac{M_3 - M_2}{2l} = \frac{F}{2} + \frac{3F}{11} + \frac{3F}{22} + \frac{3F}{22} = \frac{23F}{22},$$

$$V_3 = \frac{F}{2} - \frac{M_3 - M_2}{2l} = \frac{F}{2} - \frac{3F}{22} = \frac{8F}{22}.$$

11.12. Grinda din figura 11.12 este încărcată cu un cuplu exterior M_3^0 aplicat pe reazemul *3*. Se cere să se calculeze reacțiunile, momentele pe reazeme și să se construiască diagramele T, M.

Rezolvare. Descompunînd grinda în două grinzi simplu rezemate la capete, se poate construi diagrama momentelor M_s, din care se calculează A_2:

$$A_2 = \frac{S_s}{l} = -\frac{1}{l} \cdot \frac{M_3^0 l}{2} \cdot \frac{l}{3} = -\frac{M_3^0 l}{6}.$$

Se observă că am considerat momentul M_3^0 ca o cantitate cunoscută, static determinată. În acest caz, el nu va mai figura în ecuația celor trei momente (căci momentul static nedeterminat din *3* este nul) și se scrie:

$$M_1 l + 4M_2 l + M_3 l + 6A_2 = 0,$$

$$M_1 = M_3 = 0; \quad 6A_2 = -M_3^0 l,$$

$$4M_2 - M_3^0 = 0; \quad M_2 = \frac{M_3^0}{4}. \tag{1}$$

Momentul M_2 este pozitiv, în timp ce M_3^0, conform desenului, este negativ. Cu aceste valori se construiește diagrama M din figura 11.12.

Considerînd momentul M_3^0 ca static determinat, el produce reacțiunile:

$$V_{1s} = 0; \; V_{2s} = -\frac{M_3^0}{l} = -V_{3s}.$$

Reacțiunile rezultante sînt:

$$V_1 = V_{1s} + \frac{M_2}{l} = 0 + \frac{M_3^0}{4l} = \frac{M_3^0}{4l},$$

$$V_2 = V_{2s} - \frac{M_2}{l} - \frac{M_3}{l} = -\frac{M_3^0}{l} - \frac{M_3^0}{4l} - \frac{M_3^0}{4l} = -\frac{6M_3^0}{4l},$$

$$V_3 = V_{3s} + \frac{M_3}{l} = \frac{M_3^0}{l} + \frac{M_3^0}{4l} = \frac{5M_3^0}{4l}.$$

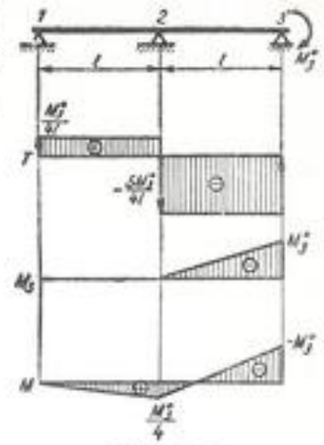


Fig. 11.12

Cu aceste valori se obține diagrama T.

11.13. La grinda din figura 11.13, se cere să se calculeze reacțiunile, momentele pe reazeme și să se construiască diagramele T, M.

Rezolvare. Se construiește diagrama momentelor static determinate, care este un triunghi în panoul *1—2*. Se calculează:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl^2}{16}; \quad A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 0.$$

Cunoscînd că $M_1 = M_7 = 0$ și ținînd seamă de valorile de mai sus, se scriu ecuațiile celor trei momente, pentru grupe de cîte trei reazeme:

$$4M_2 l + M_3 l + 6\frac{Pl^2}{16} = 0; \; M_2 l + 4M_3 l + M_4 l = 0; \; M_3 l + 4M_4 l + M_5 l = 0;$$

$$M_4 l + 4M_5 l + M_6 l = 0; \qquad M_5 l + 4M_6 l = 0.$$

Făcînd simplificările, sistemul de ecuații devine:

$$4M_2 + M_3 + \frac{3}{8}Pl = 0,$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = 0,$$

$$M_3 + 4M_4 + M_5 = 0,$$

$$M_4 + 4M_5 + M_6 = 0,$$

$$M_5 + 4M_6 = 0.$$

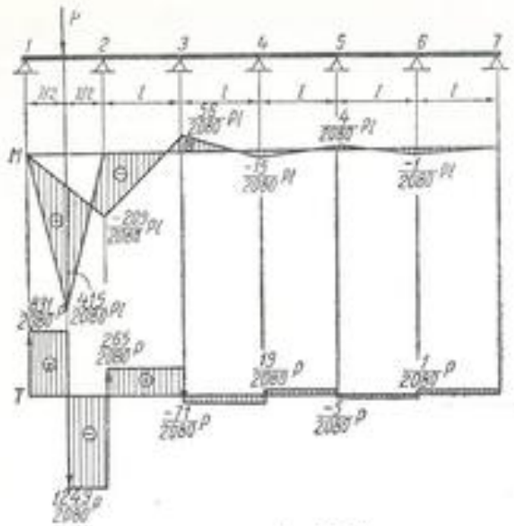


Fig. 11.13

Rezolvarea sistemului dă momentele:

$$M_2 = -\frac{209}{2\,080}\,Pl,$$

$$M_3 = -\frac{56}{209}\,M_2 = \frac{56}{2\,080}\,Pl,$$

$$M_4 = -\frac{15}{56}\,M_3 = -\frac{15}{2\,080}\,Pl,$$

$$M_5 = -\frac{4}{15}\,M_4 = \frac{4}{2\,080}\,Pl,$$

$$M_6 = -\frac{1}{4}\,M_5 = -\frac{1}{2\,080}\,Pl.$$

Pentru calculul reacţiunilor, se scrie:

$$V_{1s} = V_{2s} = \frac{P}{2};$$

$$V_{3s} = V_{4s} = V_{5s} = V_{6s} = V_{7s} = 0$$

$$\frac{M_2 - M_1}{l} = -\frac{209}{2\,080}\,P,$$

$$\frac{M_3 - M_2}{l} = \frac{265}{2\,080}\,P,$$

$$\frac{M_4 - M_3}{l} = -\frac{71}{2\,080}\,P, \quad \frac{M_5 - M_4}{l} = \frac{19}{2\,080}\,P,$$

$$\frac{M_6 - M_5}{l} = -\frac{5}{2\,080}\,P, \quad \frac{M_7 - M_6}{l} = \frac{1}{2\,080}\,P,$$

$$V_1 = V_{1s} + \frac{M_2 - M_1}{l} = \frac{P}{2} - \frac{209}{2\,080}\,P = \frac{831}{2\,080}\,P,$$

$$V_2 = V_{2s} - \frac{M_2 - M_1}{l} + \frac{M_3 - M_2}{l} = \frac{P}{2} + \frac{209}{2\,080}\,P + \frac{265}{2\,080}\,P = \frac{1\,514}{2\,080}\,P,$$

$$V_3 = -\frac{M_3 - M_2}{l} + \frac{M_4 - M_3}{l} = -\frac{265}{2\,080}\,P - \frac{71}{2\,080}\,P = -\frac{336}{2\,080}\,P,$$

$$V_4 = -\frac{M_4 - M_3}{l} + \frac{M_5 - M_4}{l} = \frac{71}{2\,080}\,P + \frac{19}{2\,080}\,P = \frac{90}{2\,080}\,P,$$

$$V_5 = -\frac{M_5 - M_4}{l} + \frac{M_6 - M_5}{l} = -\frac{19}{2\,080}\,P - \frac{5}{2\,080}\,P = -\frac{24}{2\,080}\,P,$$

$$V_6 = -\frac{M_6 - M_5}{l} + \frac{M_7 - M_6}{l} = \frac{5}{2\,080}\,P + \frac{1}{2\,080}\,P = \frac{6}{2\,080}\,P,$$

$$V_7 = -\frac{M_7 - M_6}{l} = -\frac{1}{2\,080}\,P.$$

Cu valorile calculate, se construiesc diagramele T, M din figura 11.13. Se observă scăderea treptată şi rapidă a efectului forţei P, cu depărtarea de la punctul ei de aplicaţie.

Cea mai mare valoare a momentului încovoietor este în dreptul sarcinii P:

$$M_{max} = \frac{Pl}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{209}{2\,080}\,Pl \cong \frac{415}{2\,080}\,Pl.$$

11.14. La grinda pe trei reazeme din figura 11.14, se cere:

a) Să se afle momentele pe reazeme, reacţiunile şi să se construiască diagramele T, M.

b) Să se dimensioneze grinda din oţel I, luînd $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

c) Dacă reazemul 2 suferă o denivelare pozitivă $f_2 = 1$ cm, să se afle noile reacţiuni şi noua distribuţie a eforturilor.

Rezolvare.

a) Ţinînd seama că $M_1 = M_3 = 0$ şi notînd cu l distanţa între două reazeme, ecuaţia celor trei momente este

$$4M_2 l + 6A_2 = 0,$$

unde

$$A_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{pl^3}{8} \cdot l = \frac{pl^4}{12}.$$

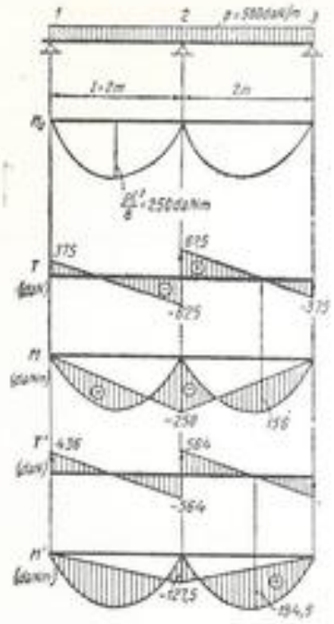


Fig. 11.14

Rezultă

$$M_2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{A_2}{l} = -\frac{pl^2}{8}.$$

Se află reacţiunile

$$V_1 = V_{1s} + \frac{M_2 - M_1}{l} = \frac{pl}{2} - \frac{pl}{8} = \frac{3pl}{8} = V_3,$$

$$V_2 = 2pl - \frac{6pl}{8} = \frac{10pl}{8}.$$

Înlocuind datele numerice, se obţine

$$M_2 = -250 \text{ daNm}; \quad V_1 = V_3 = 375 \text{ daN};$$

$$V_2 = 1\,250 \text{ daN}.$$

Cu aceste valori, s-au trasat diagramele T, M din figura 11.14.

b) Se dimensionează grinda la încovoiere

$$W_{nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{25\,000}{1\,400} = 17{,}85 \text{ cm}^3.$$

Se alege profilul I 8, cu $W_z = 19{,}5$ cm³ şi $I_z = 77{,}8$ cm⁴ (*anexa 10*).

c) Dacă reazemul 2 are o denivelare cunoscută f_2, în rezolvarea problemei se aplică ecuaţia celor 3 momente sub forma (11.7):

$$4M_2 l + 6A_2 + 6EI_z\left(-2\frac{f_2}{l}\right) = 0.$$

Înlocuind pe A_2, ecuaţia devine

$$4M_2 l + \frac{pl^3}{2} - 12EI_z\frac{f_2}{l} = 0,$$

iar soluţia ei este

$$M_2 = -\frac{pl^2}{8} + \frac{3EI_z f_2}{l^2}.$$

Înlocuind valorile numerice, se obţine

$$M_2 = -\frac{5 \cdot 200^2}{8} + \frac{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 77{,}8 \cdot 1}{200^2} = -25\,000 + 12\,250 = -12\,750 \text{ daN cm}.$$

Reacţiunile devin

$$V_1 = 500 - \frac{12\,750}{200} = 436 \text{ daN} = V_3; \quad V_2 = 1\,128 \text{ daN}.$$

Cu aceste valori, se trasează noile diagrame de eforturi T', M'. Se observă că din cauza denivelării f_2, momentul maxim s-a micşorat, mutîndu-se de pe reazem în intervalul dintre reazeme. Din calculul făcut, se vede că o denivelare mai mare — de circa 2 cm — duce la anularea completă a momentului M_2 de pe reazemul mijlociu.

11.15. Să se calculeze momentele pe reazeme, reacţiunile şi să se construiască diagramele T, M la grinda din figura 11.15, în cazul aplicaţiei numerice $p = 2$kN/m, $F = 3$kN şi $l = 4$ m.

Rezolvare. Se înlocuieşte încastrarea prin reazemele simple *0, 1*.

Se desenează diagrama M_s din care rezultă

$$A_1 = \frac{2}{3}\,\frac{pl^2}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{pl^3}{24}.$$

Se scrie ecuaţia celor trei momente pentru grupul de reazeme *0—1—2* şi se ţine seama că $M_0 = 0$, $M_2 = -\frac{Fl}{2}$, deschiderea *0—1* este egală cu zero.

$$2M_1 l + M_2 l + 6A_1 = 0,$$

$$2M_1 l - \frac{Fl}{2} l + 6\,\frac{pl^3}{24} = 0,$$

$$2M_1 = \frac{Fl}{2} - \frac{pl^2}{4},$$

$$M_1 = \frac{Fl}{4} - \frac{pl^2}{8}.$$

Reacţiunile sînt:

$$V_1 = \frac{pl}{2} + \frac{M_2 - M_1}{l} =$$

$$= \frac{pl}{2} + \frac{-\frac{Fl}{2} - \frac{Fl}{4} + \frac{pl^2}{8}}{l} =$$

$$= \frac{pl}{2} + \frac{pl}{8} - \frac{3F}{4} = \frac{5pl}{8} - \frac{3F}{4},$$

$$V_2 = \frac{pl}{2} + F - \frac{M_2 - M_1}{l} =$$

$$= \frac{pl}{2} + F - \frac{pl}{8} + \frac{3F}{4} = \frac{3pl}{8} + \frac{7F}{4},$$

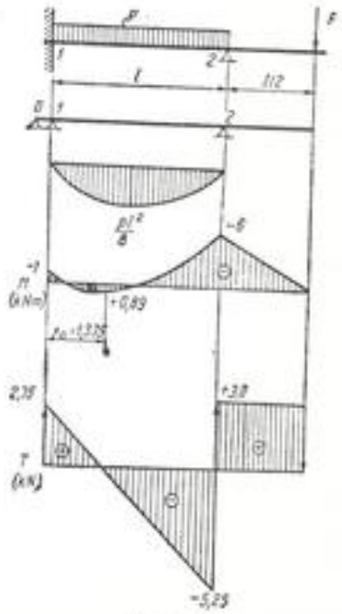


Fig. 11.15

$$V_1 + V_2 = \frac{5pl}{8} - \frac{3F}{4} + \frac{3pl}{8} + \frac{7F}{4} = pl + F.$$

$$M_1 = \frac{3 \cdot 4}{4} - \frac{2 \cdot 4^2}{8} = -1 \text{ kNm}; \quad M_2 = -\frac{3 \cdot 4}{2} = -6 \text{ kNm},$$

$$V_1 = \frac{5 \cdot 2 \cdot 4}{8} - \frac{3 \cdot 3}{4} = +2{,}75 \text{ kN}; \quad V_2 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{8} + \frac{7 \cdot 3}{4} = +8{,}25 \text{ kN}.$$

Pentru determinarea poziţiei momentului maxim pe deschiderea *1—2* se anulează expresia forţei tăietoare

$$T_x = 2{,}75 - 2x_0 = 0. \quad x_0 = 1{,}375 \text{ m}.$$

Rezultă

$$M_{max} = 2{,}75 \cdot 1{,}375 - 1 - \frac{2 \cdot 1{,}375^2}{2} = +0{,}89 \text{ kNm}.$$

11.16. Pentru sistemul static nedeterminat din figura 11.16, *a* format dintr-o grindă dreaptă *1—4* de secţiune constantă, un stîlp *2—5* şi un arc elicoidal *3—6*, se cere:

1) să se dimensioneze grinda *1—4*, din oţel, cu secţiunea circulară, ştiind că: $l = 2{,}2$ m, $P = 500$ daN, $\sigma_a = 1\,800$ daN/cm²;

2) să se dimensioneze arcul elicoidal cilindric *3—6*, din oţel, cu $\tau_a = 5\,000$ daN/cm², $n = 3$ spire şi $\frac{R}{d} = 4$.

3) să se dimensioneze stîlpul *2—5*, din lemn, cu secţiune circulară, ştiind că $L = 1{,}5$ m, coeficientul de siguranţă la flambaj $c = 4$, $\lambda_0 = 100$, considerînd stîlpul încastrat în *5* şi simplu rezemat în *2*.

Rezolvare. Se construieşte diagrama M_s a momentelor static determinate (fig. 11.16, *b*) din care rezultă:

$$A_2 = \frac{1}{l} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl}{8} \cdot l \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4Pl}{9} \cdot l \, \frac{l + \frac{l}{3}}{3} = Pl^2\left(\frac{1}{24} + \frac{8}{81}\right) = \frac{91}{648} \cdot Pl^2;$$

$$A_3 = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4Pl}{9} \cdot l \, \frac{l + \frac{2}{3}l}{3} + \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{3}\left(l + \frac{l}{3}\right)\frac{l}{2} = Pl^2\left(\frac{10}{81} + \frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{19}{81} Pl^2.$$

Se notează cu f_2 şi f_3 denivelările grinzii *1—4* pe reazemele *2*, respectiv *3*. Observînd că $M_1 = M_4 = 0$, ecuaţia celor trei momente are forma (v. relaţia 11.7):

— pentru reazemele *1—2—3*

$$2M_2(l + l) + M_3 l + 6A_2 + 6E_{OL}I_s\left(-\frac{f_2}{l} + \frac{f_2 - f_3}{l}\right) = 0;$$

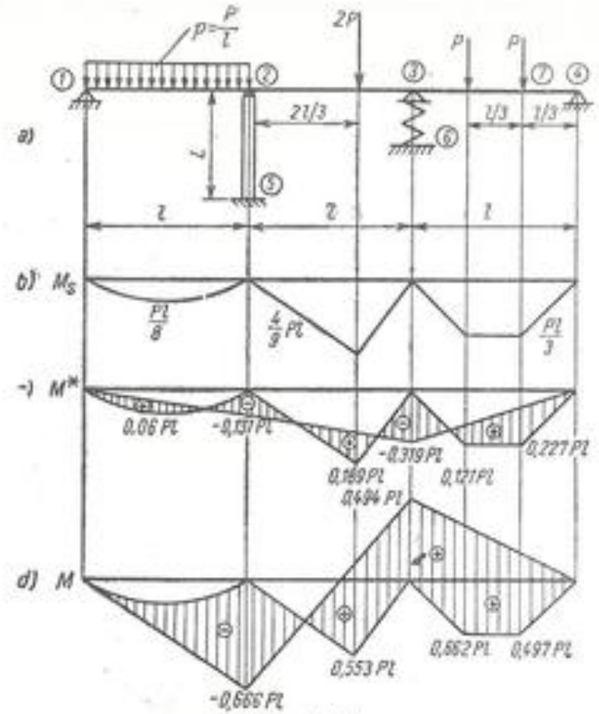


Fig. 11.16

— pentru reazemele *2—3—4*

$$M_2 l + 2M_3(l + l) + 6A_3 + 6E_{OL}I_s\left(\frac{f_2 - f_3}{l} + \frac{-f_3}{l}\right) = 0.$$

Sistemul de ecuaţii este

$$\begin{aligned} 4M_2 + M_3 &= -\frac{91}{108} Pl + \frac{6E_{OL}I_s}{l^3}(2f_2 - f_3); \\ M_2 + 4M_3 &= -\frac{38}{27} Pl + \frac{6E_{OL}I_s}{l^3}(2f_3 - f_2), \end{aligned} \tag{1}$$

din care se obţine

$$\begin{aligned} M_2 &= -\frac{153}{405} Pl + \frac{6}{5} \cdot \frac{E_{OL}I_s}{l^3}(3f_2 - 2f_3); \\ M_3 &= -\frac{517}{1620} Pl + \frac{6}{5} \cdot \frac{E_{OL}I_s}{l^3}(3f_3 - 2f_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Reacţiunile grinzii pe reazemele 2 şi 3 sînt (v. relaţia 11.10.).

$$V_2 = \frac{P}{2} + \frac{1}{3}2P + \frac{1}{l}(-M_2 + M_3 - M_2) =$$
$$= \frac{1\,797}{1\,620}P + \frac{6}{5}\cdot\frac{E_{OL}I_z}{l^3}(7f_2 - 8f_3);$$
$$V_3 = \frac{2}{3}2P + P + \frac{1}{l}(M_2 - M_3 - M_3) = \tag{3}$$
$$= \frac{767}{270}P + \frac{6}{5}\frac{E_{OL}I_z}{l^3}(7f_2 - 8f_3).$$

Se face mai întîi predimensionarea grinzii *1—4*, considerînd că reazemele *2* şi *3* nu au denivelări. Dacă $f_2 = f_3 = 0$, din relaţiile (2) se obţine

$$M_2^* = -\frac{53Pl}{405} = -0{,}131\ Pl; \quad M_3^* = -\frac{517Pl}{1\,620} = -0{,}319Pl.$$

În figura 11.16, *c* s-a trasat diagrama de momente M^* a grinzii *1—4*, considerînd reazemele *2* şi *3* fără denivelări.

Predimensionarea grinzii *1—4* se face în secţiunea *7*, unde momentul încovoietor M^* este maxim şi are valoarea

$$M^*_{max} = 0{,}227\ Pl.$$

De asemenea, pentru ca eforturile unitare din grinda dată (care are reazemele *2* şi *3* elastice) să nu depăşească rezistenţa admisibilă prescrisă, predimensionarea se va face cu efortul unitar $\sigma_a^* = \frac{1}{3}\sigma_a$, astfel încît rezultă

$$d_{1\,nec} = \sqrt[3]{\frac{32M^*_{max}}{\pi\sigma_a^*}} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot 0{,}227\cdot 500\cdot 220}{\pi\cdot 600}} = 7{,}5\ \text{cm}.$$

Se alege diametrul $d_1 = 7{,}5$ cm.

Dimensionarea stîlpului *2—5* se face ţinînd seama de flambaj

$$V_2 = \frac{\pi^2 E_{lemn}}{\lambda_f^2}\cdot\frac{\pi D^4}{64}, \tag{4}$$

în care $l_f = 2L$.

Denivelarea reazemului *2* este

$$f_2 = \frac{V_2 L}{E_{lemn}}\frac{4}{\pi D^2} \tag{5}$$

Arcul elicoidal *3—6* se dimensionează cu relaţia

$$\frac{\pi d^3}{16} = \frac{V_2 R}{\tau_a} \tag{6}$$

iar denivelarea reazemului *3* este dată de relaţia

$$f_3 = \frac{64V_2\pi R^3}{Gd^4}. \tag{7}$$

Între relaţiile (4) şi (5) se elimină D iar între (6) şi (7) se elimină d, expresiile obţinute pentru f_2 şi f_3 înlocuindu-se în relaţiile (3). În acest mod se obţine un sistem de ecuaţii neliniare avînd ca necunoscute pe V_2 şi V_3. Sistemul se rezolvă numeric, prin încercări, obţinîndu-se

$$V_2 = 1\,517\ \text{daN} \quad \text{şi} \quad V_3 = 316\ \text{daN}.$$

Din (4) rezultă diametrul stîlpului

$$D = 10{,}6\ \text{cm şi se alege } D = 11\ \text{cm}$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{2L}{\frac{D}{4}} = \frac{8L}{D} = \frac{8\cdot 150}{11} = 109 > \lambda_0$$

deci dimensionarea făcută cu relaţia (4) este corectă.

Din (6) rezultă $d = 1{,}26$ cm şi se alege $d = 1{,}3$ cm. De asemenea $R = 4d = 5{,}2$ cm.

Avînd precizate dimensiunile stîlpului şi arcului elicoidal, se pot calcula denivelările f_2 şi f_3 ale reazemelor *2* şi *3* şi apoi momentele pe reazeme (relaţiile (1)):

$$M_2 = -73\,400\ \text{daN cm} = -0{,}666\ Pl,$$
$$M_3 = 54\,400\ \text{daN cm} = 0{,}494\ Pl.$$

Diagrama de momente a grinzii este trasată în figura 11.16, *d*.

Verificarea grinzii *1—4* se face în secţiunea *2*, unde

$$|M|_{max} = 0{,}666\ Pl.$$

Rezultă

$$\sigma_{ef\,max} = \frac{0{,}666Pl}{\frac{\pi d_1^3}{32}} = \frac{32\cdot 0{,}666\cdot 500\cdot 220}{\pi\cdot 7{,}5^3} = 1\,770\ \text{daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

Deoarece diametrul secţiunii stîlpului şi al sîrmei arcului s-au rotunjit, este necesar să se calculeze, cu diametrele efective, reacţiunile V_2' şi V_3' ale sistemului. Se utilizează relaţiile (3)

$$V_2' = \frac{P}{2} + \frac{1}{3}2P + \frac{1}{l}(M_3 - 2M_2) = \frac{7}{6}P + \frac{Pl}{l}(0{,}494 + 2\cdot 0{,}666) =$$
$$= 1\,497\ \text{daN};$$
$$V_3' = \frac{2}{3}\cdot 2P + P + \frac{1}{l}(M_2 - 2M_3) = \frac{7}{3} + \frac{Pl}{l}(-0{,}666 - 2\cdot 0{,}494) =$$
$$= 338\ \text{daN}.$$

Valorile obţinute sînt destul de apropiate de cele calculate anterior.

Cu forţa V_3' se verifică şi efortul unitar tangenţial maxim efectiv din arcul elicoidal (relaţia (6)).

$$\tau_{max\ ef} = \frac{V_3' R}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{338 \cdot 5{,}2 \cdot 16}{\pi \cdot 1{,}3^3} = 4\,060 < \tau_a.$$

11.17. Să se dimensioneze barele grinzii cu zăbrele din figura 11.17, *a* din oţel cu $\sigma_a = 1\,200$ daN/cm². Să se calculeze apoi deplasarea pe verticală a nodului *3* şi deplasarea pe orizontală a nodului *4*. Se dau: $h = 3$ m, $a = 8$ m, $\alpha = 1{,}4$ rad, $\beta = 0{,}7$ rad, $V_3 = 400$ daN, $H_4 = 200$ daN, $H_3 = 300$ daN.

Rezolvare. Se determină mai întîi unghiurile γ şi δ care definesc direcţiile barelor *1—4* şi *2—3*

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{a - h \operatorname{cotg} \beta} = 0{,}676; \quad \gamma = 34°6';$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h}{a - h \operatorname{cotg} \alpha} = 0{,}401; \quad \delta = 21°51'.$$

În tabela 11.17 se dau lungimile barelor. S-a notat cu k factorul de proporţionalitate dintre ariile secţiunilor barelor şi cea a barei *1—2* (fig. 11.17, *a*).

Grinda este o dată static nedeterminată. Se alege ca sistem de bază cel din figura 11.17, *b*. Eforturile $N°$ în sistemul de bază datorită sarcinilor, sînt date în coloana a 4-a a tabelei 11.17. În coloana a 5-a a aceleiaşi tabele se dau valorile eforturilor n din bare datorită sarcinii unitare aplicată în bara *3—4* (fig. 11.17, *c*).

Necunoscuta static nedeterminată X este

$$X = N_{34} = -\frac{\delta_0}{\delta_1} \text{ în care}$$

$$\delta_0 = \frac{1}{EA} \Sigma \frac{N_0 n l}{k} \quad \text{şi} \quad \delta_1 = \frac{1}{EA} \Sigma \frac{n^2 l}{k}.$$

Se obţine $X = -16{,}5$ daN.

Eforturile axiale în bare s-au calculat cu relaţia $N = N° + nX$.

Pentru dimensionarea barelor s-au calculat rapoartele $|N|/k$, valoarea maximă obţinîndu-se pentru bara *1—3*. Cu această valoare se face dimensionarea şi se obţine

$$A_{nec} = \frac{|N_{1-3}|}{0{,}5\sigma_a} = 0{,}645 \text{ cm}^2.$$

Tabela 11.17

Bara	l cm	k	$N°$ daN	n	$\frac{N°nl}{k}$	$\frac{n^2 l}{k}$	nX	N daN	$\frac{\lvert N\rvert}{k}$	n'	$\frac{Nn'l}{k}$	n''	$\frac{Nn''l}{k}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1—3	304	0,5	−381	0,382	−88 500	88,7	− 6,30	−387	774	0,382	−90 000	0	0
2—4	466	0,5	−117	0,584	−63 600	318,0	− 9,64	−127	254	0	0	−0,86	102 000
1—4	536	0,8	135	−0,670	−60 600	300,0	11,00	146	183	0	0	−0,794	−77 700
2—3	805	0,8	−69,8	−1,010	70 900	1030,6	16,50	−53,3	66,6	−1,01	54 100	0	0
1—2	800	1	454,2	0,490	178 000	192,0	− 8,10	446	446	0,936	335 000	0,657	235 000
3—4	391	1,5	0	1,000	0	260,0	−16,50	− 16,5	11	0	0	0	0

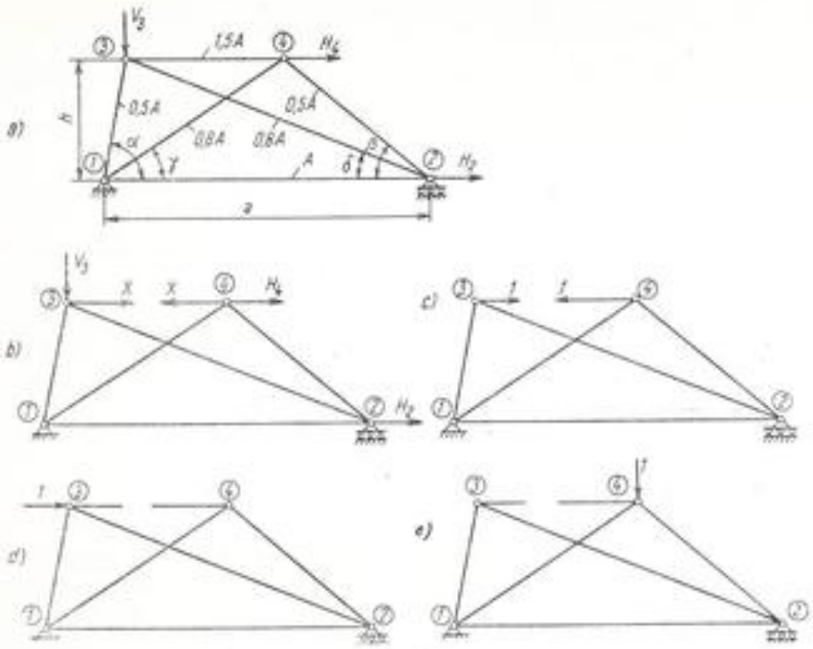


Fig. 11.17

Încărcînd succesiv sistemul de bază cu cîte o sarcină unitară aplicată pe direcţia deplasărilor h_3 şi v_4 care trebuie calculate (fig. 11.17, *d* respectiv 11.17, *e*), se determină în bare eforturile n' respectiv n'' (v. tab. 11.17).

Se obţine

$$h_3 = \frac{1}{EA}\,\Sigma\,\frac{N \cdot n' l}{k} = 0{,}221 \text{ cm},$$

$$v_3 = \frac{1}{EA}\,\Sigma\,\frac{N n'' l}{k} = 0{,}191 \text{ cm}.$$

11.18. Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare pentru cadrul din figura 11.18, *a*. Se dă momentul de inerţie al barei orizontale (rigla) $I_1 = 54$ dm^4, momentul de inerţie al stîlpului $I_2 = 16$ dm^4.

Rezolvare. Cadrul este o dată static nedeterminat. Se alege ca necunoscută static nedeterminată componenta orizontală a reacţiunii, H_1, cu sensul din figura 11.18, *a*.

Pentru aplicarea teoremei lui *Castigliano* se consideră cadrul static determinat, sub acţiunea sarcinilor q şi H. Se caută deplasarea pe direcţia lui H, derivînd expresia energiei de deformaţie în raport cu această forţă. Deplasarea fiind nulă, expresia ei se egalează cu zero, obţinînd o ecuaţie în H.

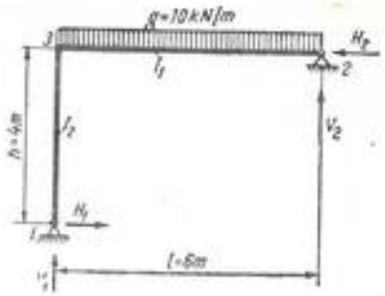


Fig. 11.18, *a*

Reacţiunile. Din proiecţia pe orizontală se vede că $H_1 = H_2 = H$. Scriind ecuaţia de momente faţă de punctul *2* se obţine (v. tabela 11.18):

$$V_1 = \frac{ql}{2} + H\frac{h}{l}\,; \quad V_2 = \frac{ql}{2} - H\frac{h}{l}\,,$$

$$\delta_H = \frac{Hh^3}{3EI_2} - \frac{1}{EI_1}\left(\frac{qhl^3}{24} - \frac{Hh^2 l}{3}\right) = 0,$$

$$H\left(\frac{h^3}{3I_2} + \frac{h^2 l}{3I_1}\right) = \frac{qhl^3}{24I_1},$$

$$H = \frac{\dfrac{qhl^3}{8I_1}}{h^2\left(\dfrac{h}{I_2} + \dfrac{l}{I_1}\right)} = \frac{ql^3}{8hI_1\left(\dfrac{h}{I_2} + \dfrac{l}{I_1}\right)}$$

Pentru construirea diagramei momentelor încovoietoare, se stabileşte valoarea momentelor în punctele caracteristice ale cadrului, şi anume în punctul *3* şi în punctul de moment maxim:

$$M_3 = -Hh = -\frac{ql^3}{8I_1\left(\dfrac{h}{I_2} + \dfrac{l}{I_1}\right)}\,.$$

Tabela 11.18

Regiuni	M	$\frac{\partial M}{\partial H}$	$\frac{1}{EI}\int M\frac{\partial M}{\partial H}\,ds$
1–3	$-Hy$	$-y$	$\frac{1}{EI_2}\int_0^h Hy^2 dy = \frac{Hh^3}{3EI_2}$
2–3	$\left(\frac{ql}{2} - \frac{Hh}{l}\right)x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{Hh}{l}x - \frac{qx^2}{2}$	$-\frac{h}{l}x$	$-\frac{1}{EI_1}\int_0^l\left(\frac{qlx}{2} - \frac{Hh}{l}x - \frac{qx^2}{2}\right)\frac{h}{l}x\,dx = -\frac{1}{EI_1}\left(\frac{qhl^3}{6} - \frac{Hh^2 l}{3} - \frac{qhl^3}{8}\right) = -\frac{1}{EI_1}\left(\frac{qhl^3}{24} - \frac{Hh^2 l}{3}\right)$

Pentru a găsi punctul de moment maxim, se consideră rigla cadrului *3—2* simplu rezemată încărcată cu sarcina q pe deschiderea l şi cu momentul M_3 pe reazemul *3* (Fig. 11.18, *b*). Se determină pentru această grindă reacţiunile şi expresia forţei tăietoare într-o secţiune oarecare x, care, egalată cu zero, dă o ecuaţie din care se scoate abscisa punctului de moment maxim.

$$V_3 = \frac{ql}{2} + \frac{M_3}{l}.$$

$$T_x = V_3 - qx_0 = 0, \quad x_0 = \frac{V_3}{q} = \frac{l}{2} + \frac{M_3}{ql}.$$

Rezultă:

$$M_{max} = V_1 x_0 - Hh - \frac{qx_0^2}{2}.$$

Aplicaţie numerică. $H = \dfrac{10 \cdot 6^2 \cdot 10^6}{8 \cdot 400 \cdot 54 \cdot 10^6 \left(\dfrac{400}{16 \cdot 10^6} + \dfrac{600}{54 \cdot 10^6}\right)} = 347$ daN.

$$M_3 = -Hh = -347 \cdot 4 = -1\,388 \text{ daNm};$$

$$x_0 = \frac{l}{2} + \frac{M_3}{ql} = \frac{6}{2} + \frac{13{,}88}{10 \cdot 6} = 3 + 0{,}23 = 3{,}23\text{m};$$

$$M_{max} = V_1 x_0 - Hh - \frac{qx_0^2}{2};$$

$$V_1 = \frac{ql}{2} + H\frac{h}{l} = 30 + 3{,}47\,\frac{4}{6} = 32{,}31 \text{ kN},$$

$$M_{max} = 32{,}31 \cdot 3{,}23 - 13{,}88 - \frac{10 \cdot 3{,}23^2}{2} = 38{,}62 \text{ kNm}.$$

Diagrama momentelor este reprezentată în figura 11.18, *c*.

11.19. Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare pentru cadrul din figura 11.19, *a* dacă momentul de inerţie al riglei este de trei ori mai mare decît momentul de inerţie al stîlpilor. Se dă $q = 10$ kN/m, $l = 6$ m, $h = 4$ m.

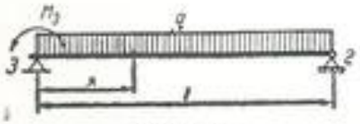


Fig. 11.18, *b*

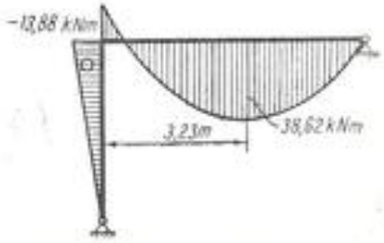


Fig. 11.18, *c*

Rezolvare. Cadrul este o dată static nedeterminat. Se alege ca necunoscută, componenta orizontală a reacţiunii H din articulaţia *2*. Această articulaţie se transformă astfel într-un reazem simplu şi cadrul devine un sistem static determinat.

Aplicînd relaţia (11.12), din care, pentru cazul de faţă, rămîn numai primul şi ultimul termen din prima ecuaţie, rezultă:

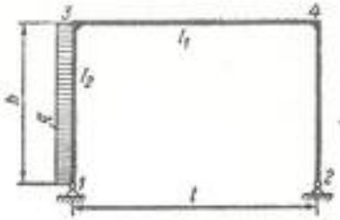


Fig. 11.19, *a*

$$\delta_{11}H + \delta_{10} = 0; \quad H = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}};$$

$$H = -\frac{\int \frac{M^\circ \cdot m}{EI}\,ds}{\int \frac{m^2}{EI}\,ds}.$$

Pentru calculul numărătorului şi al numitorului se folosesc cele două scheme ajutătoare (Fig. 11.19, *b* şi 11.19, *c*) unde se arată diagramele de momente m şi M°.

Diagrama de momente m (Fig. 11.19, *b*) se referă la cazul cînd asupra cadrului acţionează o forţă orizontală $H = 1$ în reazemul *2*.

Reacţiunile vor fi $V_1 = V_2 = 0$, $H_1 = 1$, iar momentul încovoietor va avea expresiile:

— pentru stîlpii *1—3* şi *2—4*: $M = -1 \cdot y = -y$;

— pentru rigla *3—4*: $M = -1 \cdot h = -h$.

Diagrama de momente M° din figura 11.19, *c* corespunde cazului cînd asupra cadrului acţionează încărcarea q uniform distribuită pe stîlp.

Din ecuaţia de proiecţii pe orizontală, pentru cadrul considerat static determinat (Fig. 11.19, *c*) rezultă $H_1 = qh$.

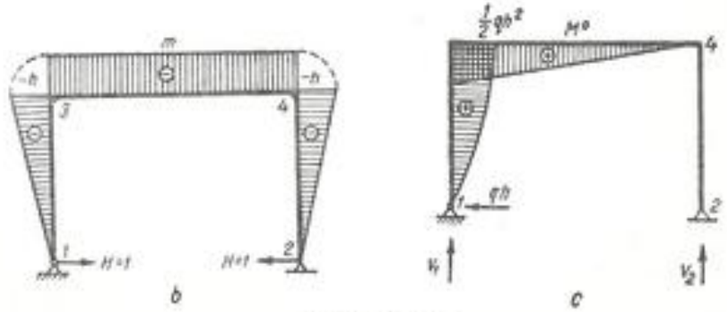


Fig. 11.19, *b*, *c*

Scriind momentul față de reazemul *2*, se obține:

$$V_1 l + \frac{qh^2}{2} = 0,\ V_1 = -\frac{qh^2}{2l} = -V_2.$$

Momente. Momentul într-o secțiune oarecare este:

— pentru stîlpul *1—3*: $M_y = qh \cdot y - \frac{qy^2}{2}$;

— pentru rigla *3—4*: $M_x = \frac{qh^2}{2} - \frac{qh^2}{2l} x$;

— pentru stîlpul *2—4*: $M_y = 0$.

Rezultă diagrama de momente din figura 11.19, *c*, momentele în punctele *4* și *2* fiind nule.

Pentru a putea aplica metoda lui *Vereșceaghin*, trebuie să se determine ordonatele pe diagrama *m* (Fig. 11.19, *b*) corespunzătoare centrelor de greutate ale suprafețelor M° (Fig. 11.19, *c*). Aceste ordonate sînt:

pentru suprafața parabolică: $\eta_1 = -\frac{5}{8} h$;

pentru suprafața triunghiulară: $\eta_1 = -h$.

Notînd numărătorul cu litera δ_{10}, rezultă:

$$\delta_{10} = -\frac{2}{3} h \frac{qh^2}{2} \cdot \frac{5}{8} \frac{h}{EI_2} - \frac{1}{2} \frac{2h^2}{2} l \cdot \frac{h}{EI_1} = -\left(\frac{5}{24 I_2} qh^4 + \frac{1}{4I_1} qh^3 l\right) \frac{1}{E}.$$

Notînd numitorul cu δ_{11} rezultă:

$$\delta_{11} = 2 \frac{h^2}{2} \cdot \frac{2}{3} h \cdot \frac{1}{EI_2} + hl \cdot h \frac{1}{EI_1} = \frac{2h^3}{3EI_2} + \frac{h^2 l}{EI_1};$$

$$H = -\frac{-\left(\frac{5}{24 I_2} qh^4 + \frac{1}{4I_1} qh^3 l\right)}{\frac{2}{3} \frac{h^3}{I_2} + \frac{h^2 l}{I_1}};$$

$$H = \frac{\left(\frac{5h^3}{24I_2} + \frac{hl}{4I_1}\right) q}{\frac{2h}{3I_2} + \frac{l}{I_1}};$$

dar:

$$I_1 = 3I_2,$$

deci:

$$H = \frac{\left(\frac{5h^3}{24I_2} + \frac{hl}{12I_2}\right) q}{\frac{2h}{3I_2} + \frac{l}{3I_2}} = q \frac{\left(\frac{5}{2} h^3 + hl\right)}{4(2h + l)}.$$

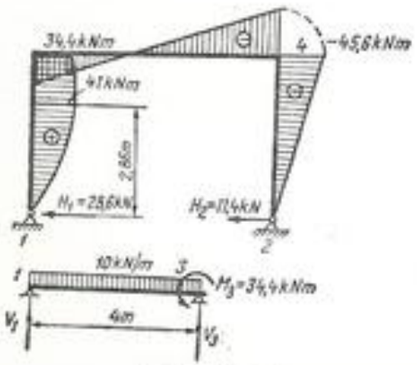


Fig. 11.19, *f*, *d*

Aplicație numerică. $H = 10 \frac{\frac{5}{2} \cdot 16 + 24}{4(8 + 6)} = 11{,}4$ kN.

Reacțiunile orizontale sînt:

$$H_1 = H - gh = 11{,}4 - 40 = -28{,}6 \text{ kN},$$

deci forța este îndreptată spre exterior;

$$H_2 = H = 11{,}4 \text{ kN}.$$

Momentele la colțuri sînt:

$$M_3 = +28{,}6 \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = +34{,}4 \text{ kNm};$$

$$M_4 = -11{,}4 \cdot 4 = -45{,}6 \text{ kNm}.$$

Pentru a găsi poziția momentului maxim, precum și valoarea sa, pentru stîlpul *1—3* se consideră grinda simplu rezemată *1—3*, acționată de sarcina *q* și momentul M_3, pentru care se anulează expresia forței tăietoare.

Reacțiunea V_1 este dată de relația:

$$4V_1 - 10 \cdot 4 \cdot 2 - 34{,}4 = 0,$$

$$V_1 = 28{,}6 \text{ kN} (= H_1),$$

$$T_y = 28{,}6 - 10 \cdot y = 0; \quad y = 2{,}86 \text{ m},$$

$$M_{max} = 28{,}6 \cdot 2{,}86 - 10 \frac{2{,}86^2}{2} = \frac{10 \cdot 2{,}86^2}{2} = 41 \text{ kNm}.$$

Diagrama momentelor este reprezentată în figura 11.19, *d*.

11.20. Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare pentru un cadru încastrat la ambele capete (Fig. 11.20, *a*), încărcat cu o sarcină uniform distribuită, știind că momentul de inerție este constant pe întreg cadrul. Se dau: $q = 1$ kN/m; $l = 6$ m; $h = 4$ m.

Rezolvare. Cadrul fiind încărcat simetric, reacțiunile verticale sînt egale:

$$V_1 = V_2 = \frac{ql}{2}.$$

Cadrul rămîne astfel numai de două ori static nedeterminat, necunoscutele fiind M_0 și $H = H_1 = H_2$.

Se aplică metoda lui *Castigliano*, așezînd calculele ca în tabela 11.20.

Tabela 11.20

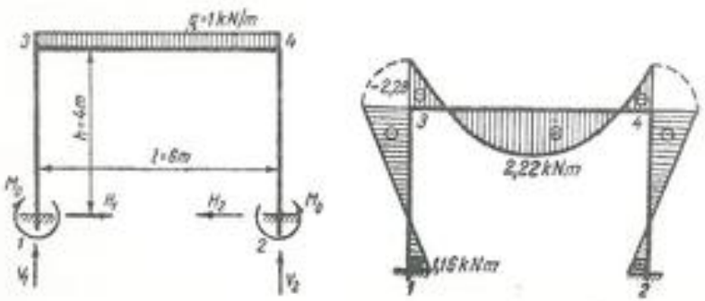
Regiuni	M	$\frac{\partial M}{\partial H}$	$\frac{\partial M}{\partial M_0}$	$\frac{1}{EI}\int M\frac{\partial M}{\partial H}\,ds$	$\frac{1}{EI}\int M\frac{\partial M}{\partial M_0}\,ds$
1 – 3 şi 2 – 4	$M_0 - Hy$	$-y$	1	$\frac{-2}{EI}\int_0^h (M_0 - Hy)y\,dy = -\frac{2}{EI}\left\lvert\frac{M_0y^2}{2} - \frac{Hy^3}{3}\right\rvert_0^h = -\frac{2h^2}{EI}\left(\frac{M_0}{2} - \frac{Hh}{3}\right)$	$\frac{2}{EI}\int_0^h (M_0 - Hy)\,dy = \frac{2}{EI}\left(M_0h - \frac{Hh^2}{2}\right)$
3 – 4	$M_0 - Hh + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$	$-h$	1	$\frac{1}{EI}\left(-M_0hl + Hh^2l - \frac{ql}{2}\frac{l^2}{2}h + \frac{q}{2}\frac{l^3}{3}h\right)$	$\frac{1}{EI}\left(M_0l - Hhl + \frac{ql}{2}\frac{l^2}{2} - \frac{ql^3}{6}\right)$

Deplasarea pe orizontală pe direcţia lui H şi rotirea reazemului fiind ambele nule, rezultă două ecuaţii cu două necunoscute:

$$-\frac{2h^2}{EI}\left(\frac{M_0}{2} - \frac{Hh}{3}\right) + \frac{1}{EI}\left(-M_0hl + Hh^2l - \frac{ql^3}{4}h + \frac{ql^3}{6}h\right) = 0;$$

$$\frac{2}{EI}\left(M_0h - \frac{Hh^2}{2}\right) + \frac{1}{EI}\left(M_0l - Hhl - \frac{ql^3}{4} - \frac{ql^3}{6}\right) = 0.$$

$$\begin{cases} -M_0h^2 + \frac{2}{3}h^3H - M_0hl + Hh^2l - \frac{ql^3}{4}h + \frac{ql^3h}{6} = 0; \\ 2M_0h - Hh^2 + M_0l - Hhl + \frac{ql^3}{4} - \frac{ql}{6} = 0. \end{cases}$$



a Fig. 11.20 b

Simplificînd prima ecuaţie cu h şi grupînd termenii, se obţine:

$$Hh\left(\frac{2}{3}h + l\right) - M_0(l + h) = \frac{ql^3}{12},$$

$$-Hh(h + l) + M_0(2h + l) = -\frac{ql^3}{12}.$$

Înlocuind valorile numerice se obţine:

$$\begin{cases} 34{,}5\,H - 10M_0 = 18 \\ -40H + 14M_0 = -18 \end{cases}$$

$$H = 0{,}86 \text{ kN}; \quad M_0 = 1{,}16 \text{ kNm}.$$

Momentele la colţuri sînt:

$$M_3 = M_4 = M_0 - Hh = +1{,}16 - 0{,}86 \cdot 4 = -2{,}28 \text{ kNm}.$$

Momentul maxim la mijlocul riglei este:

$$\frac{ql^2}{8} + M_3 = \frac{1 \cdot 6^2}{8} - 2{,}31 = 2{,}22 \text{ kNm}.$$

Diagrama momentelor este reprezentată în figura 11.20, *b*.

11.21. Să se calculeze săgeata grinzii din figura 11.21, *a* la mijlocul deschiderii. Firele au secţiune constantă $A = 2$ cm², iar grinda este metalică avînd secţiunea un profil I 20.

Rezolvare. Sistemul este o dată static nedeterminat. Se determină în primul rînd valoarea reacţiunii X din firul central.

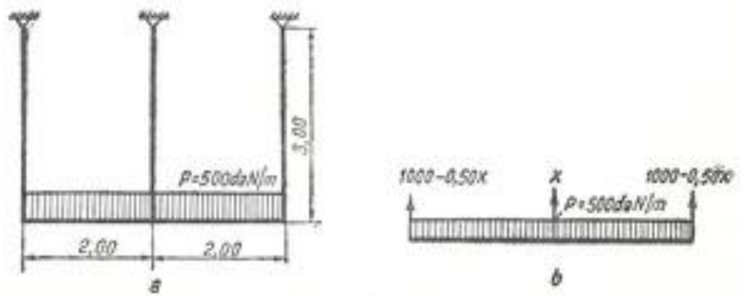


Fig. 11.21

Din ecuaţia de proiecţii pe verticală rezultă valorile reacţiunilor din firele marginale:

$$500 \cdot \frac{4,00}{2} - \frac{X}{2} = 1\,000 - 0,50\ X.$$

Momentul într-un punct oarecare ($0 \leqslant x \leqslant 2,00$) este:

$$M = (1\,000 - 0,50X)x - \frac{500x^2}{2}.$$

Efortul în cablul marginal este:

$$N = 1\,000 - 0,50\ X,$$

iar în cel central:

$$N = X.$$

Aplicînd metoda *Castigliano* şi ţinînd seama şi de efectul forţei axiale se obţine:

$$L = \frac{1}{2}\int \frac{M^2 dx}{EI} + \frac{1}{2}\int \frac{N^2}{EA}\, dx,$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \int M \frac{\partial M}{\partial X} \cdot \frac{dx}{EI} + \int N \frac{\partial N}{\partial X} \cdot \frac{dx}{EA} = 0,$$

$$I = 2\,140 \text{ cm}^4,$$

$$A = 2 \text{ cm}^2,$$

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -\frac{x}{2}, \quad \frac{\partial N}{\partial X} = -\frac{1}{2} \text{ (pentru firele marginale)},$$

$$\frac{\partial N}{\partial X} = 1 \text{ (pentru firul central)},$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 2\left\{-\int_0^{2,00}\left[\left(1\,000 - \frac{X}{2}\right)x - \frac{500x^2}{2}\right] \cdot \frac{x}{2}\frac{dx}{EI} - \int_0^{3,00}\left(1\,000 - \frac{X}{2}\right)\frac{dx}{EA}\right\} + \int_0^{3,00}\frac{X\,dx}{EA} = 0.$$

Simplificînd cu E şi înlocuind pe I şi A cu valorile lor, se obţine după integrare ecuaţia:

$$8,43\ X = 9\,350 \text{ daN},$$

de unde:

$$X = \frac{9\,350}{8,43} = 1\,120 \text{ daN}.$$

Săgeata f a grinzii în mijloc va fi egală cu diferenţa între alungirea firului central şi a celui marginal.

Alungirea firului central $\Delta l_1 = \frac{Xl}{EA} = \frac{1\,120 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2} = 0,08$ cm.

Alungirea firului marginal $\Delta l_2 = \frac{(1\,000 - 0,50X)l}{EA} = \frac{440 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2} = 0,032$ cm.

Săgeata grinzii: $f = \Delta l_1 - \Delta l_2 = 0,080 - 0,032 = 0,048$ cm $\cong 0,5$ mm.

11.22. Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare pentru cadrul din figura 11.22, *a*, la o variaţie de temperatură de 50°C, dacă secţiunile barelor sînt de 30 × 40 cm² (stîlpi) şi de 30 × 80 cm² (riglă); cadrul este din beton armat ($E = 240\,000$ daN/cm²), coeficientul de dilatare liniară fiind $\alpha = 10^{-5}$.

Rezolvare. Se face sistemul static determinat, înlocuind articulaţia *1* cu un reazem simplu (Fig. 11.22, *b*).

Ecuaţia de condiţie este

$$\delta_{11}X_1^t + \delta_{10}^t = 0, \text{ de unde } X_1^t = -\frac{\delta_1^t}{\delta_{11}},$$

unde s-a notat cu $X_1^t = H$ necunoscuta static nedeterminată şi cu δ_{10}^t dilatarea liniară a riglei

$$\delta_{10}^t = -\alpha t l = -10^{-5} \cdot 50 \cdot 6,00 = -300 \cdot 10^{-5} \text{ m},$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI_1}\left(\frac{1}{2} \cdot 4,00 \cdot 4,00\right)\frac{2}{3} \cdot 4,00 + \frac{1}{EI_2}(4,00 \cdot 6,00)4,00,$$

unde:

$$I_1 = \frac{3 \cdot 4^3}{12} \cdot 10^{-4} = 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4; \quad I_2 = \frac{3 \cdot 8^3}{12} \cdot 10^{-4} = 128 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$E = 2,4 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2; \quad \delta_{11} = 1,43 \cdot 10^{-2},$$

$$X_1^t = H = -\frac{\delta_1^t}{\delta_{11}} = 0,21 \text{ kN}; \quad M_2 = M_4 = 0,21 \cdot 4,00 = 0,84 \text{ kNm}.$$

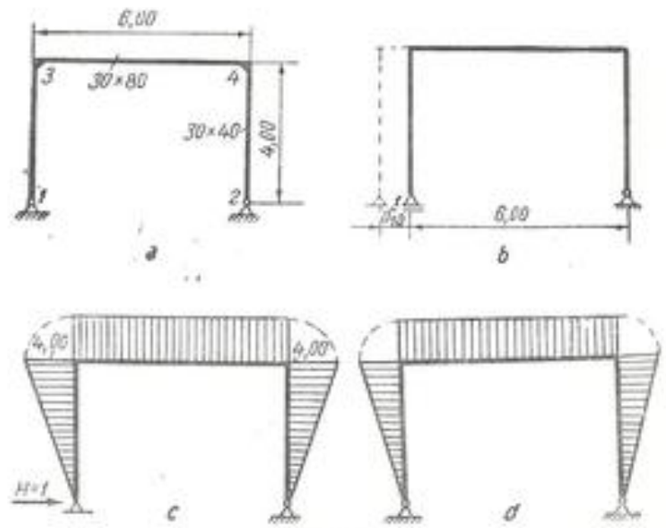


Fig. 11.22

11.23. Să se determine eforturile N, T, M în barele sistemului din figura 11.23.

Rezolvare. Sistemul, reprezentat printr-un contur închis, este de trei ori static nedeterminat. Datorită simetriei gradul de nedeterminare se poate reduce cu o unitate. Necunoscutele static nedeterminate X_1 şi X_2 se pun în evidenţă prin secţionarea sistemului (Fig. 11.23, *a*) în punctele *1* şi *4*. Eforturile introduse în aceste secţiuni, amplasate simetric, sînt egale.

Sistemul de ecuaţii (11.12) devine:

$$\begin{aligned} \delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} &= 0 \\ \delta_{20} + X_1\delta_{12} + X_2\delta_{22} &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Pentru calculul coeficienţilor se consideră sistemele auxiliare prezentate în figurile 11.23 *b*, *c* şi *d*. Sistemul fiind simetric, este suficient să se scrie expresiile momentelor încovoietoare pentru porţiunile *1—2* şi *1—3*:

$$M_{12}^0(\theta) = \frac{P}{2}R(1 - \cos\theta)$$

$$M_{13}^0(x) = -\frac{P}{2}x$$

$$m_{12}^{(1)}(\theta) = -R\sin\theta$$

$$m_{13}^{(1)}(x) = 0$$

$$m_{12}^{(2)}(\theta) = -1$$

$$m_{13}^{(2)}(x) = 1.$$

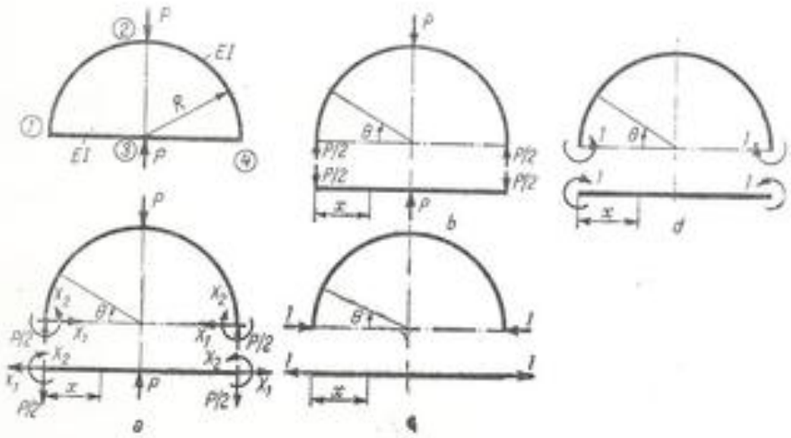


Fig. 11.23, *a*, *b*, *c*, *d*

Săgeţile $\delta_{10}, \ldots, \delta_{22}$ se obţin prin integrare:

$$EI\delta_{10} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{12}^0 m_{12}^{(1)} R\,d\theta + 2\int_0^R M_{13}^0 m_{13}^{(1)}\,dx =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} PR(1 - \cos\theta)R\sin\theta\,R\,d\theta = -\frac{PR^3}{2}$$

$$EI\delta_{20} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{12}^0 m_{12}^{(2)} R\,d\theta + 2\int_0^R M_{13}^0 m_{13}^{(2)}\,dx =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} PR(1 - \cos\theta)R\,d\theta - \int_0^R Px\,dx = -\frac{PR^2}{2}(\pi - 1)$$

$$EI\delta_{11} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [m_{12}^{(1)}]^2 R\,d\theta + 2\int_0^R [m_{13}^{(1)}]^2 dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin^2\theta R\,d\theta = \frac{\pi R^3}{2}$$

$$EI\delta_{12} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} m_{12}^{(1)} m_{12}^{(2)} R\,d\theta + 2\int_0^R m_{13}^{(1)} m_{13}^{(2)}\,dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin\theta\,R\,d\theta = 2R^2$$

$$EI\delta_{22} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [m_{12}^{(2)}]^2 R\,d\theta + 2\int_0^R [m_{13}^{(2)}]^2\,dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\,d\theta + 2\int_0^R dx = R(\pi + 2).$$

Sistemul (1) devine:

$$-\frac{PR^3}{2} + X_1\frac{\pi R^3}{2} + X_2 \cdot 2R^2 = 0$$

$$-\frac{PR^2}{2}(\pi - 1) + X_1 \cdot 2R^2 + X_2 \cdot R(\pi + 2) = 0.$$

Soluțiile acestui sistem sînt:

$$X_1 = 0{,}105\ P$$

$$X_2 = 0{,}167\ PR.$$

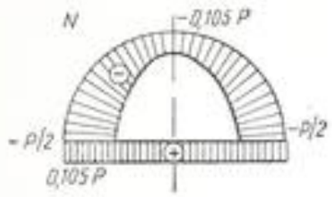
Eforturile în barele sistemului static nedeterminat se obțin cu ajutorul sistemului de bază din figura 11.23, *a*:

$$N_{12}(\theta) = -\frac{P}{2}\cos\theta - 0{,}105\ P\sin\theta$$

$$T_{12}(\theta) = \frac{P}{2}\sin\theta - 0{,}105\ P\cos\theta$$

$$M_{12}(\theta) = \frac{P}{2}R(1-\cos\theta) - 0{,}105\ PR\sin\theta - 0{,}167\ PR.$$

Pe intervalul *1—2* forța tăietoare se anulează pentru $\operatorname{tg}\theta_0 = 0{,}21$, $\theta_0 = 11°48'$. Momentul are în această secțiune valoarea: $M_{max} = -0{,}176\ PR$.



e)

$$N_{12}(x) = 0{,}105\ P$$

$$T_{12}(x) = \frac{P}{2}$$

$$M_{12}(x) = \frac{P}{2}x - 0{,}167\ PR.$$

Diagramele corespunzătoare sînt reprezentate în figurile 11.23, *e*, *f*, *g*.

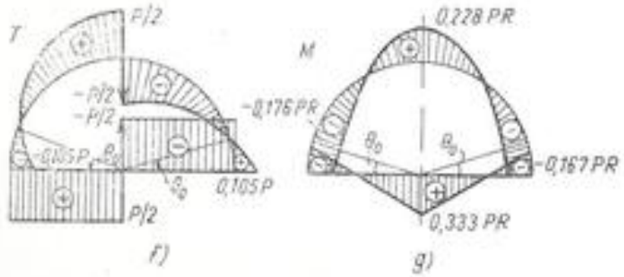


Fig. 11.23, *e*, *f*, *g*

11.24. Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare pentru cadrul din figura 11.24, *a*, cînd articulația *1* se tasează cu 0,5 cm. Secțiunea stîlpului este 30 × 40 cm², a riglei 30 × 60 cm², iar modulul de elasticitate al betonului $E = 240\,000$ daN/cm².

Rezolvare. Sistemul fiind o dată static nedeterminat, se face static determinat prin introducerea unei articulații în nodul *2* (Fig. 11.24, *b*), în care apare momentul necunoscut X_1, care se determină din relația:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}.$$

În cazul de față δ_{10} este chiar rotația grinzii din cauza tasării reazemului (Fig. 11.24, *c*) adică:

$$\delta_{10} = \frac{0{,}5}{500} = 0{,}001 = 10^{-3}.$$

Momentele de inerție sînt:

Stîlp: $I = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16$ dm⁴. Rigla: $I = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54$ dm⁴.

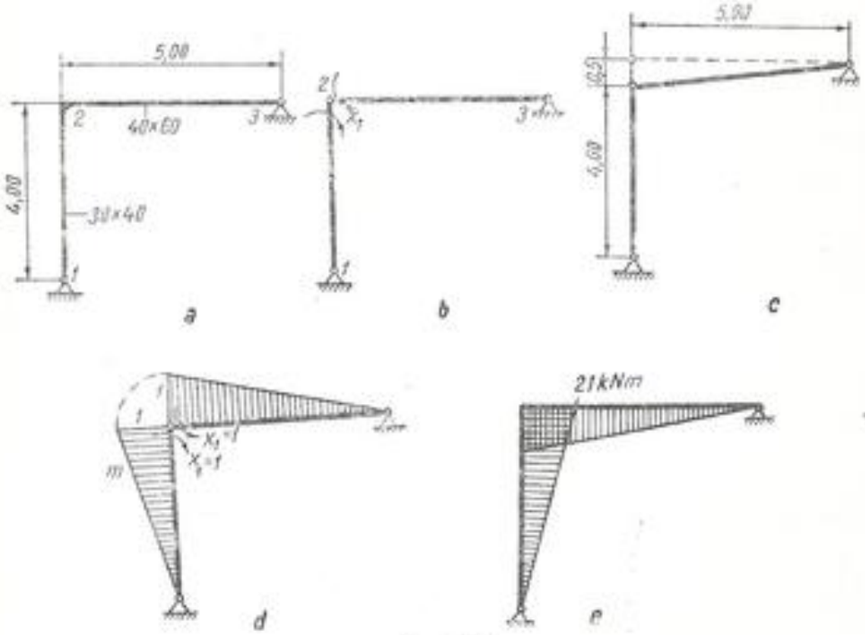


Fig. 11.24

Diagrama de momente datorită încărcării $X = 1$ este arătată în figura 11.24, *d*.

Rezultă:

$$E\delta_{11} = \left(\frac{1 \cdot 5{,}00}{2} \cdot\right) \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5{,}4 \cdot 10^{-3}} + \left(\frac{1 \cdot 4{,}00}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-3}},$$

$$E\delta_{11} = 11{,}43 \cdot 10^2, \quad \delta_{11} = \frac{11{,}43 \cdot 10^5}{2{,}4 \cdot 10^7} = 4{,}78 \cdot 10^{-5},$$

$$X_1 = -\frac{10^{-3}}{4{,}78 \cdot 10^{-5}} \cong -21{,}0 \text{ kNm}.$$

Rezultă diagrama de momente din figura 11.24, *e*.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

11.25. Să se calculeze reacţiunile, momentul din încastrare şi să se construiască diagramele T, M la grinda din figura 11.25, dacă reazemul 2 este aşezat pe un teren elastic şi se deniveleazǎ proporţional cu sarcina, adică $f_2 = \frac{1}{k} V_2$. Aplicaţie numerică pentru: $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm², $I = 5\,000$ cm⁴, $l = 6$ m, $p = 10$ kN/m, $k = \frac{24EI}{p}$.

Răspuns: $V_1 = 4\,000$ daN, $V_2 = 2\,000$ daN, $M_1 = -6\,000$ daNm.

11.26. Să se calculeze momentele M_1, M_2, reacţiunile V_1, V_2 şi să se construiască diagramele T, M pentru grinda din figura 11.26.

Răspuns: Se găsesc:

$$M_1 = -\frac{qc}{l^2}\left[ab^2 - \frac{c^2}{12}(2b - a)\right],$$

$$M_2 = -\frac{qc}{l^2}\left[a^2b - \frac{c^2}{12}(2a - b)\right],$$

$$V_1 = \frac{qcb}{l} + \frac{M_2 - M_1}{l},$$

$$V_2 = \frac{qca}{l} - \frac{M_2 - M_1}{l}.$$

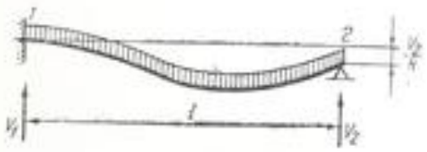


Fig. 11.25

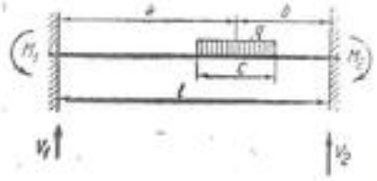


Fig. 11.26

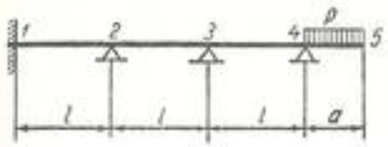


Fig. 11.28

11.27. Pentru grinda din problema 11.6, se cere să se determine:

a) unghiul φ_2 al fibrei medii deformate pe reazemul 2;

b) secţiunea x_1 unde se produce o săgeată $\frac{1}{2} f_2$.

Indicaţie. Se folosesc formulele (3), (4) de la problema 11.6 şi rezultă:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{3f_2}{2l}.$$

$$x_1 = 0{,}65\, l.$$

11.28. Să se determine momentele pe reazeme, reacţiunile şi să se construiască diagramele T, M, pentru grinda din figura 11.28.

Răspuns:

$$M_1 = \frac{pa^2}{52}, \qquad V_1 = -\frac{3pa^2}{52l},$$

$$M_2 = -\frac{pa^2}{26}, \qquad V_2 = \frac{12pa^2}{13l},$$

$$M_3 = \frac{7pa^2}{52}, \qquad V_3 = -\frac{42pa^2}{26l},$$

$$M_4 = -\frac{pa^2}{2}, \qquad V_4 = pa + \frac{33pa^2}{52l}.$$

11.29. Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare pentru cadrul din figura 11.29, *a*, dacă raportul dintre momentul de inerţie al riglei şi momentul de inerţie al stîlpului este 3, iar deschiderea l a grinzii este de două ori cît înălţimea stîlpului.

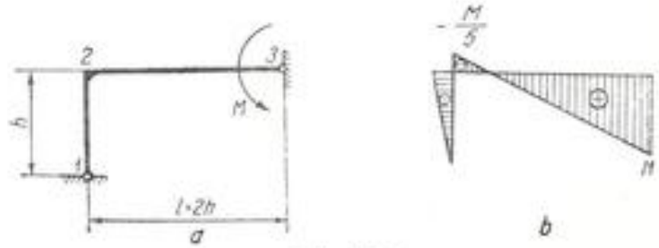


Fig. 11.29

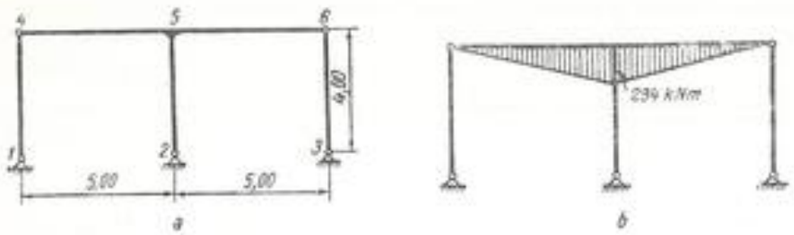


Fig. 11.30

Răspuns: Se găsesc: $M_3 = M$, $M_2 = -\frac{M}{5}$, $M_1 = 0$.

Diagrama este desenată în figura 11.29, *b*.

11.30. Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare din barele cadrului din figura 11.30, *a*, atunci cînd articulația 2 se tasează cu 0,8 cm pe verticală, dacă se cunosc: secțiunea stîlpilor: 30 × 40 cm²; secțiunea riglelor: 30 × 80 cm²; $E = 240\,000$ daN/cm². *Răspuns:* $M_5 = 294$ kNm. Diagrama momentelor încovoietoare este desenată în figura 11.30, *b*.

11.31. Un cadru cu două articulații suportă sarcini triunghiulare în lungul stîlpilor datorită presiunii apei din două rezervoare (Fig. 11.31, *a*).

Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare:

a) cînd ambele rezervoare sînt pline;

b) cînd unul dintre rezervoare este plin și celălalt este gol.

Se dau:

$$p_0 = 60 \text{ kN/m}.$$

Secțiunea stîlpilor: 30 × 60 cm²;

Secțiunea riglei: 30 × 80 cm².

Răspuns: Pentru cazul *a)* a se vedea figura 11.31, *b*, pentru cazul *b)* a se vedea figura 11.31, *c*.

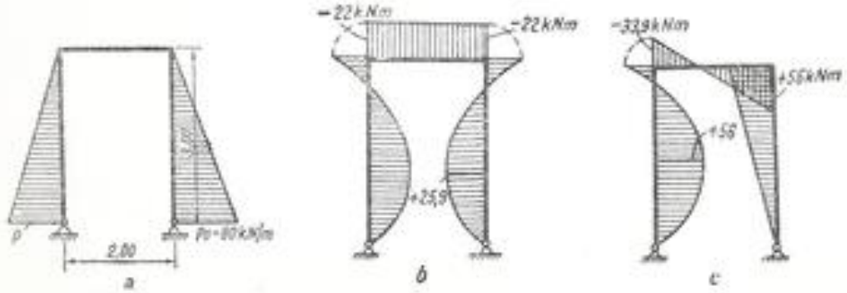


Fig. 11.31

CAPITOLUL 12

STABILITATEA ECHILIBRULUI ELASTIC AL BARELOR DREPTE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Sarcina critică de flambaj a unei bare drepte solicitată la compresiune, calculată cu formula lui *Euler*, are expresia

$$P_f = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_f^2}. \tag{12.1}$$

Lungimea de flambaj l_f este:

— $l_f = 2l$ la bara încastrată la un capăt și liberă la celălalt;

— $l_f = l$ la bara articulată la ambele capete;

— $l_f \approx 07\ l$ la bara încastrată la un capăt și articulată la celălalt;

— $l_f = 0{,}5\,l$ la bara încastrată la ambele capete.

2. Efortul unitar critic de flambaj, calculat cu formula lui *Euler*, este:

$$\sigma_f = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{12.2}$$

unde λ este *coeficientul de zveltețe* și are expresia:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}}, \tag{12.3}$$

iar raza minimă de inerție este:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}. \tag{12.4}$$

3. Forța reală cu care se încarcă o bară ce ar putea fi în pericol de flambaj, are expresia:

$$P = \frac{P_f}{c} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{c l_f^2}. \tag{12.5}$$

4. Formulele lui *Euler* se aplică numai dacă λ este superior valorii λ_0 arătată în tabela 12.1. Cînd λ este inferior acestei valori, se folosesc formulele *Tetmajer-Iasinski* din tabela 12.1.

Tabela 12.1

Materialul	λ_0	Formula *Tetmajer-Iasinski* (daN/cm²)
OL 37	105	$\sigma_f = 3\,040 - 11{,}2\lambda$
OL 48	89	$\sigma_f = 3\,285 - 6{,}1\ \lambda$
Oţel cu 5% Ni	86	$\sigma_f = 4\,610 - 22{,}8\ \lambda$
Lemn	100	$\sigma_f = 287 - 1{,}9\ \lambda$
Fontă	80	$\sigma_f = 7\,610 - 118\ \lambda + 0{,}52\lambda^2$

Cu aceste formule se calculează efortul unitar critic de flambaj σ_f, apoi se calculează efortul unitar de compresiune:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{12.6}$$

şi se obţine coeficientul de siguranţă:

$$c = \frac{\sigma_f}{\sigma}. \tag{12.7}$$

Valoarea σ_f dată de formulele *Tetmajer-Iasinski* se limitează la valoarea limitei de curgere σ_c, dacă formula dă valori superioare acesteia.

5. Pentru construcţii metalice se dau o serie de prescripţii speciale de calcul în STAS 763-66.

Efortul capabil al unei bare simple comprimate este dat de relaţia:

$$P = \varphi \sigma_a A, \tag{12.8}$$

în care coeficientul φ, funcţie de λ, este dat în *anexa 12* la sfîrşitul volumului.

Dimensionarea la flambaj este dată de aceeaşi formulă, pusă sub forma

$$A_{nec} = \frac{P}{\varphi \sigma_a}. \tag{12.9}$$

Aceeaşi formulă serveşte la verificare:

$$\sigma_\varphi = \frac{P}{\varphi A_d} \tag{12.10}$$

unde σ_φ este efortul unitar de flambaj, care trebuie să fie egal sau inferior rezistenţei admisibile.

6. Momentul încovoietor critic de flambaj în domeniul elastic pentru o bară în consolă are expresia:

$$M_f = \frac{\pi}{2l}\sqrt{EI_y \cdot GI_d}. \tag{12.11}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

12.1. Să se calculeze efortul unitar critic de flambaj care se dezvoltă într-o bară de oţel de secţiune 25 × 50 mm², solicitată la compresiune de o forţă $P = 10$ kN, dacă ea este articulată la ambele capete şi are lungimea $l = 1{,}00$ m.

Rezolvare. Se aplică formulele (12.2), (12.3) şi (12.4):

$$l_f = l = 100 \text{ cm}; \quad I_{min} = \frac{5 \cdot 2{,}5^3}{12} = 6{,}51 \text{ cm}^4;$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{6{,}51}{2{,}5 \cdot 5}} = 0{,}72 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{100}{0{,}72} = 139.$$

Cum $\lambda > \lambda_0$, formula lui *Euler* este aplicabilă:

$$\sigma_f = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3{,}14^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6}{139^2} = 1\,070 \text{ daN/cm}^2.$$

12.2. O bară de oţel are secţiunea circulară cu $d = 5$ cm, materialul avînd limita de proporţionalitate $\sigma_p = 2\,100$ daN/cm². Să se calculeze ce lungime poate avea bara, ca ea să se afle la limita de aplicabilitate a formulei lui *Euler*. Bara se consideră articulată la ambele capete.

Rezolvare. În formula (12.2), luînd $\sigma_f = \sigma_p$, şi $\lambda = \lambda_0$ se află

$$\lambda_0^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_p} = \frac{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6}{2\,100} = 9\,860; \ \lambda_0 = 99{,}3 \approx 100 = \frac{l_f}{i_{min}}.$$

La secţiunea circulară:

$$i_{min} = i = \frac{d}{4} = \frac{5}{4} \text{ cm}; \quad l_f = \lambda_0 i_{min} = 100 \cdot \frac{5}{4} = 125 \text{ cm} = l.$$

12.3. Să se calculeze sarcina critică de flambaj pentru un stîlp de fontă de secţiune inelară, avînd diametrul exterior $D = 70$ mm şi diametrul interior $d = 64$ mm. Stîlpul este încastrat la un capăt şi liber la celălalt, avînd înălţimea $l = 2$ m. Se dă modulul de elasticitate al fontei: $E = 1{,}2 \cdot 10^6$ daN/cm².

Rezolvare.

$$l_f = 2l = 400 \text{ cm};$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(7^2 - 6{,}4^2) = 6{,}2 \text{ cm}^2;$$

$$I = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{3{,}14(7^4 - 6{,}4^4)}{64} = 35{,}4 \text{ cm}^4;$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{35{,}4}{6{,}2}} = 2{,}35 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{400}{2{,}35} = 170.$$

Se folosește relația (12.1), întrucît, conform tabelei 12.1 (unde $\lambda_0 = 80$), este aplicabilă formula lui *Euler*:

$$P_f = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_f^2} = \frac{3{,}14^2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^6 \cdot 35{,}4}{400^2} = 2\,620 \text{ daN}.$$

12.4. Un stîlp de oțel, avînd secțiunea inelară $D = 140$ mm și $d = 100$ mm, este solicitat la compresiune de o forță $P = 500$ kN. Stîlpul are 4 m înălțime și este încastrat la ambele capete. Să se determine coeficientul de siguranță la flambaj.

Rezolvare.

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}(14^4 - 10^4) \approx 1\,395 \text{ cm}^4; \quad l_f = \frac{l}{2} = 200 \text{ cm};$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(14^2 - 10^2) = 76 \text{ cm}^2; \; i_{min} = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{1\,390}{76}} = 4{,}3 \text{ cm};$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{200}{4{,}3} = 46{,}5.$$

Se aplică formula *Tetmajer-Iasinski*, λ fiind mai mic decît 105.

$$\sigma_f = 3\,040 - 11{,}2\,\lambda = 3\,040 - 11{,}2 \cdot 46{,}5 = 2\,519 \text{ daN/cm}^2.$$

Se limitează la valoarea $\sigma_f = \sigma_c = 2\,200$ daN/cm²:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{50\,000}{76} = 658 \text{ daN/cm}^2; \quad c = \frac{\sigma_f}{\sigma} = \frac{2\,200}{658} = 3{,}35.$$

12.5. Un stîlp de lemn, avînd secțiunea pătrată cu latura $a = 12$ cm și lungimea liberă $l = 4$ m, este sprijinit lateral prin 4 contrafișe și încastrat în pămînt la partea inferioară, ca în figura 12.5. Să se determine sarcina critică de flambaj, considerînd că întreaga forță este preluată de stîlp.

Rezolvare. Stîlpul se consideră articulat la un capăt și încastrat la celălalt:

$$l_f \approx 0{,}7\,l = 2{,}8 \text{ m};$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{a^4}{12}}{a^2}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{12}{\sqrt{12}} = 3{,}47 \text{ cm};$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{280}{3{,}47} = 80{,}6 < 100.$$

Se aplică formula *Tetmajer-Iasinski* din tabela 12.1:

$$\sigma_f = 287 - 1{,}9\lambda = 287 - 1{,}9 \cdot 80{,}6 = 134 \text{ daN/cm}^2;$$

$$P_f = A\sigma_f = 12^2 \cdot 134 = 19\,300 \text{ daN}.$$

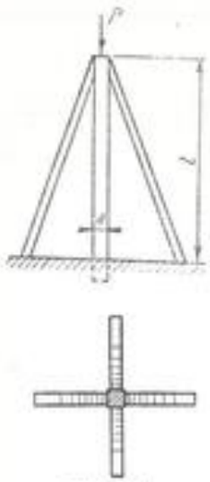


Fig. 12.5

12.6. Se consideră bara RS, de secțiune constantă, articulată în R, simplu rezemată în O și acționată de o forță de compresiune P în extremitatea S (Fig. 12.6). Se cere să se determine valoarea sarcinii critice de flambaj. Cazuri particulare: $a = l$, $a = 0$, $l = 0$.

Rezolvare. Se consideră originea sistemului de coordonate în reazemul simplu O, axele Ox_1 și Ox_2 în lungul barei și axele Oy_1 și Oy_2 normale pe bară. Dacă δ este săgeata extremității S, atunci reacțiunile orizontale din reazemul simplu O și din articulația R sînt egale cu $P\delta/l$, iar reacțiunea verticală din R este P.

Ecuațiile diferențiale ale fibrei medii deformate sînt:

a) Pe porțiunea OS:

$$EIv_1'' = P(\delta - v_1).$$

b) Pe porțiunea OR:

$$EIv_2'' = -Pv_2 - P\frac{\delta}{l}(l - x_2).$$

Divizînd cu EI și notînd $\frac{P}{EI} = \alpha^2$, cele două ecuații diferențiale se scriu:

$$v_1'' + \alpha^2 v_1 = \alpha^2\delta;$$

$$v_2'' + \alpha^2 v_2 = \alpha^2\frac{\delta}{l}x_2 - \alpha^2\delta.$$

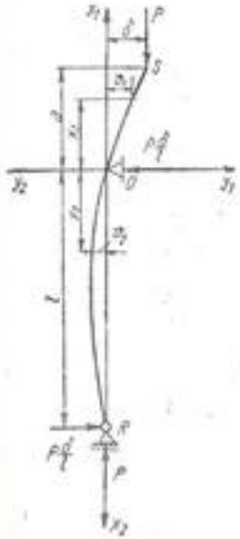


Fig. 12.6

Soluțiile lor sînt, respectiv:

$$v_1 = A\cos\alpha x_1 + B\sin\alpha x_1 + \delta$$

$$v_2 = C\cos\alpha x_2 + D\sin\alpha x_2 + \frac{\delta}{l}x_2 - \delta.$$

Condițiile la limită se scriu:

$$v_1(0) = 0; \quad v_1(a) = \delta; \quad v_2(0) = 0;$$

$$v_2(l) = 0 \text{ și } v_1'(0) = v_2'(0).$$

Ținînd seama de expresiile găsite pentru v_1 și v_2, aceste condiții la limită devin:

$$A + \delta = 0; \quad A\cos\alpha a + B\sin\alpha a + \delta = \delta;$$

$$C - \delta = 0; \quad C\cos\alpha l + D\sin\alpha l = 0;$$

$$\alpha B = \alpha D + \frac{\delta}{l}.$$

Din primele patru ecuații, deducem $A = -\delta$; $B = \delta\,\text{ctg}\,\alpha a$; $C = \delta$ și $D = -\delta\,\text{ctg}\,\alpha l$.

Înlocuind valorile B şi D, astfel determinate, în ultima relaţie şi simplificînd cu δ, se obţine ecuaţia transcendentă:

$$\operatorname{ctg} \alpha a = \frac{l}{al} - \operatorname{ctg} \alpha l$$

care, rezolvată, dă valorile lui α şi, deci, ale sarcinii $P\left(\text{căci } \alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}\right)$.

De exemplu, în cazul $a = l$, ecuaţia transcendentă devine:

$$2\alpha l \cdot \operatorname{ctg} \alpha l = 1$$

cu soluţia minimă pozitivă $\alpha l = 1{,}165$. Rezultă:

$$P_f = \frac{1{,}357EI}{l^2}.$$

Pentru $a = 0$, $\operatorname{ctg} \alpha a = \infty$. Pentru ca şi membrul al doilea al ecuaţiei transcendente să fie ∞ este necesar să avem $\operatorname{ctg} \alpha l = \infty$, adică $\alpha l = n\pi$. Pentru $n = 1$, se obţine:

$$P_f = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

adică sarcina corespunzătoare unei bare dublu articulate, ceea ce era de aşteptat, deoarece cînd $a = 0$, punctele O şi S coincid.

Pentru $l = 0$, membrul al doilea al ecuaţiei transcendente este de forma $\infty - \infty$. Ridicînd nedeterminarea, se obţine valoarea 0. Ecuaţia transcendentă devine $\operatorname{ctg} \alpha a = 0$ şi este satisfăcută pentru $\alpha a = n\frac{\pi}{2}$.

Pentru $n = 1$ se obţine:

$$P_f = \frac{\pi^2 EI}{4a^2}$$

adică sarcina corespunzătoare unei bare încastrate la o extremitate şi liberă la cealaltă, ceea ce era de aşteptat, deoarece o încastrare poate fi considerată întotdeauna ca fiind formată dintr-o articulaţie şi un reazem simplu, infinit apropiate.

12.7. Un stîlp de lemn, avînd secţiunea pătrată, articulat la ambele capete, este solicitat la compresiune de o forţă $P = 15$ kN. Să se dimensioneze stîlpul, ştiind că lungimea sa este $l = 3$, modulul de elasticitate $E = 100\,000$ daN/cm², iar coeficientul de siguranţă $c = 5$.

Rezolvare.

$$l_f = l = 300 \text{ cm}.$$

Se consideră că problema se încadrează în domeniul formulei lui *Euler* şi se aplică relaţia (12.5):

$$I_{nec} = \frac{Pcl_f^2}{\pi^2 E} = \frac{1\,500 \cdot 5 \cdot 300^2}{3{,}14^2 \cdot 100\,000} = 685 \text{ cm}^4; \quad \frac{a^4}{12} = 685; \quad a = 9{,}5 \text{ cm}; \quad A = 90 \text{cm}^2.$$

Se face verificarea aplicabilităţii formulei lui *Euler*:

$$i = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{9{,}5}{\sqrt{12}} = 2{,}75 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{300}{2{,}75} = 109 > 100.$$

Întrucît $\lambda > \lambda_0$, înseamnă că problema a fost bine încadrată în domeniul de aplicare al formulei lui *Euler*, dimensiunile fiind cele găsite mai sus.

12.8. Diagonala unei grinzi cu zăbrele este alcătuită dintr-o cornieră L $100 \times 100 \times 10$ şi are lungimea $l = 2$ m. Se întreabă ce forţă de compresiune poate suporta bara, ştiind că este articulată la ambele capete şi că $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm². Materialul este OL 37.

Rezolvare. Pentru o cornieră se găseşte în *anexa 7*:

$$I_y = 74{,}1 \text{ cm}^4; \quad i_y = 1{,}97 \text{ cm}; \quad A = 19{,}2 \text{ cm}^2.$$

Fiind vorba de o construcţie metalică, efortul capabil se calculează cu formula (12.8).

Valoarea lui φ se ia din *anexa 12*, în funcţie de λ:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{200}{1{,}97} = 102; \quad \varphi = 0{,}593.$$

Rezultă forţa capabilă:

$$P = \varphi \sigma_a A = 0{,}593 \cdot 1\,400 \cdot 19{,}2 \approx 16\,000 \text{ daN}.$$

12.9. Să se dimensioneze un stîlp metalic dintr-un profil I, ştiind că este solicitat de o forţă de compresiune $P = 100$ kN. Stîlpul este articulat la ambele capete, avînd lungimea $l = 3$ m. Se dă $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

Rezolvare. Dimensionarea se face cu ajutorul formulei (12.9). Întrucît formula are două necunoscute, A şi φ, se alege pentru φ în mod arbitrar valoarea corespunzătoare lui $\lambda = 100$, adică $\varphi = 0{,}610$:

$$A_{nec} = \frac{10\,000}{0{,}610 \cdot 1\,400} = 11{,}7 \text{ cm}^2.$$

În *anexa 10* se găseşte profilul I 12, care are:

$$A = 14{,}2 \text{ cm}^2; \quad i_y = 1{,}23 \text{ cm}.$$

Rezultă:

$$\lambda = \frac{300}{1{,}23} = 244.$$

Această cifră depăşeşte cu mult limita admisă de prescripţiuni, şi anume $\lambda = 150$.

Impunînd valoarea $\lambda = 150$, rezultă raza de inerţie:

$$i_{min} = \frac{l}{\lambda} = \frac{300}{150} = 2 \text{ cm}.$$

Acestei valori îi corespunde, după *anexa 10*, profilul I 22, cu următoarele caracteristici:

$$A = 39{,}6 \text{ cm}^2; \quad i_y = 2{,}02 \text{ cm}.$$

Se verifică secţiunea cu formula (12.10), luînd din *anexa 12* coeficientul $\varphi = 0{,}274$, pentru $\lambda = 150$:

$$\sigma_\varphi = \frac{10\,000}{0{,}274 \cdot 39{,}6} = 922 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

12.10. O bară din oţel laminat, de lungime $l = 3$ m, este articulată la ambele capete şi are secţiunea compusă (Fig. 12.10). Să se determine efortul capabil al barei, ştiind că $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm². Să se arate la cît se reduce efortul capabil dacă se scot cornierele.

Rezolvare. Pentru un profil ⋃ 16, se găseşte în *anexa 9*:

$$A = 24 \text{ cm}^2;\ e = 1{,}84 \text{ cm};$$

$$I_{zu} = 925 \text{ cm}^4;\ I_{yu} = 85{,}3 \text{ cm}^4;\ i_{yu} = 1{,}89 \text{ cm}.$$

Pentru o cornieră L 50 × 50 × 5, se găseşte în *anexa 7*:

$$A = 4{,}80 \text{ cm}^2;\quad e = 1{,}42 \text{ cm};\quad I_{zc} = I_{yc} = 11{,}2 \text{ cm}^4.$$

Se determină întîi poziţia centrului de greutate; secţiunea admite o axă de simetrie Oz.

Rămîne de stabilit poziţia axei Gy faţă de sistemul de axe zOy_1:

$$z_G = OG = \frac{24 \cdot 1{,}84 - 2 \cdot 4{,}8 \cdot 1{,}42}{24 + 2 \cdot 4{,}8} = 0{,}92 \text{ cm}.$$

Distanţele centrelor de greutate ale profilelor faţă de centrul G al ansamblului sînt: pentru ⋃ 16: $z_1 = OG_u - OG = 1{,}84 - 0{,}92 = 0{,}92$ cm;

pentru corniere:

$$z_2 = G_c'O + OG = 1{,}40 + 0{,}92 = 2{,}32 \text{ cm};$$

$$y_2 = 8 - 1{,}40 = 6{,}60 \text{ cm}.$$

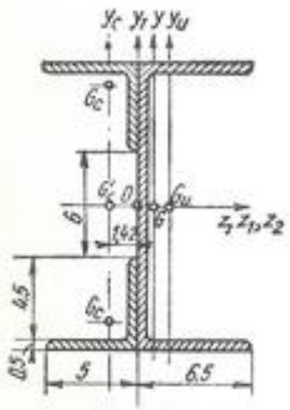


Fig. 12.10

Se calculează momentul de inerţie al întregii secţiuni faţă de axa Gy:

$$I_y = 85{,}3 + 24 \cdot 0{,}92^2 + 2(11{,}2 + 4{,}8 \cdot 2{,}32^2) = 179{,}2 \text{ cm}^4;$$

$$A = 33{,}6 \text{ cm}^2;\ i_{min} = i_y = \sqrt{\frac{179{,}2}{33{,}6}} = 2{,}31 \text{ cm};\ \lambda = \frac{300}{2{,}31} = 130.$$

În *anexa 12* corespunde coeficientul $\varphi = 0{,}365$. Forţa capabilă se calculează cu formula (12.8):

$$P = \varphi\sigma_a A = 0{,}365 \cdot 1\,400 \cdot 33{,}6 = 17\,170 \text{ daN}.$$

În cazul cînd se scot cornierele, rămîne numai profilul ⋃ 16:

$$\lambda = \frac{300}{1{,}89} = 158;\ \varphi = 0{,}247;\ P = 0{,}247 \cdot 1\,400 \cdot 24 = 8\,300 \text{ daN}.$$

Efortul capabil, după cum era de aşteptat, este mai mic în acest caz. Nu se recomandă însă a se face bare metalice cu coeficientul de subţirime $\lambda > 150$, deci cornierele sînt necesare din motive constructive.

12.11. Un stîlp metalic, articulat la ambele capete, de 6 m lungime, are secţiunea din figura 12.11. Se cere să se determine efortul capabil al stîlpului, ştiind că $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

Rezolvare. Întrucît ambele axe taie secţiunea, flambajul se va produce faţă de axa cu moment de inerţie minim. Pentru un singur profil I 20, se găseşte în *anexa 10*:

$$I_{z1} = 2\,140 \text{ cm}^4;\quad I_{y1} = 117 \text{ cm}^4;$$

$$A_1 = 33{,}5 \text{ cm}^2;\quad A = 2(33{,}5 + 35 \cdot 1) = 137 \text{ cm}^2;$$

$$I_z = 2\left(2\,140 + \frac{35 \cdot 1^3}{12} + 35 \cdot 10{,}5^2\right) = 12\,000 \text{ cm}^4;$$

$$I_y = 2\left(117 + 33{,}5 \cdot 12{,}5^2) + \frac{1 \cdot 35^3}{12}\right) = 17\,860 \text{ cm}^4.$$

Întrucît $I_z < I_y$ calculul se face faţă de axa z:

$$i_z = \sqrt{\frac{12\,000}{137}} = 9{,}4 \text{ cm};\ \lambda = \frac{600}{9{,}4} = 64.$$

În *anexa 12* se găseşte $\varphi = 0{,}798$:

$$P = \varphi\sigma_a A = 0{,}798 \cdot 1\,400 \cdot 137 = 153\,000 \text{ daN}.$$

12.12. Bara *1—2* (Fig. 12.12) este sprijinită în punctele *1*, *2* şi *3* ca în desen, fiind solicitată la compresiune de forţa P. Să se determine valoarea forţei critice de flambaj.

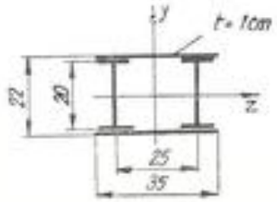


Fig. 12.11

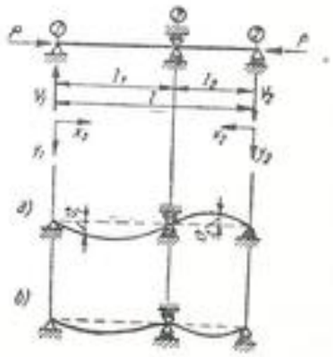


Fig. 12.12

Se verifică secţiunea cu formula (12.10), luînd din *anexa 12* coeficientul $\varphi = 0{,}274$, pentru $\lambda = 150$:

$$\sigma_\varphi = \frac{10\,000}{0{,}274 \cdot 39{,}6} = 922 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

12.10. O bară din oţel laminat, de lungime $l = 3$ m, este articulată la ambele capete şi are secţiunea compusă (Fig. 12.10). Să se determine efortul capabil al barei, ştiind că $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm². Să se arate la cît se reduce efortul capabil dacă se scot cornierele.

Rezolvare. Pentru un profil ⋃ 16, se găseşte în *anexa 9*:

$$A = 24 \text{ cm}^2;\ e = 1{,}84 \text{ cm};$$

$$I_{zu} = 925 \text{ cm}^4;\ I_{yu} = 85{,}3 \text{ cm}^4;\ i_{yu} = 1{,}89 \text{ cm}.$$

Pentru o cornieră L 50 × 50 × 5, se găseşte în *anexa 7*:

$$A = 4{,}80 \text{ cm}^2;\quad e = 1{,}42 \text{ cm};\quad I_{zc} = I_{yc} = 11{,}2 \text{ cm}^4.$$

Se determină întîi poziţia centrului de greutate; secţiunea admite o axă de simetrie Oz.

Rămîne de stabilit poziţia axei Gy faţă de sistemul de axe zOy_1:

$$z_G = OG = \frac{24 \cdot 1{,}84 - 2 \cdot 4{,}8 \cdot 1{,}42}{24 + 2 \cdot 4{,}8} = 0{,}92 \text{ cm}.$$

Distanţele centrelor de greutate ale profilelor faţă de centrul G al ansamblului sînt: pentru ⋃ 16: $z_1 = OG_u - OG = 1{,}84 - 0{,}92 = 0{,}92$ cm;

pentru corniere:

$$z_2 = G_c'O + OG = 1{,}40 + 0{,}92 = 2{,}32 \text{ cm};$$

$$y_2 = 8 - 1{,}40 = 6{,}60 \text{ cm}.$$

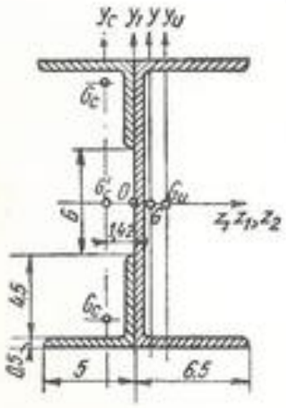


Fig. 12.10

Se calculează momentul de inerţie al întregii secţiuni faţă de axa Gy:

$$I_y = 85{,}3 + 24 \cdot 0{,}92^2 + 2(11{,}2 + 4{,}8 \cdot 2{,}32^2) = 179{,}2 \text{ cm}^4;$$

$$A = 33{,}6 \text{ cm}^2;\ i_{min} = i_y = \sqrt{\frac{179{,}2}{33{,}6}} = 2{,}31 \text{ cm};\ \lambda = \frac{300}{2{,}31} = 130.$$

În *anexa 12* corespunde coeficientul $\varphi = 0{,}365$. Forţa capabilă se calculează cu formula (12.8):

$$P = \varphi\sigma_a A = 0{,}365 \cdot 1\,400 \cdot 33{,}6 = 17\,170 \text{ daN}.$$

În cazul cînd se scot cornierele, rămîne numai profilul ⋃ 16:

$$\lambda = \frac{300}{1{,}89} = 158;\ \varphi = 0{,}247;\ P = 0{,}247 \cdot 1\,400 \cdot 24 = 8\,300 \text{ daN}.$$

Efortul capabil, după cum era de aşteptat, este mai mic în acest caz. Nu se recomandă însă a se face bare metalice cu coeficientul de subţirime $\lambda > 150$, deci cornierele sînt necesare din motive constructive.

12.11. Un stîlp metalic, articulat la ambele capete, de 6 m lungime, are secţiunea din figura 12.11. Se cere să se determine efortul capabil al stîlpului, ştiind că $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

Rezolvare. Întrucît ambele axe taie secţiunea, flambajul se va produce faţă de axa cu moment de inerţie minim. Pentru un singur profil I 20, se găseşte în *anexa 10*:

$$I_{z1} = 2\,140 \text{ cm}^4;\quad I_{y1} = 117 \text{ cm}^4;$$

$$A_1 = 33{,}5 \text{ cm}^2;\quad A = 2(33{,}5 + 35 \cdot 1) = 137 \text{ cm}^2;$$

$$I_z = 2\left(2\,140 + \frac{35 \cdot 1^3}{12} + 35 \cdot 10{,}5^2\right) = 12\,000 \text{ cm}^4;$$

$$I_y = 2\left(117 + 33{,}5 \cdot 12{,}5^2) + \frac{1 \cdot 35^3}{12}\right) = 17\,860 \text{ cm}^4.$$

Întrucît $I_z < I_y$ calculul se face faţă de axa z:

$$i_z = \sqrt{\frac{12\,000}{137}} = 9{,}4 \text{ cm};\ \lambda = \frac{600}{9{,}4} = 64.$$

În *anexa 12* se găseşte $\varphi = 0{,}798$:

$$P = \varphi\sigma_a A = 0{,}798 \cdot 1\,400 \cdot 137 = 153\,000 \text{ daN}.$$

12.12. Bara *1—2* (Fig. 12.12) este sprijinită în punctele *1*, *2* şi *3* ca în desen, fiind solicitată la compresiune de forţa P. Să se determine valoarea forţei critice de flambaj.

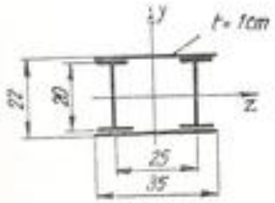


Fig. 12.11

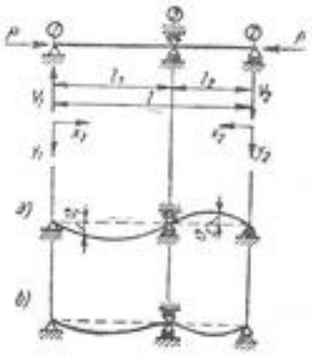


Fig. 12.12

Rezolvare. Fie V_1 şi V_2 reacţiunile în reazemele *1* şi *2*. Alegînd axele de coordonate ca în figura 12.12, ecuaţiile diferenţiale ale fibrei medii deformate pe cele două intervale *1—3* şi *2—3* sînt:

Intervalul *1—3*:

$$\frac{d^2v_1}{dx_1^2} = -\frac{Pv_1}{EI} - \frac{V_1x_1}{EI}. \tag{1}$$

Intervalul *2—3*:

$$\frac{d^2v_2}{dx_2^2} = -\frac{Pv_2}{EI} - \frac{V_2x_2}{EI}. \tag{2}$$

Notînd $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$, cele două ecuaţii devin:

$$\frac{d^2v_1}{dx_1^2} + \alpha^2v_1 = -\frac{V_1x_1}{EI} \tag{1'}$$

$$\frac{d^2v_2}{dx_2^2} + \alpha^2v_2 = -\frac{V_2x_2}{EI} \tag{2'}$$

Soluţiile celor două ecuaţii diferenţiale sînt:

$$v_1 = -\frac{V_1x_1}{P} + A_1\cos\alpha x_1 + B_1\sin\alpha x_1; \tag{3}$$

$$v_2 = -\frac{V_2x_2}{P} + A_2\cos\alpha x_2 + B_2\sin\alpha x_2 \tag{4}$$

unde A_1, B_1, A_2, B_2 sînt constante care se determină în funcţie de condiţiile pe reazeme.

Aplicînd condiţiile la limită, se obţine:

$$v_1(0) = 0, \text{ în reazemul } 1 \tag{a}$$
$$v_2(0) = 0, \text{ în reazemul } 2 \tag{b}$$
$$v_1(l_1) = 0, \text{ în reazemul } 3 \tag{c}$$
$$v_2(l_2) = 0, \text{ în reazemul } 3. \tag{d}$$

Pe reazemul 3, tangentele la curba deformată pe cele două intervale sînt egale:

$$v_1'(l_1) = v_2'(l_2) \tag{e}$$

De asemenea, momentele forţelor din stînga punctului *3* şi din dreapta sa sînt egale:

$$V_1l_1 = -V_2l_2 \tag{f}$$
$$V_1l_1 + V_2l_2 = 0. \tag{f'}$$

Expresia momentului se poate înlocui cu derivata a doua a săgeţii, deci relaţia (*f'*) devine:

$$v_1''(l_1) + v_2''(l_2) = 0. \tag{f''}$$

Punînd condiţiile la limită (a) şi (b) în ecuaţiile (3), respectiv (4) se obţine:

$$A_1 = 0 = A_2.$$

Punînd condiţiile la limită (c) şi (d) în aceleaşi ecuaţii, se obţine:

$$0 = -\frac{V_1l_1}{P} + B_1\sin\alpha l_1; \quad B_1 = \frac{V_1l_1}{P\sin\alpha l_1}; \quad 0 = -\frac{V_2l_2}{P} + B_2\sin\alpha l_2;$$

$$B_2 = \frac{V_2l_2}{P\sin\alpha l_2}.$$

Ecuaţiile (3) şi (4) devin, prin înlocuirea constantelor:

$$v_1 = -\frac{V_1x_1}{P} + \frac{V_1l_1}{P\sin\alpha l_1}\sin\alpha x_1. \tag{3'}$$

$$v_2 = -\frac{V_2x_2}{P} + \frac{V_2l_2}{P\sin\alpha l_2}\sin\alpha x_2. \tag{4'}$$

Aplicînd acestor ecuaţii condiţia (e), rezultă:

$$-\frac{V_1}{P} + \frac{\alpha V_1l_1}{P\sin\alpha l_1}\cos\alpha l_1 = -\frac{V_2}{P} + \frac{\alpha V_2l_2}{P\sin\alpha l_2}\cos\alpha l_2,$$

care se transformă în:

$$l_1V_1\left(\alpha\operatorname{ctg}\alpha l_1 - \frac{1}{l_1}\right) = l_2V_2\left(\alpha\operatorname{ctg}\alpha l_2 - \frac{1}{l_2}\right) \tag{5}$$

Relaţia (f) dă $V_1l_1 = -V_2l_2$, care se poate înlocui în (5):

$$\alpha\operatorname{ctg}\alpha l_1 - \frac{1}{l_1} = -\alpha\operatorname{ctg}\alpha l_2 + \frac{1}{l_2};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha l_1 + \operatorname{ctg}\alpha l_2 = \frac{1}{\alpha l_1} + \frac{1}{\alpha l_2}. \tag{6}$$

Această expresie se mai poate scrie $\left(\text{înlocuind } \operatorname{ctg}\alpha l_1 = \frac{\cos\alpha l_1}{\sin\alpha l_1}\right)$:

$$l_2\sin\alpha l_2(\alpha l_1\cos\alpha l_1 - \sin\alpha l_1) + l_1\sin\alpha l_1(\alpha l_2\cos\alpha l_2 - \sin\alpha l_2) = 0. \tag{7}$$

Sarcina critică de flambaj are loc pentru valoarea minimă a lui α. Se deosebesc următoarele cazuri:

A) $l_1 \neq l_2$. Ecuaţia (7) este satisfăcută cînd:

1) Suma termenilor este nulă; fibra medie deformată este reprezentată în figura 12.12, *a*.

2) Se anulează termenii din paranteze. Fibra medie deformată este reprezentată în figura 12.12, *b* (corespunde unei încastrări perfecte pentru cele două deschideri în punctul *3*). Se obţin pentru α două valori (din prima şi din a doua paranteză), iar cea mai mică dintre acestea dă sarcina critică de flambaj.

B) $l_1 = l_2$. În acest caz, ecuaţia (7) devine:

$$\sin\alpha l_1(\alpha l_1\cos\alpha l_1 - \sin\alpha l_1) = 0. \tag{8}$$

Această ecuaţie este satisfăcută în următoarele două cazuri:

1) $$\sin \alpha l_1 = 0; \quad \alpha = \frac{\pi}{l_1}.$$

Rezultă sarcina critică:

$$P = \alpha^2 EI = \frac{\pi^2}{l_1^2} EI = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} EI = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}.$$

Acest rezultat era cunoscut de la cazul II al formulei lui *Euler*, reprezentînd a doua soluţie a problemei.

2) $$\alpha l_1 \cos \alpha l_1 - \sin \alpha l_1 = 0; \quad \alpha l_1 = tg\, \alpha l_1.$$

Cea mai mică rădăcină a acestei ecuaţii este $\alpha l_1 = 4{,}49$, care dă sarcina critică:

$$P = \alpha^2 EI = \frac{4{,}49^2 EI}{l_1^2} = \frac{4{,}49^2 EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{80{,}5 EI}{l^2}.$$

Acest rezultat este cunoscut de la cazul III al formulei lui *Euler*, reprezentînd, pentru una din deschideri, soluţia corespunzătoare barei cu articulaţie la o extremitate şi încastrare la cealaltă.

12.13. O bară articulată la ambele capete este alcătuită din două porţiuni de secţiuni diferite (Fig. 12.13). Să se determine valoarea sarcinii critice de flambaj, ştiind că bara este solicitată la compresiune prin forţa P.

Rezolvare. Se aleg două origini ale axei x pentru cele două porţiuni de secţiune diferită, ca în figura 12.13. Notînd $\alpha^2 = \frac{P}{EI_1}$ şi $K^2 = \frac{I_1}{I_2}$, ecuaţiile diferenţiale ale fibrei medii deformate pentru cele două porţiuni sînt:

$$\frac{d^2 v_1}{dx_1^2} + \alpha^2 v_1 = 0; \quad (1) \qquad \frac{d^2 v_2}{dx_2^2} + K^2 \alpha^2 v_2 = 0. \quad (2)$$

Condiţiile la limită sînt:

$$v_1(0) = 0; \quad (a)$$

$$v_1(l_1) = v_2(0); \quad (b)$$

$$v_1'(l_1) = v_2'(0); \quad (c)$$

$$v_2(l_2) = 0. \quad (d)$$

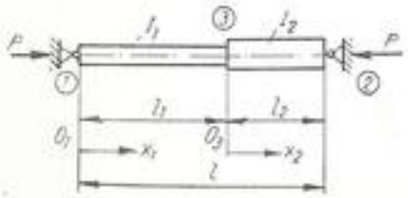


Fig. 12.13

Soluţiile ecuaţiilor (1) şi (2) sînt:

$$v_1 = A_1 \cos \alpha x_1 + B_1 \sin \alpha x_1; \quad (1')$$

$$v_2 = A_2 \cos \alpha K x_2 + B_2 \sin \alpha K x_2. \quad (2')$$

Aplicînd pe rînd condiţiile la limită, se obţine:

$$A_1 = 0; \quad v_1(l_1) = B_1 \sin \alpha l_1; \quad v_2(0) = A_2 = B_1 \sin \alpha l_1;$$

$$B_1 \alpha \cos \alpha l_1 = K \alpha B_2; \quad v_2(l_2) = A_2 \cos K \alpha l_2 + B_2 \sin K \alpha l_2 = 0.$$

Înlocuind pe A_2 şi B_2 în ultima ecuaţie, rezultă:

$$B_1 \sin \alpha l_1 \cos K \alpha l_2 + \frac{B_1 \alpha \cos \alpha l_1}{K \alpha} \sin K \alpha l_2 = 0$$

care se mai poate scrie:

$$K \operatorname{tg} \alpha l_1 + \operatorname{tg} K \alpha l_2 = 0. \quad (3)$$

Cea mai mică rădăcină a acestei ecuaţii dă sarcina critică de flambaj.

Pentru cazul particular $I_1 = I_2$, $K = 1$, se scrie

$$\operatorname{tg} \alpha l_1 + \operatorname{tg} \alpha l_2 = 0.$$

Înlocuind tangenta şi eliminînd numitorii, se obţine ecuaţia:

$$\sin \alpha (l_1 + l_2) = \sin \alpha l = 0$$

ceea ce dă cazul II de flambaj al lui Euler (bara articulată la ambele capete, cu secţiune constantă).

12.14. Se cere să se calculeze săgeata maximă, pe care o ia o bară verticală, încastrată la extremitatea de jos, solicitată de o forţă verticală, lucrînd excentric, ştiind că excentricitatea este situată în planul de flambaj al barei (Fig. 12.14).

Rezolvare. Momentul în secţiunea x este:

$$M = -P(e + f - v).$$

Ecuaţia fibrei medii deformate este:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = P(f + e - v)$$

care se mai poate scrie şi sub forma:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{P}{EI} v = \frac{P(f + e)}{EI}.$$

Notînd: $P/EI = \alpha^2$, integrala generală a acestei ecuaţii este de forma:

$$v = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + f + e.$$

Constantele A şi B se determină cu ajutorul condiţiilor la limită: în încastrare, pentru $x = 0$: $v = 0$ şi $dv/dx = 0$.

Derivata lui v este:

$$\frac{dv}{dx} = -\alpha A \sin \alpha x + \alpha B \cos \alpha x.$$

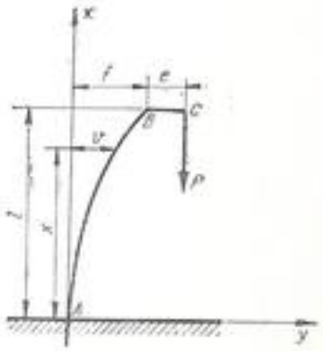


Fig. 12.14

Condițiile de mai sus dau următoarele valori pentru A și B:

a) $$x = 0; \quad v = 0; \quad 0 = A + f + e$$

de unde:

$$A = -(f + e).$$

b) $$x = 0; \quad \frac{dv}{dx} = 0; \quad 0 = \alpha B$$

de unde:

$$B = 0.$$

Ecuația fibrei medii deformate devine:

$$v = -(f + e)\cos \alpha x + f + e \text{ sau } v = (f + e)(1 - \cos \alpha x).$$

Pentru determinarea valorii lui f, se scrie că pentru $x = l$, $v = f$:

$$f = (f + e)(1 - \cos \alpha l).$$

Rezolvînd, se obține:

$$f = \frac{e(1 - \cos \alpha l)}{\cos \alpha l}.$$

Ecuația fibrei medii deformate se mai poate scrie și astfel:

$$f + e = \frac{e(1 - \cos \alpha l)}{\cos \alpha l} + e = \frac{e}{\cos \alpha l}.$$

Atunci:

$$v = \frac{e(1 - \cos \alpha x)}{\cos \alpha l}.$$

12.15. O grindă verticală, încastrată la partea inferioară, este solicitată la flambaj de forța verticală P și în același timp de o forță orizontală H (Fig. 12.15).

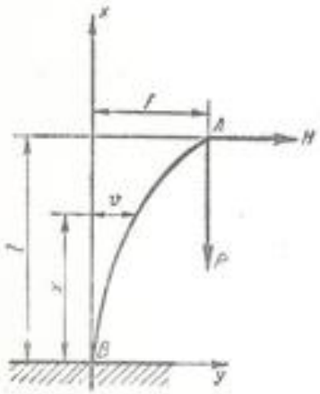


Fig. 12.15

Se cere:

a) ecuația fibrei medii deformate;

b) săgeata maximă;

c) momentul în încastrare.

Rezolvare. Ecuația fibrei medii deformate este:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = P(f - v) + H(l - x)$$

care se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = \frac{P}{EI}f + \frac{H}{EI}(l - x).$$

Integrala generală a acestei ecuații se compune din două părți:

a) integrala generală a ecuației fără membrul al doilea;

b) o integrală particulară a ecuației cu membrul al doilea.

Dacă se notează: $\frac{P}{EI} = \alpha^2$, integrala generală a ecuației fără membrul al doilea este:

$$v = A\cos \alpha x + B\sin \alpha x$$

unde A și B sînt constantele de integrare care urmează să fie determinate prin condițiile la limită.

Fie:

$$v = ax + b$$

integrala particulară a ecuației cu membrul al doilea.

Derivînd se obține:

$$\frac{dv}{dx} = a; \quad \frac{d^2v}{dx^2} = 0.$$

Introducînd aceste valori în ecuația diferențială generală, se obține:

$$\frac{P}{EI}(ax + b) = \frac{P}{EI}f + \frac{H}{EI}(l - x); \quad \frac{Pa}{EI}x + \frac{Pb}{EI} = -\frac{H}{EI}x + \frac{Pf + Hl}{EI}.$$

Prin identificarea coeficienților, se găsește:

$$\frac{Pa}{EI} = -\frac{H}{EI}; \quad \frac{Pb}{EI} = \frac{Pf + Hl}{EI}$$

de unde:

$$a = -\frac{H}{P}; \quad b = f + \frac{H}{P}l.$$

Integrala generală este:

$$v = A\cos \alpha x + B\sin \alpha x - \frac{H}{P}x + \frac{H}{P}l + f.$$

Condițiile la limită sînt următoarele: în încastrare, pentru $x = 0$, trebuie ca $v = 0$ și $dv/dx = 0$.

Derivata lui v este:

$$\frac{dv}{dx} = -\alpha A\sin \alpha x + \alpha B\cos \alpha x - \frac{H}{P}.$$

a) Pentru $x = 0$, $v = 0$:

$$0 = A + \frac{H}{P}l + f; \quad A = -\left(\frac{H}{P}l + f\right).$$

b) Pentru $x = 0$, $dv/dx = 0$:

$$0 = \alpha B - \frac{H}{P}; \quad B = \frac{H}{\alpha P}.$$

Atunci:

$$v = \left(\frac{H}{P} l + f\right)(1 - \cos \alpha x) + \frac{H}{\alpha P} \sin \alpha x - \frac{H}{P} x.$$

Pentru determinarea valorii lui f, se scrie condiția: pentru $x = l$, $v = f$:

$$f = \left(\frac{H}{P} l + f\right)(1 - \cos \alpha l) + \frac{H}{\alpha P} \sin \alpha l - \frac{H}{P} l.$$

De aici se obține:

$$f \cos \alpha l = \frac{H}{P}\left(\frac{\sin \alpha l}{\alpha} - l \cos \alpha l\right)$$

de unde:

$$f = \frac{H}{P}\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha l}{\alpha} - l\right). \tag{1}$$

Rezultă atunci:

$$\frac{H}{P} l + f = \frac{H}{P} l + \frac{H}{P} \frac{\operatorname{tg} \alpha l}{\alpha} - \frac{H}{P} l = \frac{H}{P} \frac{\operatorname{tg} \alpha l}{\alpha}.$$

Ecuația fibrei medii deformate este:

$$v = \frac{H}{\alpha P} \operatorname{tg} \alpha l \,(1 - \cos \alpha x) + \frac{H}{\alpha P} \sin \alpha x - \frac{H}{P} x$$

care se mai poate scrie și sub forma:

$$v = \frac{H}{P}\left[\frac{\sin \alpha l - \sin \alpha (l - x)}{\alpha \cos \alpha l} - x\right]. \tag{2}$$

Momentul în încastrare este:

$$M_B = -Hl - Pf = -Hl - P\frac{H}{P}\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha l}{\alpha} - l\right) = -H\frac{\operatorname{tg} \alpha l}{\alpha}. \tag{3}$$

12.16. Se consideră o grindă de oțel, profil I 20, încastrată la un capăt, la capătul liber fiind aplicat un moment încovoietor M_0. Să se calculeze lungimea barei, astfel încît momentul M_0 capabil să fie suportat de bară fără a se depăși $\sigma_a = 1\,200$ daN/cm² și să fie egal cu momentul critic de flambaj lateral.

Rezolvare.

Momentul capabil va fi:

$$M_{cap} = \sigma_a W_x.$$

Pentru ca acest moment să fie în același timp și moment critic de flambaj lateral, se va utiliza relația (12.11) și se va scrie:

$$M_{cap} = \frac{\pi}{2l}\sqrt{EI_y GI_d}.$$

Momentul de inerție I_y se obține din *anexa 10* și este $I_y = 117$ cm⁴, iar $W_x = 214$ cm³. Momentul de inerție polar echivalent se va calcula în modul arătat la problema 6.24 și va fi:

$$I_d = 2 \cdot 9 \cdot 1{,}13^3 + 17{,}74 \cdot 0{,}75^3 = 33{,}47 \text{ cm}^4.$$

Introducînd aceste valori în relația de mai sus, se obține

$$l = \frac{\pi}{2\sigma_a W_x}\sqrt{EI_y GI_d} =$$

$$= \frac{\pi}{2 \cdot 1\,200 \cdot 214}\sqrt{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 117 \cdot 0{,}81 \cdot 10^6 \cdot 33{,}47} \approx 1\,000 \text{ cm}.$$

Rezultă deci că o astfel de grindă, dacă are o lungime mai mare de 10 m, va flamba înainte de a atinge solicitarea corespunzătoare momentului capabil.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

12.17. Să se determine sarcină critică de flambaj pentru o bară de lemn, de secțiune dreptunghiulară 8×12 cm² și lungime $l = 2$ m, știind că este articulată la un capăt și încastrată la celălalt.

Răspuns: $P_f = 25\,200$ daN.

12.18. O bară din OL 37, avînd secțiunea circulară cu $\varnothing = 20$ mm, articulată la ambele capete, este solicitată de o forță de compresiune $P = 10$ kN. Care este lungimea maximă pe care o poate avea bara, fără a exista pericol de flambaj, dacă coeficientul de siguranță este $c = 4$?

Răspuns: $l_f = l = 64$ cm.

12.19. Să se dimensioneze tija pistonului unei mașini, făcute din OL 48, știind că forța maximă de compresiune este $P = 80$ kN, iar lungimea tijei $l = 1{,}50$ m. Se ia coeficientul $c = 10$.

Răspuns: $d = 64$ mm.

CAPITOLUL 13

SOLICITĂRI DINAMICE

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. Solicitările dinamice tratate în acest capitol pot fi grupate în:

a) Solicitări prin forţe de inerţie, întîlnite la piese care au accelerații mari, fără discontinuitate de viteză.

b) Solicitări prin şoc, produse în piese care suferă variații bruşte de viteze şi accelerații.

2. Problemele de solicitări prin forţe de inerţie se tratează în general prin aceleaşi metode ca şi solicitările statice, introducînd forţele de inerţie.

3. Într-un volant, considerat fără spiţe şi cu grosimea obezii mică în comparaţie cu raza, efortul unitar de întindere este dat de formula aproximativă

$$\sigma = \frac{\gamma v^2}{g}, \tag{13.1}$$

în care γ este greutatea specifică a materialului;

g — accelerația gravitației;
v — viteza centrului de greutate al secțiunii obezii:

$$v = R\omega. \tag{13.2}$$

4. Într-o bielă, considerată, în mod aproximativ, de secţiune constantă, în poziţia din figura 13. *a* forţele de inerţie perpendiculare pe bielă variază practic liniar, iar efortul unitar maxim de încovoiere produs de ele este:

$$\sigma_i = 0{,}064\,\frac{\gamma A l^2 r \omega^2}{g W}. \tag{13.3}$$

5. Într-un disc de grosime constantă care se roteşte cu viteza unghiulară ω şi care este supus pe contur unor presiuni radiale p_i şi p_e ca în fig. 13, *b*, apar eforturile unitare:

σ_r: efort unitar radial, dirijat după raza discului;

σ_t: efort unitar circumferenţial dirijat după tangenta la un cerc de rază r.

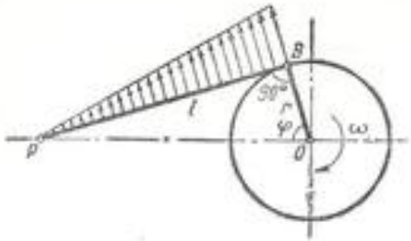


Fig. 13. *a*

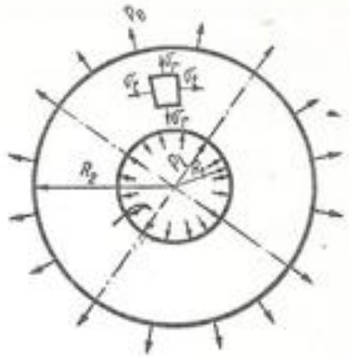


Fig. 13. *b*

Variaţia acestor eforturi unitare este dată de relaţiile:

$$\sigma_r = \frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)\frac{(R_2^2 - r^2)(r^2 - R_1^2)}{r^2} + p_e\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right) + p_i\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right); \tag{13.4}$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma\omega^2}{8g}\left[(3+\mu)\left(R_2^2 + R_1^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2}\right) - (1+3\mu)r^2\right] + p_e\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right) + p_i\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right). \tag{13.5}$$

în care R_1 este raza interioară a discului;
R_2 — raza exterioară a discului;
r — raza corespunzătoare unui punct oarecare.

Deplasarea radială u a unui punct oarecare al discului este dată de:

$$u = \frac{r}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r). \tag{13.6}$$

6. La discul de grosime constantă, fără gaură centrală, solicitat şi de o presiune exterioară p_e, eforturile unitare se calculează cu relaţiile:

$$\sigma_r = \frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)(R_2^2 - r^2) + p_e \tag{13.7}$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma\omega^2}{8g}\left[(3+\mu)R_2^2 - (1+3\mu)r^2\right] + p_e. \tag{13.8}$$

7. În piesele solicitate de sarcini aplicate brusc sau prin şoc, apar eforturi mult mai mari decît în piesele solicitate static. Elementul care caracterizează capacitatea unei piese de a rezista la şoc este lucrul mecanic de deformaţie pe care îl poate acumula piesa; de aceea, calculele de solicitări prin

şoc se fac pe baza ipotezei egalităţii energiei de deformaţie a corpului solicitat cu energia corpului care produce şocul.

Metoda de rezolvare a oricărei probleme de şoc este următoarea:

a) Se calculează energia cinetică a corpului care loveşte în momentul iniţial al şocului, energie care, în cazul translaţiei, se poate pune sub forma:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2, \tag{13.9}$$

în care: $m = \frac{P}{g}$ este masa corpului; v — viteza în momentul şocului,

sau:

$$E_c = Ph, \tag{13.10}$$

în care: P este greutatea corpului;
h — înălţimea de cădere.

b) Se calculează energia de deformaţie a corpului care suferă şocul E_d, presupunînd că el este încărcat cu o sarcină *necunoscută* Q, aplicată static, cu efect echivalent celei aplicate prin şoc. Energia de deformaţie se poate exprima în funcţie de:

— efortul unitar (σ, τ),
— deformaţia (δ),
— forţa necunoscută Q echivalentă celei aplicate prin şoc.

c) Scriind egalitatea între cele două energii:

$$E_c = E_d \tag{13.11}$$

se obţine o ecuaţie din care se determină forţa necunoscută Q, efortul unitar sau deformaţia produsă prin şoc, după felul necunoscutei alese.

8. La solicitările de întindere, compresiune sau încovoiere prin şoc, efortul unitar dinamic σ_d are expresia:

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} \tag{13.12}$$

în care: σ_{st} este efortul unitar de întindere, compresiune sau încovoiere, care ar apare dacă sarcina P ar fi aplicată static;
ψ — un multiplicator de impact sau coeficient dinamic, care are expresia

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_c}{E_d}}, \tag{13.13}$$

în care: E_c este energia cinetică a corpului care produce şocul;
E_d — energia de deformaţie a barei solicitată de sarcina P *aplicată static.*

Înlocuind în relaţia (13.13)

$$E_c = Ph,$$

$$E_d = \frac{1}{2} P \cdot \delta_{st}$$

unde φ_{st} este deformaţia barei sub acţiunea sarcinii P aplicate *static*, se obţine:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{Ph}{\frac{1}{2} P \delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}. \tag{13.14}$$

Pentru cazul cînd se cunoaşte viteza corpului, se înlocuieşte energia cinetică din relaţia (13.9) şi se obţine:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{\frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2}{\frac{1}{2} P \delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \delta_{st}}}. \tag{13.15}$$

Deformaţia datorită solicitării dinamice se obţine din relaţia:

$$\delta_d = \psi \delta_{st}. \tag{13.16}$$

9. În cazul în care raportul:

$$\frac{2h}{\delta_{st}} \geqslant 10$$

relaţia (13.14) se poate simplifica:

$$\psi = 1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}, \tag{13.17}$$

eroarea faţă de formula exactă fiind sub 5%.

Dacă h este foarte mare, atunci expresia (13.14) se mai poate scrie

$$\psi = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}. \tag{13.18}$$

Această expresie se poate utiliza numai dacă:

$$\frac{2h}{\delta_{st}} \geqslant 110,$$

pentru ca erorile să nu depăşească 10%.

10. În cele stabilite anterior s-a presupus că masa barei care suportă şocul este neglijabilă. Dacă se ţine seamă şi de masa barei, formula (13.14) devine:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}(1 + k)}}, \tag{13.19}$$

unde k are, pentru cîteva cazuri mai importante, valorile de mai jos:

a) Pentru bara supusă la întindere (compresiune):

$$k = \frac{G}{3P}, \tag{13.20}$$

unde

G este greutatea barei,

P — greutatea sarcinii care cade pe bară.

b) Pentru o bară încastrată la un capăt şi liberă la celălalt, solicitată la încovoiere prin şoc de o sarcină concentrată care cade pe capătul liber:

$$k = \frac{33}{140}\,\frac{P}{G}. \tag{13.21}$$

c) Pentru grinda simplu rezemată la capete, lovită la mijloc:

$$k = \frac{17G}{35P}. \tag{13.22}$$

11. Energia de deformaţie a unei bare de secţiune circulară, solicitată la torsiune, în funcţie de efortul unitar maxim care apare în bară, este dată de relaţia:

$$E_d = \frac{1}{2}\,\frac{\tau_{max}^2}{2G}\,V, \tag{13.23}$$

în care V este volumul barei torsionate.

B. PROBLEME REZOLVATE

13.1. Bara de secţiune constantă A şi lungime l din figura 13.1 se roteşte cu viteza unghiulară ω în jurul axei verticale. Se cere să se construiască diagrama forţelor axiale şi să se calculeze efortul unitar maxim de întindere, produs de forţele de inerţie, neglijînd greutatea barei. Se dau: $n = 1\,000$ rot/min, $l = 1$ m, $\gamma = 7{,}85$ daN/dm³.

Rezolvare. Un element de lungime dx din bară, la distanţa x de la axa de rotaţie, este solicitat prin forţa de inerţie:

$$dF = a \cdot dm,$$

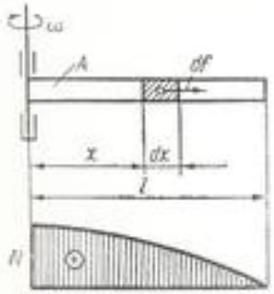


Fig. 13.1

în care a este accelerаţia, iar dm, masa elementului.

$$a = x\omega^2,\quad dm = \frac{\gamma A\,dx}{g},\quad dF = \frac{\gamma A x\omega^2 dx}{g}.$$

Forţa axială în secţiunea x este suma forţelor de inerţie din afara secţiunii, adică:

$$N = \int_x^l \frac{\gamma A x\omega^2 dx}{g} = \frac{\gamma A\omega^2(l^2 - x^2)}{2g}; \tag{1}$$

Cu ajutorul acestei relaţii, se construieşte diagrama N din figura 13.1. Forţa axială este maximă în axa de rotaţie, la $x = 0$:

$$N_{max} = \frac{\gamma A l^2\omega^2}{2g}. \tag{2}$$

Efortul unitar maxim este:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} = \frac{\gamma l^2\omega^2}{2g};$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1\,000}{30} = 104{,}7 \text{ rad/s};$$

$$\sigma_{max} = \frac{7{,}85 \cdot 10^{-3} \cdot 100^2 \cdot 104{,}7^2}{2 \cdot 981} = 439 \text{ daN/cm}^2.$$

13.2. Bara cotită OAB din figura 13.2, *a* (unde AB este arc de cerc) se roteşte cu viteza unghiulară ω în planul ei, în jurul punctului O. Se cere să se construiască diagramele N, T, M datorite forţelor de inerţie.

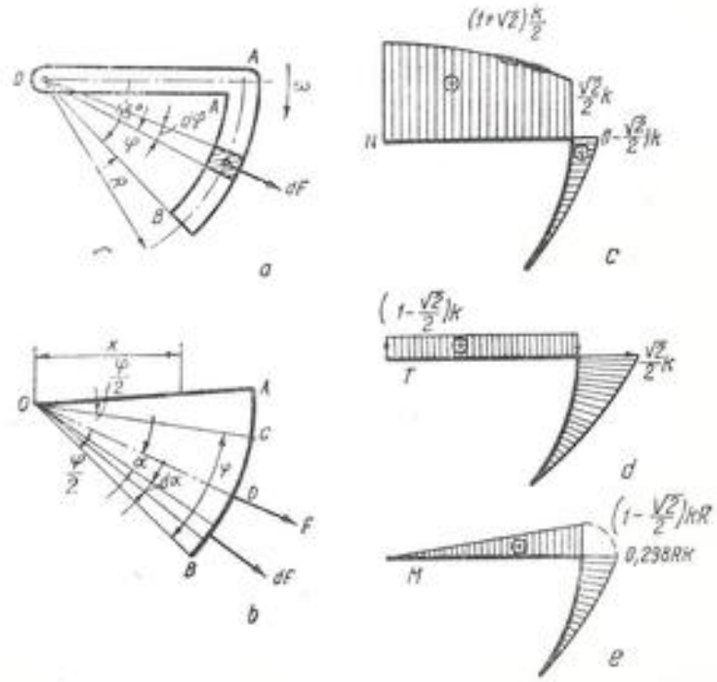


Fig. 13.2

Rezolvare. Dacă se consideră un element de masă dm ca în figura 13.2, *a*, forţa sa de inerţie este:

$$dF = a \cdot dm = R\omega^2 \frac{\gamma A R d\varphi}{g} = \frac{\gamma A R^2 \omega^2 d\varphi}{g}.$$

Pentru a calcula mărimile N, T, M în secţiunea φ (Fig. 13.2, *a*), se determină valoarea forţei F care este rezultanta forţelor de inerţie de pe unghiul φ şi este aplicată pe bisectoarea OD din fig. 13.2, *b*. În acest scop, se introduce o nouă variabilă, α, şi se proiectează forţele dF pe direcţia OD:

$$F = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{+\frac{\varphi}{2}} dF \cos\alpha = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{+\frac{\varphi}{2}} \frac{\gamma A R^2 \omega^2}{g} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{2\gamma A R^2 \omega^2}{g} \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Se pot calcula mărimile N, T, M, în secţiunea C (Fig. 13.2, *b*):

$$T_{AB} = F \cdot \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma A R^2 \omega^2}{g} 2 \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma A R^2 \omega^2}{g} \sin\varphi,$$

$$N_{AB} = F \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma A R^2 \omega^2}{g} 2 \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma A R^2 \omega^2}{g} (1 - \cos\varphi),$$

$$M_{AB} = \frac{2\gamma A R^2 \omega^2}{g} \sin\frac{\varphi}{2} R \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma A R^2 \omega^2}{g} (1 - \cos\varphi).$$

Dacă, pentru simplificare, se notează:

$$\frac{\gamma A R^2 \omega^2}{g} = k,$$

cele trei ecuaţii devin:

$$T_{AB} = k \sin\varphi;$$

$$N_{AB} = k(1 - \cos\varphi);$$

$$M_{AB} = kR(1 - \cos\varphi).$$

Cu ajutorul acestor ecuaţii, se construiesc diagramele N, T, M (Fig. 13,2, *c*, *d*, *e*) pentru partea curbă a barei. Valorile maxime au loc în colţul A, pentru $\varphi = 45°$:

$$N_A = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)k; \quad T_A = \frac{\sqrt{2}}{2}k; \quad M_A = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)kR.$$

Pe porţiunea rectilinie OA, efortul axial N într-o secţiune oarecare x este (v. problema 13.1)

$$N_{OA} = \frac{\gamma A \omega^2 (R^2 - x^2)}{2g} + F_{BA} \cos\frac{45°}{2} = \frac{\gamma A \omega^2 R^2}{2g} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) +$$

$$+ 2\frac{\gamma A R^2 \omega^2}{g} \sin\frac{45°}{2} \cdot \cos\frac{45°}{2} = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) + k\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{k}{2}\left(1 + \sqrt{2} - \frac{x^2}{R^2}\right).$$

Eforturl maxim are loc în punctul O, pentru $x = 0$

$$N_0 = \frac{k}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

iar în punctul A, pentru $x = R$, are valoarea minimă:

$$N_A = k\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Forţa tăietoare în bara rectilinie este egală cu forţa axială în bara curbă, în punctul A

$$T_{OA} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)k.$$

Întrucît forţa tăietoare este constantă, momentul încovoietor variază liniar, devenind nul în articulaţia O.

13.3. Să se calculeze efortul unitar maxim în tija de regulator DE din figura 13.3, dacă secţiunea ei (AB) este dreptunghiulară, cu $h = 20$ mm, $b = 40$ mm, iar $P = 10$ daN, $n = 200$ rot/min, $e = 20$ cm, $l = 50$ cm.

Rezolvare. Forţa de inerţie a bilei P este:

$$F = me\omega^2 = \frac{P}{g} e\omega^2;$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 200}{30} = 20{,}9 \text{ rad/s};$$

$$F = \frac{10}{981} \cdot 20 \cdot 20{,}9^2 = 89 \text{ daN}.$$

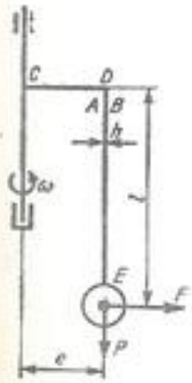


Fig. 13.3

Momentul încovoietor maxim este în punctul D:

$$M_{max} = Fl = 89 \cdot 50 = 4\,450 \text{ daNcm}.$$

Bara DE are caracteristicile geometrice:

$$A = bh = 4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^2,$$

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{4 \cdot 2^2}{6} = 2{,}67 \text{ cm}^3.$$

Secţiunea periculoasă D este solicitată la întindere şi încovoiere:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}}{W} = \frac{10}{8} + \frac{4\,450}{2{,}67} = 1\,667 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

13.4. La un motor de automobil, se cunosc următoarele date:

— diametrul pistonului: $d = 105$ mm;
— presiunea maximă: $p_{max} = 25$ daN/cm²;
— cursa pistonului: $s = 130$ mm;
— raza manivelei: $r = \frac{1}{2} s$;
— lungimea bielei: $l = 31$ cm;
— turația: $n = 1\,200$ rot/min;
— secțiunea bielei, la mijlocul lungimii sale, are forma din figura 13.4;

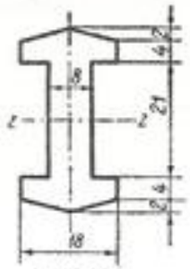


Fig. 13.4

— în poziția cînd biela este perpendiculară pe manivelă (Fig. 13. *a)*, forța pe piston reprezintă jumătate din forța la punctul mort;
— biela este confecționată din oțel.

Se cer:

a) Efortul unitar de compresiune în momentul exploziei, considerînd că aceasta are loc atunci cînd pistonul se găsește în punctul mort.

b) Efortul unitar datorit compresiunii și încovoierii, în poziția cînd biela este perpendiculară pe manivelă.

Rezolvare. Elementele geometrice ale secțiunii, conform figurii 13.4 sînt:

$$A = 0{,}8 \cdot 2{,}1 + 2\left(1{,}8 \cdot 0{,}4 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}8 \cdot 0{,}2\right) = 3{,}48 \text{ cm}^2;$$

$$I_z = \frac{0{,}8 \cdot 2{,}1^3}{12} + 2\left[\frac{1{,}8 \cdot 0{,}4^3}{12} + 1{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}25^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1{,}8 \cdot 0{,}2^3}{36} + 1{,}8 \cdot \frac{0{,}2}{2} \cdot 1{,}52^2\right] = 3{,}845 \text{ cm}^4;$$

$$W = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{3{,}845}{1{,}65} = 2{,}33 \text{ cm}^3.$$

Forța pe piston la punctul mort este:

$$P_{max} = \frac{\pi d^2}{4} p_{max} = \frac{\pi \cdot 10{,}5^2}{4} \cdot 25 = 2\,160 \text{ daN}.$$

Efortul unitar de compresiune la punctul mort este:

$$\sigma = \frac{P_{max}}{A} = \frac{2\,160}{3{,}48} = 621 \text{ daN/cm}^2. \qquad (1)$$

Viteza unghiulară este:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1\,200}{30} = 125{,}7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Efortul unitar de încovoiere este dat de formula (13.3)

$$\sigma_i = 0{,}064 \frac{7{,}85 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}48 \cdot 31^3 \cdot 6{,}5 \cdot 125{,}7^2}{981 \cdot 2{,}33} = 76 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar de compresiune, datorit unei forțe $\frac{1}{2} P_{max}$ este:

$$\sigma_c = \frac{1}{2} 621 = 310{,}5 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar rezultant este:

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_i = 386{,}5 \text{ daN/cm}^2. \qquad (2)$$

Se vede că în a doua alternativă de calcul, efortul unitar este mai mic decît în prima. Dacă se mărește turația, de exemplu, de trei ori, efortul unitar de încovoiere crește de $3^2 = 9$ ori și se ajunge la o valoare rezultantă $\sigma = 994$ daN/cm². Rezultă de aici că la turații mari trebuie să se țină seamă neapărat de solicitarea la încovoiere produsă de forțele de inerție.

13.5. Sistemul de bare articulate $ABCD$ din figura 13.5 se rotește cu o viteză unghiulară mare ω în jurul axei verticale AD. Barele orizontale au greutatea q daN/cm, iar cea verticală, p daN/cm. Se cer eforturile maxime (forțe axiale și momente încovoietoare) care se produc în bare.

Rezolvare. Din cauza turației mari, greutățile sînt neglijabile față de forțele de inerție, ceea ce face ca poziția de echilibru relativ a sistemului să fie cea din figura 13.5.

Pe bara verticală, forța de inerție pentru un element de lungime dx este:

$$\mathrm{d}F = a\,\mathrm{d}m = r\omega^2 \frac{p\,\mathrm{d}x}{g},$$

iar pe unitate de lungime este:

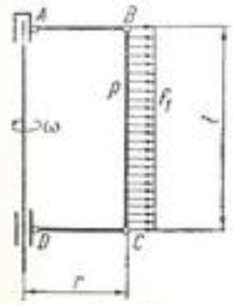


Fig. 13.5

$$f_1 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{pr\omega^2}{g}. \qquad (1)$$

Aceasta este o sarcină uniform distribuită, care dă un moment maxim în mijlocul barei:

$$M_{max} = \frac{f_1 l^2}{8} = \frac{pr l^2 \omega^2}{8g}. \qquad (2)$$

Forțele de inerție ale barei BC dau în B și C cîte o forță de întindere a barelor orizontale:

$$F_B = F_C = \frac{F_{iBC}}{2} = \frac{prl\omega^2}{2g}. \qquad (3)$$

Forţele de inerţie proprii ale barelor orizontale dau în A şi D forţe de întindere cu valoarea (2) de la problema 13.1, în care se înlocuieşte $\gamma A = q$ şi $l^2 = r^2$:

$$F_A = F_D = \frac{qr^2\omega^2}{2g}. \tag{4}$$

Forţa axială totală în A şi D este suma valorilor (3) şi (4)

$$N_A = N_D = \frac{r\omega^2}{2g}(pl + qr). \tag{5}$$

13.6. Ce rază trebuie să aibă un volant de fontă, care se roteşte cu $n = 300$ rot/min, spre a nu se depăşi rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 67$ daN/cm²? Se dă $\gamma = 7{,}25 \cdot 10^{-3}$ daN/cm³.

Rezolvare. Se foloseşte formula aproximativă (13.1) şi apoi (13.2)

$$\sigma_a = \frac{\gamma v^2}{g}; \quad v = \sqrt{\frac{g\sigma_a}{\gamma}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 67}{7{,}25 \cdot 10^{-3}}} \approx 3\,000 \text{ cm/s}$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 300}{30} = 31{,}4 \text{ rad/s}$$

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{3\,000}{31{,}4} = 95{,}6 \text{ cm}.$$

13.7. Inelul subţire, de diametru mediu $2R$ şi secţiune A, reprezentat în figura 13.7, *a*, se roteşte cu o viteză unghiulară constantă ω în jurul axei verticale. Dacă se neglijează greutatea proprie, se cere să se construiască diagrama momentelor încovoietoare datorite forţelor de inerţie.

Rezolvare. Inelul se deformează ca în figura 13,7, *b*.

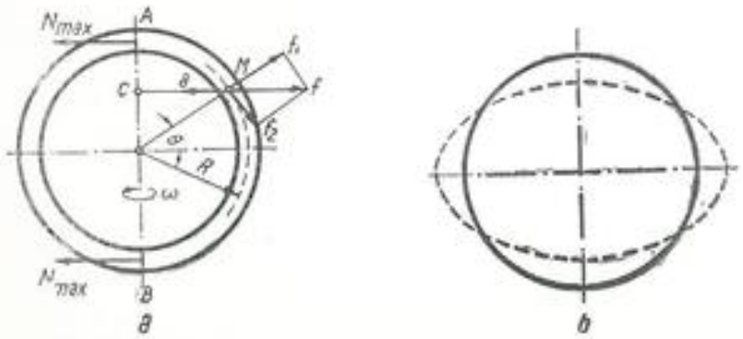


Fig. 13.7. *a*, *b*

Într-o secţiune oarecare a inelului, făcînd un unghi θ cu diametrul orizontal — figura 13.7, *a* — se produce o accelerţie a, dirijată pe raza MC a cercului descris de punctul M:

$$a = MC \cdot \omega^2 = R\omega^2 \cos\theta.$$

Într-un element de masă dm din jurul punctului M, această accelerţie produce o forţă de inerţie:

$$df = a \cdot dm = R\omega^2 \cos\theta \frac{\gamma A\, ds}{g}.$$

Pe unitatea de lungime a arcului de cerc, forţa de inerţie este:

$$f = \frac{df}{ds} = \frac{\gamma A R\omega^2 \cos\theta}{g}. \tag{1}$$

Forţa f se poate descompune pe tangentă şi normală, în f_2 şi f_1 şi se poate proceda la calcularea mărimilor N, T, M. Astfel, pentru calcularea forţei axiale maxime de A şi B, se consideră inelul tăiat prin planul AB şi se scrie o ecuaţie de proiecţii pe orizontală:

$$2N_{max} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} fR\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\gamma A R^2 \omega^2 \cos\theta\, d\theta}{g} = \frac{2\gamma A R^2\omega^2}{g};$$

$$N_{max} = \frac{\gamma A R^2\omega^2}{g}. \tag{2}$$

Calculul momentelor încovoietoare este o problemă static nedeterminată. Se consideră un sfert de inel, ca în figura 13.7, *c*, încărcat cu forţele de inerţie f şi avînd în punctele de secţionare A, D, eforturile N, T, M. Întrucît forţa N_{max} echilibrează forţele de inerţie de pe sfertul de cerc, rezultă că în D nu există forţă tăietoare (orizontală). De asemenea, din motive de simetrie, în D nu există forţă axială, ceea ce face ca în A să nu existe forţă tăietoare. În A şi D s-au aplicat momentele M_D şi M_A, alese cu sensurile din desen.

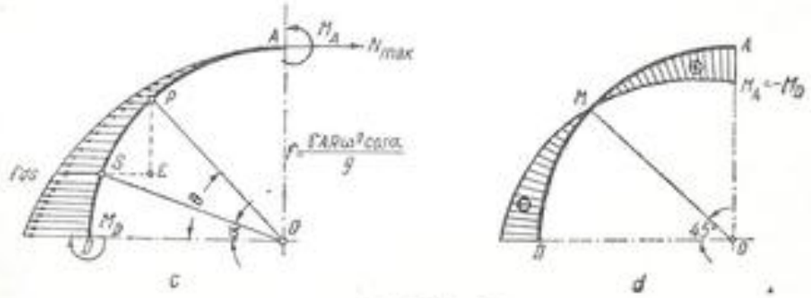


Fig. 13.7, *c*, *d*

Trebuie exprimat momentul încovoietor într-o secţiune oarecare P, care face un unghi θ cu orizontala. Pentru aceasta se ia alt unghi α variabil faţă de θ şi se scrie:

$$M = M_P = M_D + \int_0^\theta f\,ds\,\overline{PE} = M_D + \int_0^\theta \frac{\gamma A R\omega^2 \cos\alpha}{g} R\,d\alpha \cdot R(\sin\theta - \sin\alpha),$$

$$M = M_D + \frac{\gamma A R^2\omega^2}{g}\int_0^\theta (\cos\alpha\sin\theta - \cos\alpha\sin\alpha)\,d\alpha,$$

$$M = M_D + \frac{\gamma A R^2\omega^2 \sin^2\theta}{2g}. \tag{3}$$

Valoarea momentului static nedeterminat M_D se determină prin teorema lui *Castigliano*:

$$\frac{\partial L}{\partial M_D} = \frac{4}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} M\frac{\partial M}{\partial M_D} R\,d\theta = 0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_D} = 1$$

$$\frac{4}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(M_D + \frac{\gamma A R^2\omega^2\sin^2\theta}{2g}\right) R\,d\theta = 0,$$

$$\left| M_D\,\theta + \frac{\gamma A R^2\omega^2}{2g}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$M_D = -\frac{\gamma A R^2\omega^2}{4g}. \tag{4}$$

Înlocuind această valoare în formula (3), rezultă:

$$M = -\frac{\gamma A R^2\omega^2}{4g} + \frac{\gamma A R^2\omega^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{\gamma A R^2\omega^2}{2g}\left(\sin^2\theta - \frac{1}{2}\right). \tag{5}$$

Cu ajutorul acestei relaţii, se construieşte diagrama momentelor încovoietoare. Se vede că momentul se anulează la $\theta = 45°$. În punctul A, pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, momentul are valoarea

$$M_A = \frac{\gamma A R^2\omega^2}{4g}, \tag{6}$$

adică este egal şi de sens contrar celor din D. Diagrama de momente este reprezentată în figura 13.7, *d*.

13.8. Inelul subţire din problema 13.7 are axa de rotaţie AB tangentă la contur (fig. 13.8). Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare datorite forţelor de inerţie cînd inelul se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în jurul acestei axe.

Rezolvare. Se stabileşte, ca şi în cazul din problema 13.7, forţa de inerţie pe unitatea de lungime a arcului de cerc, într-o secţiune care face unghiul θ cu diametrul perpendicular pe axa de rotaţie:

$$f = \frac{\gamma A}{g} r\omega^2 = \frac{\gamma A}{g} R\omega^2(1 - \cos\theta). \tag{1}$$

În punctul O apare forţa F de legătură dintre axă şi inel, care este egală cu rezultanta forţelor de inerţie

$$F = \int_0^{2\pi} f(\theta)\,ds = 2\int_0^\pi \frac{\gamma A}{g} R\omega^2(1 - \cos\theta)\,R\,d\theta = \frac{2\pi\gamma A R^2\omega^2}{g}. \tag{2}$$

Sistemul din figura 13.8, *a* este un contur închis, de trei ori static nedeterminat, cu o axă de simetrie (diametrul OC) ceea ce permite reducerea gradului de nedeterminare cu o unitate.

Necunoscutele static nedeterminate se pun în evidenţă prin secţionarea inelului cu un plan care conţine axa de simetrie (figura 13.8, *b*). În secţiunea C forţa tăietoare este nulă, iar expresiile eforturilor M_c şi N_c în funcţie de necunoscutele X_1 şi X_2 se determină din ecuaţii de echilibru:

$$N_c - X_1 = 0$$

$$M_c - \int_0^\pi f(\theta)\,ds R\sin\theta - X_2 + X_1 \cdot 2R = 0.$$

Rezultă:

$$N_c = X_1 \tag{3}$$

$$M_c = X_2 - X_1 \cdot 2R + \frac{2\gamma A R^2\omega^2}{g} = X_2 - X_1 \cdot 2R + \frac{FR}{\pi}. \tag{4}$$

Sistemul de ecuaţii care dă necunoscutele static nedeterminate are forma:

$$\begin{aligned} \delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} &= 0 \\ \delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

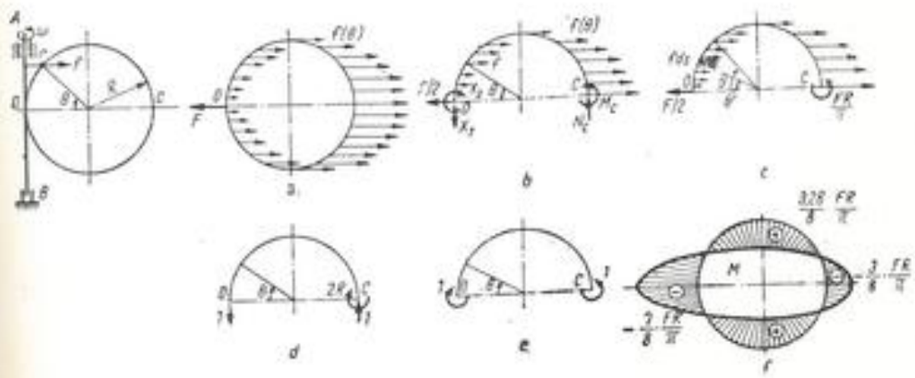


Fig. 13.8

Coeficienţii se calculează cu ajutorul sistemelor auxiliare reprezentate în figurile 13.8, *c*, *d*, *e*. În secţiunea *C* s-au introdus eforturile necesare ca bara să rămînă în echilibru sub acţiunea forţelor aplicate asupra ei, în fiecare caz de încărcare.

Momentele încovoietoare necesare la calculul coeficienţilor $\delta_{10}, \ldots, \delta_{22}$ au expresiile (Fig. 13.8, *c*, *d*, *e*):

$$M^0(\theta) = \frac{F}{2} R \sin\theta \int_0^\theta f(\theta')\, ds(R\sin\theta - R\sin\theta') = \frac{F}{2} R \sin\theta \times$$

$$\times \frac{\gamma A}{g} R^2\omega^2 \left[\int_0^\theta (1-\cos\theta')\sin\theta\, d\theta' - \int_0^\theta (1-\cos\theta')\sin\theta'\, d\theta'\right] =$$

$$= \frac{FR}{2\pi}\left[(\pi-\theta)\sin\theta - \cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{2} + 1\right]$$

$$m_1(\theta) = -R(1-\cos\theta)$$
$$m_2(\theta) = 1.$$

Coeficienţii $\delta_{10}, \ldots, \delta_{22}$ se calculează prin integrare:

$$EI\delta_{10} = \int_0^\pi M^0(\theta) m_1(\theta) ds = -\frac{5}{4} FR^3$$

$$EI\delta_{20} = \int_0^\pi M^0(\theta)\, m_2(\theta)\, ds = \frac{9}{8} FR^2$$

$$EI\delta_{11} = \int_0^\pi m_1^2(\theta)\, ds = \frac{3}{2}\pi R^3 \qquad (6)$$

$$EI\delta_{12} = \int_0^\pi m_1(\theta) m_2(\theta)\, ds = -\pi R^2$$

$$EI\delta_{22} = \int_0^\pi m_2^2(\theta)\, ds = \pi R.$$

Înlocuind expresiile (6) în sistemul (5) se obţine:

$$-\frac{5}{4} FR^3 + X_1 \cdot \frac{3}{2}\pi R^3 - X_2 \cdot \pi R^2 = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{9}{8} FR^2 - X_1 \cdot \pi R^2 + X_2 \cdot \pi R = 0.$$

Soluţiile sistemului (7) sînt:

$$X_1 = \frac{F}{4\pi}, \quad X_2 = -\frac{7FR}{8\pi}.$$

Expresia momentului încovoietor într-o secţiune oarecare a inelului solicitat prin forţe de inerţie se obţine utilizînd relaţia (11.13):

$$M(\theta) = M^0(\theta) + X_1 \cdot m_1(\theta) + X_2 m_2(\theta) =$$

$$= \frac{FR}{8\pi}[4(\pi-\theta)\sin\theta - 2\cos\theta + 2\sin^2\theta - 5].$$

Diagrama de momente încovoietoare este prezentată în figura 13.8, *f*.

13.9. Un volant, considerat ca o coroană circulară de grosime mică şi rază medie R, avînd secţiunea obezii A, este montat, din greşeală, înclinat cu unghiul θ faţă de planul normal pe arbore, aşa cum se arată în figura 13.9. Să se calculeze momentul încovoietor produs din această cauză în arbore, precum şi efortul unitar cauzat de acest moment. Aplicaţie numerică: $A = 240$ cm², $R = 100$ cm, $\omega = 31{,}4$ rad/s, $\gamma = 7{,}25 \cdot 10^{-3}$ daN/cm³, $\theta = \frac{1^\circ}{2}$, diametrul arborelui $d = 10$ cm. Volantul este aşezat în consolă.

Rezolvare. Asupra unui element de masă lucrează o forţă de inerţie radială:

$$df = a \cdot dm = R\omega^2 \frac{\gamma A R d\alpha}{g} = \frac{\gamma A R^2\omega^2 d\alpha}{g}.$$

Ea are o componentă verticală.

$$df_v = df \sin\alpha = \frac{\gamma A R^2\omega^2 \sin\alpha\, d\alpha}{g}.$$

Pentru o jumătate din volant, aceste forţe verticale de inerţie dau o rezultantă F_v:

$$F_v = \int_0^\pi df_v = \int_0^\pi \frac{\gamma A R^2\omega^2}{g} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{2\gamma A R^2\omega^2}{g}. \qquad (1)$$

Punctul de aplicaţie G al acestei forţe se află prin teorema momentelor statice:

$$OG = \frac{\int df_v y}{F_v} = \frac{\int_0^\pi \frac{\gamma A R^2\omega^2}{g} \sin\alpha\, dx \cdot R \sin\alpha}{\frac{2\gamma A R^2\omega^2}{g}} = \frac{\pi R}{4}.$$

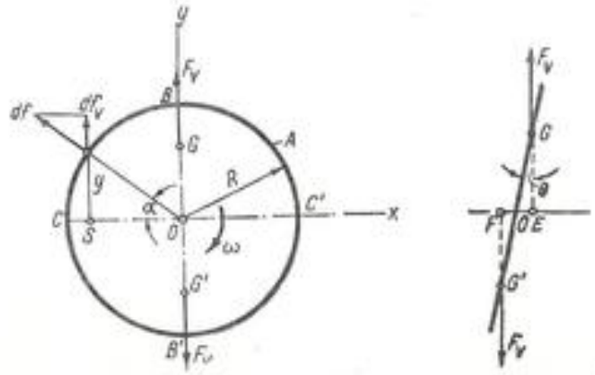


Fig. 13.9

Conform figurii 13.9, momentul forţelor F_v faţă de punctul O este:

$$M = F_v \cdot EF = F_v \cdot 2 \quad OG \sin\theta = \frac{2\gamma A R^2 \omega^2}{g} \cdot \frac{\pi R}{2} \sin\theta,$$

$$M = \frac{\pi \gamma A R^3 \omega^2 \sin\theta}{g}. \tag{2}$$

Acesta este cuplul pe care volantul înclinat îl produce asupra arborelui. Efortul unitar produs de el este

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{\pi \gamma A R^3 \omega^2 \sin\theta}{g} \cdot \frac{32}{\pi d^3} = \frac{32 \gamma A R^3 \omega^2 \sin\theta}{g d^3}. \tag{3}$$

În cazul aplicaţiei numerice, rezultă:

$$\sin\theta = \sin 30' = 0{,}00873.$$

$$\sigma = \frac{32 \cdot 7{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 240 \cdot 100^3 \cdot 31{,}4^2 \cdot 0{,}00873}{981 \cdot 10^3} = 487 \text{ daN/cm}^2.$$

Se vede că rezultă o valoare destul de mare, care, adăugîndu-se solicitării utile a arborelui, poate fi periculoasă. Rezultă necesitatea unui montaj cît mai corect al volantului pe arbore.

13.10. Paleta unei turbine are secţiunea variabilă liniar, după relaţia:

$$A = A_1 + (A_2 - A_1)\frac{r - R_1}{l}.$$

Să se calculeze efortul unitar în secţiunea A_1 dacă se dau: $R_1 = 60$ cm, $R_2 = 90$ cm, lungimea paletei $l = R_2 - R_1 = 30$ cm, turaţia discului $n = 3\,000$ rot/min, raportul între secţiunea maximă şi cea minimă $\frac{A_2}{A_1} = 1{,}6$ (Fig. 13.10).

Rezolvare. Forţa de inerţie maximă se obţine de relaţia (1), problema 13.1, înlocuind x cu r şi efectuînd integrarea pe toată lungimea paletei:

$$N_{max} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\gamma A r \omega^2 dr}{g} = \frac{\gamma\omega^2}{g} \int_{R_1}^{R_2} \left[A_1 + (A_2 - A_1)\frac{r - R_1}{l}\right] r dr.$$

Integrînd se obţine:

$$N_{max} = \frac{\gamma\omega^2 l}{g}\left\{\left[A_1 - \frac{R_1}{l}(A_2 - A_1)\right]\frac{R_1 + R_2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{A_2 - A_1}{l} \cdot \frac{R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2}{3}\right\} =$$

$$= \frac{\gamma\omega^2 l}{6g}\left[(2R_1 + R_2)A_1 + (2R_2 + R_1)A_2\right]. \tag{1}$$

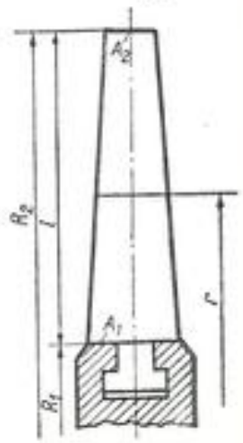


Fig. 13.10

Efortul unitar în secţiunea A_1 este:

$$\sigma_1 = \frac{N_{max}}{A_1} = \frac{\gamma\omega^2 l}{6g}\left[2R_1 + R_2 + (2R_2 + R_1)\frac{A_2}{A_1}\right]. \tag{2}$$

Înlocuind datele numerice se obţine:

$$\sigma_1 = \frac{7{,}85 \cdot 10^{-3} \cdot 314^2 \cdot 30}{6 \cdot 981}\left[2 \cdot 60 + 90 + (2 \cdot 90 + 60)\frac{1}{1{,}6}\right] = 1\,420 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

13.11. Să se determine variaţia eforturilor unitare σ_r şi σ_t la un disc de oţel de grosime constantă, avînd raza exterioară $R_2 = 750$ mm, raza interioară $R_1 = 150$ mm, dacă discul se roteşte cu $n = 2\,000$ rot/min.

Rezolvare. Variaţia eforturilor unitare σ_t se obţine din relaţia (13.5), unde $p_i = p_e = 0$:

$$\sigma_t = \frac{3 + \mu}{8}\frac{\gamma\omega^2}{g}\left(R_2^2 + R_1^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2}\right). \tag{1}$$

Efortul unitar la exteriorul discului se obţine înlocuind $r = R_2$:

$$(\sigma_{t2})_{r=R_2} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[(3 + \mu)R_1^2 + (1 - \mu)R_2^2\right] =$$

$$= \frac{7{,}85 \cdot 210^2}{1\,000 \cdot 4 \cdot 981}\left[(3 + 0{,}3) \cdot 15^2 + (1 - 0{,}3) \cdot 75^2\right] = 413 \text{ daN/cm}^2$$

unde:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 2\,000}{30} = 210 \text{ rad/s}.$$

Efortul unitar la interiorul discului:

$$(\sigma_{t1})_{r=R_1} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[(3 + \mu)R_2^2 + (1 - \mu)R_1^2\right] =$$

$$= \frac{7{,}85 \cdot 210^2}{1\,000 \cdot 4 \cdot 981}\left[(3 + 0{,}3) \cdot 75^2 + (1 - 0{,}3) \cdot 15^2\right] = 1\,650 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar σ_r este nul în punctele extreme, deoarece $p_i = p_e = 0$. Variaţia efortului unitar σ_r se obţine din formula (13.4):

$$\sigma_r = \frac{3 + \mu}{8} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g}\left(R_2^2 + R_1^2 - r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2}\right). \tag{2}$$

Pentru determinarea efortului σ_r maxim se derivează formula (2) şi se anulează derivata:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{3 + \mu}{8}\frac{\gamma\omega^2}{g}\left(-2r + \frac{2R_1^2 R_2^2}{r^3}\right) = 0,$$

de unde:

$$r = \sqrt[4]{R_1^2 R_2^2} = \sqrt{R_1 R_2} = \sqrt{15 \cdot 75} = 33{,}6 \text{ cm}. \tag{3}$$

Înlocuind valoarea (3) în relaţia (2) se obţine valoarea maximă a lui σ_r

$$(\sigma_{r\,max})_{r=\sqrt{R_1R_2}} = \frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma\omega^2}{g}(R_2-R_1)^2 =$$

$$= \frac{3+0{,}3}{8}\cdot\frac{7{,}85\cdot 210^2}{1\,000\cdot 981}(75-15)^2 =$$

$$= 525 \text{ daN/cm}^2. \qquad (4)$$

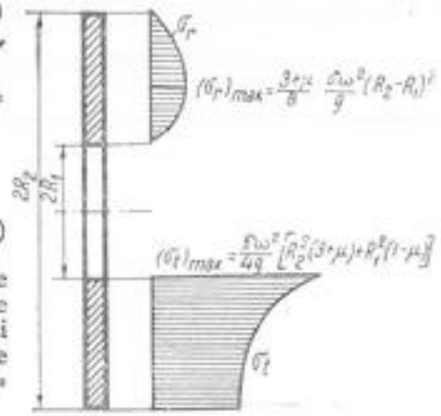


Fig. 13.11

Cu aceste valori şi ţinînd seamă de relaţiile (1) şi (2) se trasează diagramele de variaţie ale eforturilor unitare σ_r şi σ_t (Fig. 13.11). Din diagrame se vede că efortul unitar maxim este $\sigma_{t1} = 1\,650$ daN/cm².

13.12. Să se determine grosimea minimă necesară h a discului de oţel al unui ventilator, astfel ca efortul maxim să nu depăşească $\sigma_{t\,max} = 1\,000$ daN/cm². Se dau: raza exterioară a discului $R_2 = 25$ cm; raza interioară $R_1 = 5$ cm; turaţia ventilatorului $n = 3\,800$ rot/min. Discul are $z = 12$ palete, care, datorită inerţiei, acţionează fiecare cu o forţă $P = 920$ daN.

Rezolvare. Efortul unitar $\sigma_{t\,max}$ se obţine din relaţia (13.5), pentru $r = R_1$ şi înlocuind, pentru cazul din problemă, $p_i = 0$;

$$\sigma_{t\,max} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[R_2^2(3+\mu) + R_1^2(1-\mu)\right] + \frac{2p_eR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Înlocuind valorile cunoscute, se obţine:

$$1\,000 = \frac{7{,}85}{1\,000}\frac{\left(\frac{\pi\cdot 3\,800}{30}\right)^2}{4\cdot 981}\left[25^2(3+0{,}3) + 5^2(1-0{,}3)\right] + \frac{2p_e\cdot 25^2}{25^2-5^2}.$$

$$1\,000 = 655 + 2{,}08\,p_e;$$

$$p_e = 165 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar la periferia discului, dat de forţa de inerţie a paletelor, este:

$$p_e = \frac{zP}{2\pi R_2 h}.$$

Grosimea h este atunci:

$$h = \frac{zP}{2\pi R_2 p_e} = \frac{12\cdot 920}{2\cdot\pi\cdot 25\cdot 165} = 0{,}425 \text{ cm}.$$

Valoarea h, astfel obţinută, este grosimea minimă necesară a discului.

13.13. Pentru ca în timpul funcţionării discul unui ventilator să păstreze contactul cu arborele pe care este aşezat, se fretează discul pe arbore. Să se calculeze grosimea de fretaj pentru disc, dacă se dau: raza exterioară $R_2 = 50$ cm, raza interioară $R_1 = 10$ cm, turaţia $n = 2\,000$ rot/min. În timpul funcţionării trebuie să existe între disc şi arbore o presiune $p = 50$ daN/cm².

Rezolvare. Se notează cu $2R_1$ diametrul interior al discului şi cu $2R_1'$ diametrul exterior al arborelui, u_1 deplasarea radială a discului şi u_1' deplasarea radială a arborelui. Condiţia de deformaţie pentru ansamblul format de arbore şi disc este:

$$2R_1 + 2u_1 = 2R_1' + 2u_1'.$$

Grosimea de fretaj este:

$$\delta = R_1' - R_1 = u_1 - u_1'. \qquad (1)$$

Deplasările radiale se pot scrie, conform formulei (13.6):

$$u_1 = \frac{R_1}{E}(\sigma_{t_1} - \mu\sigma_{r_1}); \qquad (2)$$

$$u_1' = \frac{R_1}{E}(\sigma_{t_1}' - \mu\sigma_{r_1}'). \qquad (3)$$

Introducînd valorile (2) şi (3) în relaţia (1) se obţine:

$$\delta = u_1 - u_1' = \frac{R_1}{E}(\sigma_{t_1} - \mu\sigma_{r_1} - \sigma_{t_1}' + \mu\sigma_{r_1}'). \qquad (4)$$

Deoarece în punctul de contact dintre disc şi arbore se cunosc eforturile unitare $\sigma_{r_1} = \sigma_{r_1}' = p$, relaţia (4) devine:

$$\delta = \frac{R_1}{E}(\sigma_{t_1} - \sigma_{t_1}'). \qquad (5)$$

Eforturile unitare σ_{r_1} şi σ_{t_1}' depind de presiunea p dintre disc şi arbore. În cazul din problemă, efortul unitar σ_{t_1} din disc se obţine din relaţia (13.8). Înlocuind $r = R_1$, $p_e = 0$ şi $p_i = p = 50$ daN/cm²:

$$\sigma_{t_1} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[R_2^2(3+\mu) + R_1^2(1-\mu)\right] + p\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \qquad (6)$$

Efortul unitar σ_{t_1}' la exteriorul arborelui este dat de relaţia (13.8), în care se înlocuieşte R_2 cu R_1, $p_e = -p = -50\,\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$ (pentru a se ţine seama de sensul real al efortului) şi $r = R_1$

$$\sigma_{t_1}' = R_1^2(1-\mu)\frac{\gamma\omega^2}{4g} - p. \qquad (7)$$

Făcînd înlocuiri, rezultă

$$\delta = \frac{R_1}{E}(\sigma_{t_1} - \sigma'_{t_1}) = \frac{R_1 R_2^2}{E}\left[\frac{\gamma\omega^2}{4g}(3+\mu) + \frac{2p}{R_2^2 - R_1^2}\right]. \qquad (8)$$

Înlocuind datele numerice se obține:

$$\delta = \frac{10 \cdot 50^2}{2{,}1 \cdot 10^6}\left[\frac{7{,}85}{1\,000}\left(\frac{\pi \cdot 2\,000}{30}\right)^2 \frac{(3+0{,}3)}{4 \cdot 981} + \frac{2 \cdot 50}{50^2 - 10^2}\right] = 3{,}94 \cdot 10^{-2} \simeq 4 \cdot 10^{-2} =$$

$$= 0{,}004 \text{ cm} = 0{,}04 \text{ mm}.$$

Diametrul arborelui trebuie să fie:

$$2R'_1 = 2R_1 + 2\delta = 2 \cdot 100 + 2 \cdot 0{,}04 = 200{,}08 \text{ mm}.$$

Efortul unitar maxim în disc se obține din formula (6):

$$\sigma_{t_1} = \frac{7{,}85}{1\,000} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 2\,000}{30}\right)^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot 981}\left[50^2(3+0{,}3) + 10^2(1-0{,}3)\right] +$$

$$+ 50\,\frac{50^2 + 10^2}{50^2 - 10^2} = 793 \text{ daN/cm}^2.$$

13.14. Grosimea discului din figura 13.14, *a* variază brusc, de la h la h', la distanța R de la centru. Să se calculeze — pe baza condițiilor de echilibru și continuitate a deformației unui element de volum izolat din disc — variația eforturilor unitare σ_r și σ_t, datorită saltului de grosime, produsă în zona unde are loc acest salt.

Rezolvare. a) Variația efortului unitar σ_r se determină pe baza condiției de echilibru a elementului de volum izolat din disc, ca în figura 13.14, *b*, unde s-au notat cu σ_r și σ_t eforturile unitare corespunzătoare porțiunii de grosime h, respectiv σ'_r și σ'_t cele corespunzătoare grosimii h'.

Din ecuația de proiecții a forțelor pe bisectoarea unghiului $d\varphi$, se obține (înlocuind $\sin d\varphi \approx d\varphi$)

$$\sigma_r (R - dr)\, h d\varphi - \sigma'_r (R + dr') h' d\varphi + 2\sigma'_t h' dr' \frac{d\varphi}{2} +$$

$$+ 2\sigma_t h\, dr \frac{d\varphi}{2} - \frac{\gamma}{g} R^2\omega^2 h' dr' d\varphi - \frac{\gamma}{g} R^2\omega^2 h\, dr\, d\varphi = 0. \qquad (1)$$

În această ecuație, ultimii doi termeni reprezintă pe dF' și dF din figura 13.14, *b*. Se simplifică:

$$\sigma_r R h - \sigma'_r R h' - \sigma_r h dr - \sigma'_r h' dr' + \sigma'_t h' dr' +$$

$$+ \sigma_t h\, dr - \frac{\gamma}{g} h' R^2 \omega^2 dr' - \frac{\gamma}{g} h R^2 \omega^2 dr = 0. \qquad (2)$$

Se observă că, afară de primii doi termeni, ceilalți sînt infiniți mici, care se pot neglija, astfel că se obține:

$$\sigma_r h = \sigma'_r h'\,; \quad \sigma'_r = \sigma_r \frac{h}{h'}. \qquad (3)$$

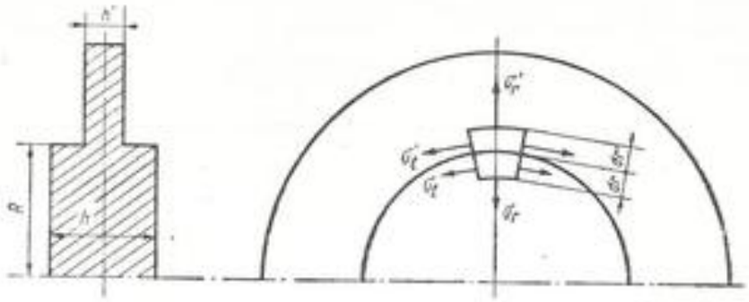


Fig. 13.14, *a*

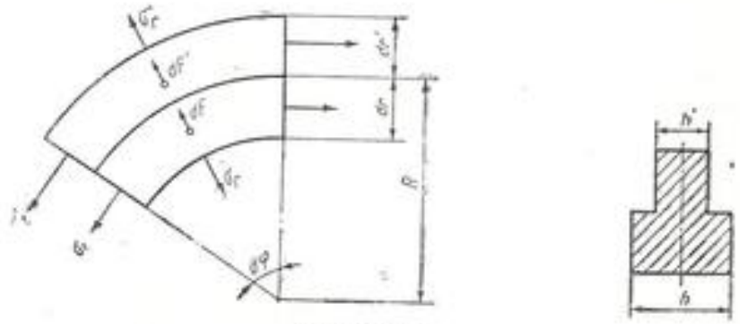


Fig. 13.14, *b*

b) Variația efortului unitar σ_t se obține din condiția ca cele două porțiuni de grosime diferită, ce formează elementul de volum izolat, să aibă aceeași deplasare u la raza R. Se aplică relația (13.6):

$$u_R = u'_R = \frac{R}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r) = \frac{R}{E}(\sigma'_t - \mu\sigma'_r),$$

$$\sigma_t - \sigma'_t = \mu(\sigma_r - \sigma'_r)\,; \quad \sigma'_t = \sigma_t + \mu\sigma_r\left(\frac{h}{h'} - 1\right). \qquad (4)$$

Variațiile de eforturi unitare la saltul de grosime sînt date de relațiile (3) și (4).

13.15. Să se calculeze variația eforturilor unitare la discul cu salt de grosime din figura 13.15, *a*, știind că discul se rotește cu $n = 3\,000$ rot/min. Discul este solicitat la exterior de un efort $p_e = 203$ daN/cm² și la interior de unul $p_i = 80$ daN/cm². Dimensiunile discului sînt: $R_1 = 17{,}5$ cm, $R_2 = 26$ cm, $R_3 = 41{,}8$ cm, $h = 9$ cm, $h' = 3$ cm.

Observație. Se vor utiliza rezultatele problemei 13.14.

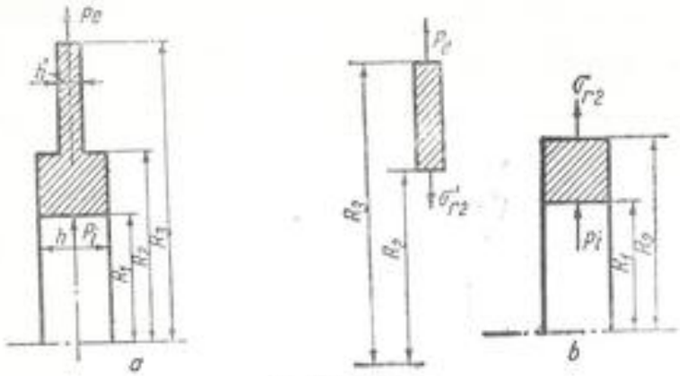


Fig. 13.15, *a*, *b*

Rezolvare. Se izolează obada de butuc, ca în figura 13.15, *b*, înlocuind influenţa butucului asupra obezii cu efortul σ'_{r_2} şi influenţa obezii asupra butucului cu σ_{r_2}. Eforturile σ_{r_2} şi σ'_{r_2} sînt diferite din cauza variaţiei de grosime a discului.

Expresia eforturilor unitare pentru obadă şi pentru butuc, la o rază oarecare r, se obţine din ecuaţiile 13.4 şi 13.5 cu următoarele schimbări:

— Pentru obadă se înlocuiesc R_1 cu R_2, R_2 cu R_3 şi p_i cu $-\sigma'_{r_2}$ cu semnul minus, deoarece σ'_r are sens invers decît în figura 13-*b*.

$$\sigma'_t = \frac{\gamma\omega^2}{8g}\left[(3+\mu)\left(R_2^2 + R_3^2 + \frac{R_2^2R_3^2}{r^2}\right) - (1+3\mu)r^2\right] + \\ + p_e\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}\left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right) - \sigma'_{r_2}\frac{R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\left(1 + \frac{R_3^2}{r^2}\right). \tag{1}$$

$$\sigma'_r = \frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)\frac{(R_2^2 - r^2)(r^2 - R_3^2)}{r^2} + \\ + p_e\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}\left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right) - \sigma'_r\frac{R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\left(1 - \frac{R_3^2}{r^2}\right). \tag{2}$$

— Pentru butuc se înlocuieşte p_e cu σ_{r_2}, ecuaţiile rămînînd în rest neschimbate:

$$\sigma_t = \frac{\gamma\omega^2}{8g}\left[(3+\mu)\left(R_2^2 + R_1^2 + \frac{R_2^2R_1^2}{r^2}\right) - (1+3\mu)r^2\right] + \\ + \sigma_{r_2}\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right) + p_i\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right). \tag{3}$$

$$\sigma_r = \frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\mu)\frac{(R_2^2 - r^2)(r^2 - R_1^2)}{r^2} + \sigma_{r_2}\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right) + \\ + p_i\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right). \tag{4}$$

În relaţiile (1) — (4) sînt necunoscute eforturile unitare σ_{r_2} şi σ'_{r_2}, care se determină pe baza condiţiilor (3) şi (4) din problema 13.14, în punctul $r = R_2$ unde variază brusc grosimea discului:

$$\sigma'_{r_2} = \sigma_{r_2}\frac{h}{h'}, \tag{5}$$

$$\sigma_{t_2} - \sigma'_{t_2} = \mu(\sigma_{r_2} - \sigma'_{r_2}). \tag{6}$$

Efortul unitar σ'_{t_2} în obadă, în punctul 2, se determină din relaţia (1) unde se înlocuieşte r cu R_2:

$$\sigma'_{t_2} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[(3+\mu)R_2^2 + (1-\mu)R_3^2\right] + p_e\frac{2R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} - \sigma'_{r_2}\frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}. \tag{7}$$

Efortul unitar σ_{t_2} în butuc, în punctul 2, se găseşte din relaţia (3), înlocuind r cu R_2:

$$\sigma_{t_2} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[(3+\mu)R_2^2 + (1-\mu)R_1^2\right] + \sigma_{r_2}\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + p_i\frac{2R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{8}$$

Înlocuind valorile (7) şi (8) în relaţia (6), se obţine:

$$\frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[(3+\mu)R_1^2 + (1-\mu)R_2^2 - (3+\mu)R_2^2 - (1-\mu)R_3^2\right] + \sigma_{r_2}\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \\ + \sigma'_{r_2}\frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} + p_i\frac{2R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - p_e\frac{2R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} = \mu(\sigma_{r_2} - \sigma'_{r_2}).$$

Utilizînd şi relaţia (5) se obţine:

$$\sigma_{r_2} = \frac{\frac{\gamma\omega^2}{4g}(3+\mu)(R_2^2 - R_1^2) + \frac{2R_2^2p_e}{R_3^2 - R_2^2} - \frac{2R_1^2p_i}{R_2^2 - R_1^2}}{\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}\cdot\frac{h}{h'} + \mu\left(\frac{h}{h'} - 1\right)}. \tag{9}$$

$$\sigma_{r_2} = \frac{\frac{7{,}85\cdot 10^{-3}\cdot 314^2}{4\cdot 981}(3+0{,}3)(41{,}8^2 - 17{,}5^2) + \frac{2\cdot 41{,}8^2\cdot 203}{41{,}8^2 - 26^2} - \frac{2\cdot 17{,}5^2\cdot 80}{26^2 - 17{,}5^2}}{\frac{26^2 + 17{,}5^2}{26^2 - 17{,}5^2} + \frac{41{,}8^2 + 26^2}{41{,}8^2 - 26^2}\cdot\frac{9}{3} + 0{,}3\left(\frac{9}{3} - 1\right)} = \\ = 146\,\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma'_{r_2} = \sigma_{r_2}\cdot\frac{h}{h'} = 146\,\frac{9}{3} = 438\,\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Înlocuind aceste valori în relațiile (1) — (4) se determină expresiile variațiilor eforturilor unitare pentru obadă și pentru butuc.

Diagramele de variație a eforturilor unitare, ținînd seama de aceste relații, sînt reprezentate în figura 13.15, *c*. Valorile eforturilor unitare sînt trecute pe diagramă.

13.16. Pe o bară cu diametrul $d = 55$ mm și lungimea $l = 1$ m, cade un berbec cu greutatea $P = 1\,000$ daN, de la înălțimea $h = 1$ cm. Să se verifice bara, dacă este confecționată din oțel cu $\sigma_a = 1\,800$ daN/cm² (Fig. 13.16).

Rezolvare. Piesa fiind supusă la șoc, efortul unitar dinamic este dat de relația (13.12):

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st}.$$

Efortul unitar static este:

$$\sigma_{st} = \frac{P}{A} = \frac{1\,000}{\frac{\pi \cdot 5{,}5^2}{4}} = 42{,}1 \text{ daN/cm}^2.$$

Deformația statică a barei este:

$$\delta_{st} = \frac{Pl}{EA} = \frac{1\,000 \cdot 100}{2{,}1 \cdot 10^6 \frac{\pi \cdot 5{,}5^2}{4}} = 0{,}002 \text{ cm}.$$

Coeficientul dinamic are valoarea:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0{,}002}} = 32{,}6.$$

Efortul unitar dinamic:

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st} = 32{,}6 \cdot 42{,}1 = 1\,372 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

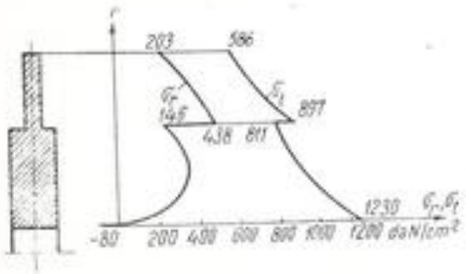


Fig. 13.15, *c*

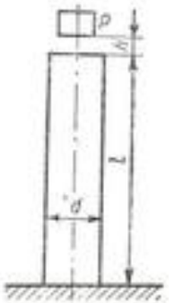


Fig. 13.16

13.17. Să se verifice piesa dată în problema (13.16) în cazul cînd este strunjită, din motive constructive, pe o porțiune $l_1 = 10$ cm la un diametru $d_1 = 45$ mm (Fig. 13.17, *a*). Se neglijează efectul variației de secțiune.

Rezolvare. Deformația statică a barei este, în acest caz, diferită de cea din problema (13.16):

$$\delta_{st} = \frac{Pl_1}{EA_1} + \frac{P(l - l_1)}{EA} = \frac{P}{E}\left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l - l_1}{A}\right) =$$

$$= \frac{1\,000}{2{,}1 \cdot 10^6}\left(\frac{10}{\frac{\pi \cdot 4{,}5^2}{4}} + \frac{90}{\frac{\pi \cdot 5{,}5^2}{4}}\right) = 0{,}0021 \text{ cm}.$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0{,}0021}} = 31{,}9.$$

Efortul unitar maxim apare în secțiunea slăbită:

$$\sigma_{st} = \frac{P}{A_1} = \frac{1\,000}{\frac{\pi \cdot 4{,}5^2}{4}} = 63 \text{ daN/cm}^2.$$

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st} = 31{,}9 \cdot 63 = 2\,010 \text{ daN/cm}^2 > \sigma_a.$$

Efortul unitar dinamic depășește rezistența admisibilă cu 11,7%. Piesa nu poate fi utilizată cu dimensiunile date. Pentru micșorarea efortului unitar dinamic, este necesară mărirea deformației statice a barei, care se poate obține reducînd dimensiunile întregii bare, ca în figura 13.17, *b*, prin strunjirea la diametrul d_1.

În acest caz:

$$\delta_{st} = \frac{Pl}{EA_1} = \frac{1\,000 \cdot 100}{2{,}1 \cdot 10^6 \frac{\pi \cdot 4{,}5^2}{4}} = 0{,}003 \text{ cm},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0{,}003}} = 26{,}8,$$

$$\sigma_{st} = \frac{P}{A_1} = 63 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st} = 26{,}8 \cdot 63 = 1\,688 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

Se vede că deși s-au redus dimensiunile piesei, efortul unitar efectiv a scăzut sub rezistența admisibilă, deci piesa cu aceste noi dimensiuni poate funcționa.

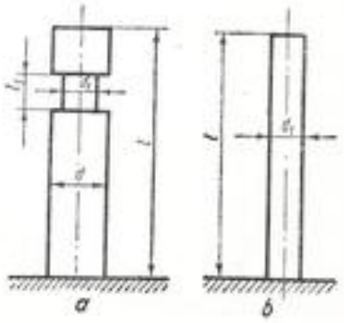


Fig. 13.17

13.18. De pe o tobă se desfășoară un cablu 26 × 6 × 37 — 180/B-Z/Z STAS

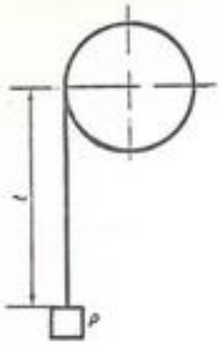


Fig. 13.18

1353–71, cu secţiunea $A = 250{,}9$ mm², care suportă o greutate $P = 12$ kN ce coboară cu viteza $v = 1$ m/s. După ce s-a desfăşurat o lungime $l = 10$ m din cablu, toba se blochează brusc (Fig. 13.18). Se cere să se calculeze efortul unitar ce se produce în cablu.

Rezolvare. Efortul unitar dinamic este dat de relaţia (13.12), unde efortul unitar static este:

$$\sigma_{st} = \frac{P}{A} = \frac{1\,200}{2{,}509} = 478 \text{ daN/cm}^2,$$

iar multiplicatorul de impact este, după relaţia (13.15):

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{100^2}{981 \cdot 0{,}227}} = 7{,}8.$$

S-a înlocuit:

$$\delta_{st} = \frac{Pl}{EA} = \frac{1\,200 \cdot 1\,000}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 2{,}509} = 0{,}227 \text{ cm};$$

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st} = 7{,}8 \cdot 478 = 3\,720 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar are o valoare foarte mare, care se poate totuşi admite, deoarece rezistenţa de rupere a cablului considerat este:

$$\sigma_r = 180 \text{ daN/mm}^2 = 18\,000 \text{ daN/cm}^2.$$

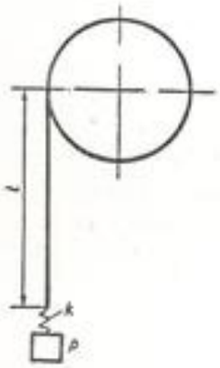


Fig. 13.19

13.19. Să se rezolve problema precedentă, dacă între cablu şi greutate se introduce un arc amortizor avînd constanta elastică $k = 4$ kN/cm (Fig. 13.19).

Rezolvare. Datorită introducerii arcului, deformaţia statică va fi, sub acţiunea forţei P, mai mare, deci se va micşora multiplicatorul de impact:

$$\delta_{st} = \frac{Pl}{EA} + \frac{P}{k} = \frac{1\,200 \cdot 1\,000}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 2{,}51} + \frac{12}{4} =$$
$$= 0{,}227 + 3 = 3{,}227 \text{ cm},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{100^2}{981 \cdot 3{,}227}} = 3{,}04.$$

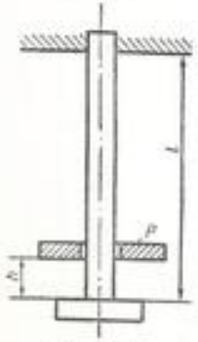


Fig. 13.20

Deoarece efortul static în cablu rămîne acelaşi, efortul dinamic are valoarea:

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st} = 3{,}04 \cdot 478 = 1\,450 \text{ daN/cm}^2.$$

Se vede că introducerea arcului amortizor a micşorat efortul unitar de 2,56 ori.

13.20. Asupra unei tije de oţel de lungime $l = 2$ m cade o greutate $P = 50$ daN, de la o înălţime $h = 1$ cm. Să se dimensioneze tija dacă rezistenţa admisibilă este $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm² (Fig. 13.20).

Rezolvare. Pentru dimensionare se pune condiţia ca efortul unitar dinamic maxim să fie cel mult egal cu rezistenţa admisibilă:

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st} = \sigma_a. \tag{1}$$

Înlocuind pe ψ şi σ_{st} se obţine:

$$\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}\right)\frac{P}{A} = \sigma_a, \tag{2}$$

$$1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = \frac{\sigma_a A}{P}.$$

Înlocuind în relaţia (2) pe:

$$\delta_{st} = \frac{Pl}{EA},$$

izolînd radicalul şi ridicînd la pătrat se obţine:

$$A = \frac{2\,EPh}{\sigma_a^2 l} + \frac{2P}{\sigma_a} = \frac{2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 1}{1\,400^2 \cdot 200} + \frac{2 \cdot 50}{1\,400} = 0{,}536 + 0{,}071 = 0{,}607 \text{ cm}^2.$$

Se obţine un diametru $d = 9$ mm.

13.21. Un cilindru de oţel de secţiune A şi lungime l cade pe o nicovală nedeformabilă cu viteza $v = 2$ m/s. Să se găsească efortul unitar maxim, dacă $\gamma = 7{,}85$ daN/dm³ (Fig. 13.21).

Rezolvare. Se presupune că acceleraţia a a fiecărui punct al cilindrului este aceeaşi în momentul şocului. Forţa de inerţie într-o secţiune oarecare este:

$$P_x = m \cdot a = \frac{Ax\gamma}{g}a, \tag{1}$$

iar efortul unitar:

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A} = \frac{ax\gamma}{g}. \tag{2}$$

Efortul unitar maxim apare pe suprafaţa de contact, unde $x = l$:

$$\sigma_{max} = \frac{al\gamma}{g}. \tag{3}$$

Împărţind relaţiile (2) şi (3) se obţine:

$$\sigma_x = \sigma_{max}\frac{x}{l}. \tag{4}$$

Mărimea efortului unitar σ_{max} se determină pe baza egalităţii energiei cinetice a cilindrului în momentul şocului, cu energia de deformaţie:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\frac{Al\gamma}{2g}v^2, \tag{5}$$

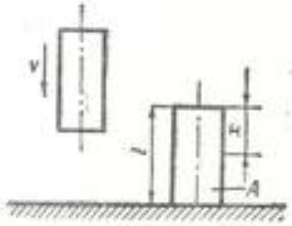


Fig. 13.21

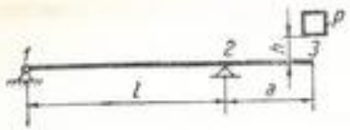


Fig. 13.22

$$dE_d = \frac{\sigma_s^2}{2E}\,dV = \frac{\sigma_s^2}{2E}\,dx A = \frac{\sigma_{max}^2}{2E}\,\frac{x^2}{l^2}\,dA\,x,$$

$$E_d = \int_0^l dE_d = \int_0^l \frac{\sigma_{max}^2}{2E}\cdot\frac{A}{l^2}\cdot x^2 dx = \frac{\sigma_{max}^2}{6E}\,Al.$$

Egalînd expresiile (5) şi (6) se obţine:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{Al\gamma}{g}\,v^2 = \frac{\sigma_{max}^2}{6E}\,Al,$$

$$\sigma_{max} = v\sqrt{\frac{3E\gamma}{g}} = 200\sqrt{\frac{3\cdot 2{,}1\cdot 10^6\,\frac{7{,}85}{1\,000}}{981}} = 1\,420\ \text{daN/cm}^2.$$

13.22. Să se calculeze efortul unitar maxim şi săgeata maximă care apar în grinda I 14 din figura 13.22 dacă la capătul consolei cade o greutate $P = 100$ daN, de la o înălţime $h = 5$ cm. Se dau $l = 2$ m, $a = 1$ m.

Rezolvare. Efortul unitar dinamic este dat de relaţia (13.12):

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st}.$$

Efortul unitar static este maxim în punctul *2*:

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W} = \frac{Pa}{W} = \frac{100\cdot 100}{81{,}9} = 122\ \text{daN/cm}^2.$$

Săgeata statică în punctul *3* este:

$$\delta_{st} = \delta_3 = \frac{Pa^2l}{3EI}\left(1+\frac{a}{l}\right) = \frac{100\cdot 100^2\cdot 200\left(1+\frac{100}{200}\right)}{2\cdot 2{,}1\cdot 10^6\cdot 573} = 0{,}083\ \text{cm},$$

unde $I = 573$ cm⁴.

Coeficientul dinamic are valoarea:

$$\psi = 1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}} = 1+\sqrt{1+\frac{2\cdot 5}{0{,}083}} = 12,$$

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st} = 12\cdot 122 = 1\,464\ \text{daN/cm}^2.$$

Săgeata maximă este:

$$\delta_d = \psi\delta_{st} = 12\cdot 0{,}083 \simeq 1\ \text{cm}.$$

13.23. Să se determine înălţimea maximă h de la care poate cădea liber o greutate $P = 30$ daN, în capătul unei grinzi de lemn în consolă, de lungime $l = 0{,}8$ m, astfel încît să nu se depăşească efortul unitar

admisibil $\sigma_a = 110$ daN/cm². Grinda are secţiunea dreptunghiulară constantă, de dimensiuni $B = 40$ cm şi $H = 8$ cm (Fig. 13.23, *a*); $E = 10^5$ daN/cm².

Să se recalculeze h în cazul cînd grinda ar avea secţiunea variabilă, corespunzător unei bare de egală rezistenţă la încovoiere, ideale (Fig. 13.23, *b*).

Rezolvare. Se foloseşte condiţia $\sigma_d = \sigma_a = \psi\sigma_{st}$, de unde înlocuind pe ψ cu expresia (13.14), se obţine:

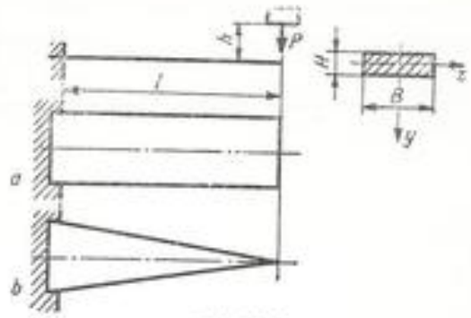


Fig. 13.23

$$h = \left[\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{st}}-1\right)^2-1\right]\frac{\delta_{st}}{2}.$$

$$\sigma_{st} = \frac{Pl}{W_z} = \frac{30\cdot 80\cdot 6}{40\cdot 8^2} = 5{,}62\ \text{daN/cm}^2.$$

a) În cazul grinzii de secţiune constantă:

$$\delta'_{st} = \frac{Pl^3}{3EI_z} = \frac{30\cdot 8^3\cdot 10^3\cdot 12}{3\cdot 10^5\cdot 8^3\cdot 40} = 3\cdot 10^{-2}\ \text{cm},$$

cu ajutorul căreia se obţine:

$$h' = [(19{,}5-1)^2-1]\frac{3\cdot 10^{-2}}{2} = 5{,}1\ \text{cm}.$$

b) În cazul barei de egală rezistenţă:

$$\delta''_{st} = \frac{Pl^3}{2EI_z} = \frac{3}{2}\,\delta'_{st};$$

rezultă:

$$h'' = \frac{3}{2}\,h' = 7{,}65\ \text{cm}.$$

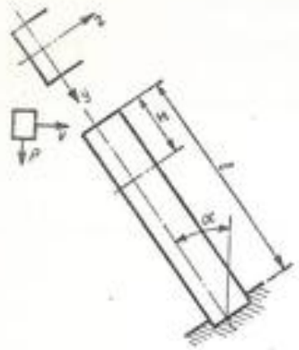


Fig. 13.24

13.24. O greutate $P = 50$ daN care se deplasează orizontal cu viteza $v = 1$ m/s lovește un profil ⋃ 30 de lungime $l = 2$ m, așezat ca în figura 13.24, încastrat în partea de jos.

Să se afle efortul unitar maxim în grindă, știind că $\alpha = 45°$.

Rezolvare. Fie Q forța de impact. Componenta $Q \cos \alpha$ produce încovoiere, iar componenta $Q \sin \alpha$, compresiune. Într-o secțiune oarecare, momentul încovoietor este $M = Qx \cos \alpha$, iar forța de compresiune, $Q \sin \alpha$. Energia de deformație este:

$$E_d = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI_y} + \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA} = \int_0^l \frac{Q^2 x^2 \cos^2 \alpha}{2EI_y} dx +$$

$$+ \int_0^l \frac{Q^2 \sin^2 \alpha}{2EA} dx = \frac{Q^2 l^3}{6EI_y}\left(\cos^2 \alpha + \frac{3I_y}{l^2 A} \sin^2 \alpha\right).$$

Energia cinetică a greutății este:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{2}.$$

Egalînd $E_d = E_c$, se obține:

$$\frac{Q^2 l^3}{6EI_y}\left(\cos^2 \alpha + \frac{3I_y}{l^2 A} \sin^2 \alpha\right) = \frac{Pv^2}{2g},$$

$$Q = \frac{v}{l}\sqrt{\frac{3PEI_y}{gl\left(\cos^2 \alpha + \frac{3I_y}{l^2 A} \sin^2 \alpha\right)}} =$$

$$= \frac{100}{200}\sqrt{\frac{3 \cdot 50 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 495}{981 \cdot 200 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3 \cdot 495}{4 \cdot 10^4 \cdot 58{,}8} \cdot \frac{1}{2}\right)}} = 630 \text{ daN}.$$

Efortul unitar maxim datorit încovoierii și compresiunii este:

$$|\sigma|_{max} = \frac{Ql \cos \alpha}{W_y} + \frac{Q \sin \alpha}{A} = \frac{630 \cdot 200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{67{,}8} + \frac{630 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{58{,}8} = 1\,320 \text{ daN/cm}^2.$$

În calculele de mai sus s-au folosit caracteristicile geometrice ale profilului ⋃ 30:

$$I_y = 495 \text{ cm}^4;\ W_y = 67{,}8 \text{ cm}^3;\ A = 58{,}8 \text{ cm}^2 \ (\textit{anexa 9}).$$

13.25. Pe o grindă încastrată, încărcată cu o sarcină uniform distribuită $q = 100$ daN/m, cade o greutate $P = 100$ daN de la o înălțime $h = 5$ cm.

Grinda este un profil ⋃ 30, așezat ca în figura 13.25, lungimea sa fiind $l = 2$ m, iar greutatea proprie $p = 46{,}2$ daN/m. Se cere efortul unitar maxim în următoarele cazuri:

1) nu se ține seamă de masa barei;

2) se ține seamă de masa barei și de sarcină.

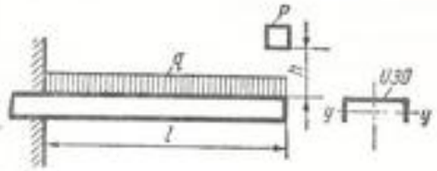


Fig. 13.25

Rezolvare. 1. Săgeata statică sub sarcina P este:

$$\delta_{st} = \frac{Pl^3}{3EI_y} = \frac{100 \cdot 200^3}{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 495} = 0{,}256 \text{ cm},$$

unde $I_y = 495$ cm^4 este momentul de inerție față de axa $y - y$.

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5}{0{,}256}} = 7{,}3.$$

Eforturile unitare statice și dinamice datorite sarcinii P sînt:

$$\sigma'_{st} = \frac{Pl}{W} = \frac{100 \cdot 200}{67{,}8} = 295 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_d = \psi \sigma'_{st} = 7{,}3 \cdot 295 = 2\,153 \text{ daN/cm}^2.$$

La acesta se adaugă efortul unitar datorit sarcinii $q + p$

$$\sigma'' = \frac{(q + p)\frac{l^2}{2}}{W} = \frac{1{,}46 \cdot 200^2}{2 \cdot 67{,}8} = 431 \text{ daN/cm}^2,$$

și rezultă efortul unitar total

$$\sigma_t = \sigma_d + \sigma'' = 2\,153 + 431 = 2\,584 \text{ daN/cm}^2.$$

2. Pentru a ține seamă de masa barei și de sarcina distribuită se aplică formulele (13.19) și (13.21), în care:

$$Q = (p + q)l = (46{,}2 + 100)2 = 292{,}4 \text{ daN},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q}{P}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5}{0{,}256} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{292{,}4}{100}}} = 5{,}91,$$

$$\sigma_d = \psi \sigma'_{st} = 5{,}91 \cdot 295 = 1\,743 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_t = \sigma_d + \sigma'' = 1\,743 + 431 = 2\,174 \text{ daN/cm}^2.$$

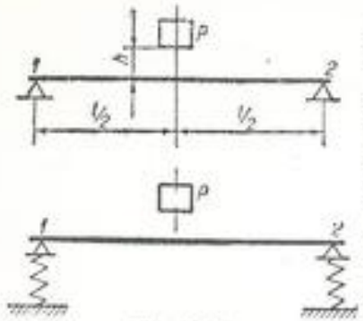


Fig. 13.26

Se vede, din compararea celor două rezultate că diferenţa între cele două cazuri este de 18,8%.

13.26. O greutate $P = 200$ daN cade pe mijlocul unei grinzi de deschidere $l = 1$ m, de la o înălţime $h = 1$ cm. Grinda fiind un profil I 10, să se verifice în două ipoteze (Fig. 13.26):

1) grinda este sprijinită pe reazeme rigide;

2) grinda este sprijinită pe două arcuri elicoidale avînd raza de înfăşurare $R = 6{,}4$ cm, diametrul sîrmei $d = 1{,}6$ cm şi numărul de spire $n = 4$. Rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

Rezolvare. 1) În prima ipoteză:

$$\delta_{st} = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{200 \cdot 100^3}{48 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 171} = 0{,}0116 \text{ cm}, \tag{1}$$

unde $I = 171$ cm⁴.

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0{,}0116}} = 14{,}1. \tag{2}$$

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{4W} = \frac{200 \cdot 100}{4 \cdot 34{,}2} = 146 \text{ daN/cm}^2, \tag{3}$$

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st} = 14{,}1 \cdot 146 \simeq 2\,060 \text{ daN/cm}^2 > \sigma_a.$$

Se vede că efortul unitar depăşeşte rezistenţa admisibilă.

2) Deformaţia statică a arcului elicoidal este dat de formula:

$$\delta'_{st} = \frac{64P'R^3n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 100 \cdot 6{,}4^3 \cdot 4}{8{,}5 \cdot 10^5 \cdot 1{,}6^4} = 1{,}205 \text{ cm}, \tag{4}$$

unde $P' = 100$ daN este jumătate din sarcina P, adică sarcina care revine fiecărui reazem.

Deformaţia statică totală este dată de suma expresiilor (1) şi (4):

$$f_{st} = 0{,}0116 + 1{,}205 = 1{,}2166 \text{ cm}.$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{1{,}2166}} = 2{,}62.$$

Efortul unitar dinamic este:

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st} = 2{,}62 \cdot 146 = 383 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

Efortul unitar în arcul elicoidal este:

$$\tau_{d\,max} = \psi\tau_{st\,max} = \psi\frac{16P'R}{\pi d^3} = 2{,}62\frac{16 \cdot 100 \cdot 6{,}4}{\pi \cdot 1{,}6^3} = 2\,086 \text{ daN/cm}^2.$$

Introducerea arcurilor amortizează mult şocul, micşorînd solicitarea dinamică în grindă de 5,4 ori.

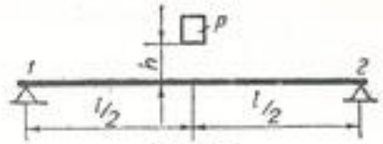


Fig. 13.27

13.27. Să se dimensioneze o grindă simplu rezemată, de secţiune dreptunghiulară, avînd raportul între înălţime şi bază $\frac{H}{B} = 1{,}5$ solicitată la încovoiere prin şoc de o greutate $P = 400$ daN, căzînd de la o înălţime $h = 2$ cm (Fig. 13.27).

Se dau: deschiderea grinzii $l = 3$m, rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 100$ daN/cm², $E = 10^5$ daN/cm². Se neglijează masa proprie a grinzii.

Rezolvare. Făcînd ipoteza că raportul $\frac{h}{\delta_{st}}$ este mare, se aplică formula simplificată (13.18):

$$\psi = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}, \tag{1}$$

$$\sigma_a = \psi\sigma_{st} = \psi\frac{M}{W}.$$

În cazul din figură:

$$\delta_{st} = \frac{Pl^3}{48EI}; \quad M = \frac{Pl}{4};$$

$$\sigma_a = \frac{Pl}{4W}\sqrt{\frac{2h}{\frac{Pl^3}{48EI}}} = \sqrt{\frac{6PhEI}{lW^2}}. \tag{2}$$

Dar pentru dreptunghi:

$$\frac{I}{W^2} = \frac{\frac{BH^3}{12}}{\left(\frac{BH^2}{6}\right)^2} = \frac{3}{BH} = \frac{2}{B^2}.$$

Înlocuind în relaţia (2) se obţine:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{6PhE}{l}\,\frac{2}{B^2}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{12PhE}{l}}. \tag{3}$$

$$B = \frac{1}{\sigma_a}\sqrt{\frac{12PhE}{l}} = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{12 \cdot 400 \cdot 2 \cdot 10^5}{300}} = 17{,}9 \text{ cm}.$$

Se aleg:

$$B = 18 \text{ cm}; \quad H = 1{,}5 \cdot B = 1{,}5 \cdot 18 = 27 \text{ cm}.$$

Deoarece s-a aplicat pentru dimensionare formula aproximativă, trebuie făcută verificarea:

$$\delta_{st} = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{400 \cdot 300^3}{48 \cdot 10^5 \cdot \frac{18 \cdot 27^3}{12}} = 0{,}076 \text{ cm},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2}{0{,}076}} = 8{,}33,$$

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W} = \frac{\frac{Pl}{4}}{\frac{BH^2}{6}} = \frac{3Pl}{2BH^2} = \frac{3 \cdot 400 \cdot 300}{2 \cdot 18 \cdot 27^2} = 13{,}72 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_d = \psi\sigma_{st} = 8{,}33 \cdot 13{,}72 = 114{,}3 \text{ daN/cm}^2 > \sigma_a.$$

Se vede că efortul unitar efectiv depăşeşte cu 14,3% pe cel admisibil. Aceasta se datoreşte faptului că s-a lucrat cu formula aproximativă (13.18), raportul $\frac{2h}{\delta_{st}} = \frac{2 \cdot 2}{0{,}076} = 52{,}5$ fiind prea mic (vezi relaţia 13.18). Se face în acest caz o nouă dimensionare cu formula (13.17):

$$\psi = 1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}.$$

În acest caz:

$$\sigma_a = \psi\sigma_{st} = \frac{M}{W}\left(1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}\right) = \frac{Pl}{4W} + \frac{Pl}{4W}\sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}},$$

$$\sigma_a = \frac{Pl}{4 \cdot \frac{BH^2}{6}} + \frac{1}{B}\sqrt{\frac{12PhE}{l}} = \frac{3Pl}{2 \cdot 2{,}25 \cdot B^3} + \frac{1}{B}\sqrt{\frac{12PhE}{l}},$$

$$100 = \frac{3 \cdot 400 \cdot 300}{4{,}5 \cdot B^3} + \frac{1}{B}\sqrt{\frac{12 \cdot 400 \cdot 2 \cdot 10^5}{300}}.$$

Se obţine ecuaţia:

$$B^3 - 17{,}90\ B^2 - 800 = 0.$$

Soluţia aproximativă a ecuaţiei este: $B = 20$ cm; $H = 1{,}5\ B = 30$ cm. Cu aceste valori se obţine: $\delta_{st} = 0{,}05$ cm; $\psi = 10$; $\delta_{st} = 10$ daN/cm²; $\sigma_d = 100$ daN/cm² $= \sigma_a$.

13.28. O greutate P cade de la înălţimea h pe o grindă în consolă, de masă neglijabilă. După ciocnire, greutatea rămîne pe grindă. Să se arate că se realizează un coeficient de impact cu atît mai mare cu cît

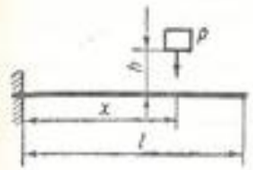


Fig. 13.28

grinda este lovită mai aproape de încastrare. Să se cerceteze şi modul cum variază efortul unitar maxim în funcţie de x (Fig. 13.28).

Rezolvare. Se aplică formula coeficientului de impact:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}.$$

În cazul grinzii încastrate: $f_{st} = \frac{Px^3}{3EI}$.

Cu cît x este mai mic, deci punctul de lovire mai aproape de încastrare, cu atît σ_{st} este mai mic şi ψ este mai mare.

Momentul încovoietor maxim este, în valoare absolută, $M_{max} = \psi Px$ sau:

$$M_{max} = Px\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\frac{Px^3}{3EI}}}\right) = P\left[x + \sqrt{x^2 + \frac{6EIh}{P}\frac{1}{x}}\right].$$

Derivata se anulează cînd:

$$\frac{dM_{max}}{dx} = P\left(1 + \frac{2x - \frac{6EIh}{P}\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x^2 + \frac{6EIh}{P}\frac{1}{x}}}\right) = 0.$$

Rezolvînd se găseşte $x = \sqrt[3]{\frac{3EIh}{4P}}$. Această valoare mai poate fi pusă sub forma $x = l\sqrt[3]{\frac{h}{4\delta_{st}}}$. Analizînd semnul derivatei, se constată uşor că ea trece de la valori negative la valori pozitive, deci funcţia trece printr-un minim.

Dacă $h \geqslant 4\delta_{st}$, adică dacă greutatea cade de la o înălţime egală cu de 4 ori săgeata statică, punctul de ciocnire pentru care apare un minim de efect dinamic se află la capătul liber al consolei. Cu cît greutatea ciocneşte grinda mai aproape de încastrare, cu atît momentul din încastrare este mai mare.

Dacă $h < 4\delta_{st}$, atunci punctul de ciocnire, pentru care apare un minim de efect dinamic, se află pe grindă la distanţa

$$x = l\sqrt[3]{\frac{h}{4\delta_{st}}}.$$

Înlocuind în expresia momentului încovoietor maxim se găseşte:

$$M_{max} = 4\,Pl\sqrt[3]{\frac{h}{4\delta_{st}}}.$$

Dacă greutatea ciocneşte grinda la dreapta sau la stînga acestui punct, efectul dinamic este mai mare.

13.29. Calea unui pod rulant este sprijinită pe console. Rosturile căii, avînd 2 cm, să găsesc deasupra consolei. Podul rulant apasă pe calea

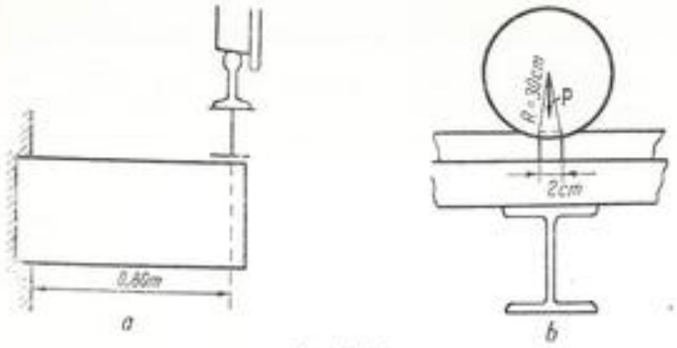


Fig. 13.29

de rulare cu $P = 100$ kN. Consola fiind un profil I 40 şi avînd o deschidere de 0,80 m, se cere să se determine coeficientul de impact şi efortul unitar maxim, cînd roata podului trece peste rostul căii. Raza roţii căruciorului este de 30 cm (Fig. 13.29).

Rezolvare. Coeficientul de impact este dat de formula (13.14):

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}.$$

În cazul de faţă:

$$\delta_{st} = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{10\,000 \cdot 80^3}{3 \cdot 2\,100\,000 \cdot 29\,210} = 0{,}0279 \text{ cm},$$

iar h este săgeata unui arc de cerc cu raza $R = 30$ cm şi cu o coardă $d = 2$ cm (Fig. 13.29, *b*):

$$h = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{R^2 - \left(R^2 - \frac{d^2}{4}\right)}{R + \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}},$$

$$h \simeq \frac{d^2}{8R} = \frac{2^2}{8 \cdot 30} = 0{,}0167 \text{ cm},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0{,}0167}{0{,}0279}} = 2{,}48.$$

Efortul unitar maxim va fi:

$$\sigma_d = \psi \cdot \sigma_{st} = \frac{\psi Pl}{W} = \frac{2{,}48 \cdot 10\,000 \cdot 80}{1\,460} \simeq 1\,360 \text{ daN/cm}^2.$$

13.30. Un arbore de transmisie, cu diametrul $d = 5$ cm şi lungimea $l = 10$ m, are la capete cîte o roată de transmisie cu diametrul $D = 35$ cm şi greutatea $P = 7$ daN. Dacă arborele se roteşte cu $n = 120$ rot/min şi la un moment oarecare una din roţile de la capete este brusc imobilizată, se cere să se calculeze efortul unitar de răsucire ce se produce în arbore în două ipoteze:

a) ţinînd seamă de masa arborelui;

b) neglijînd masa arborelui.

Rezolvare. a) Efortul unitar maxim se poate determina prin metoda arătată la punctul 7 din „Definiţii şi formule". Energia de deformaţie la solicitarea de torsiune este, după relaţia (13.23):

$$E_d = \frac{1}{2} \frac{\tau_{max}^2}{2G} V. \tag{1}$$

În cazul arborelui din problemă, care se roteşte cu viteza unghiulară $\omega = \frac{\pi n}{30}$, care variază brusc de la ω la 0, variaţia de energie cinetică este:

$$E_c = \frac{1}{2} J\omega^2, \tag{2}$$

unde J este suma momentelor de inerţie al arborelui şi al unei roţi.

Egalînd (1) cu (2) se obţine:

$$\tau_{max}^2 = \frac{2JG\omega^2}{V}, \tag{3}$$

unde V este volumul arborelui.

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 12{,}56 \text{ rad/s}.$$

$$V = \frac{\pi d^2}{4} l = \frac{\pi \cdot 5^2}{4} \cdot 1\,000 = 19\,600 \text{ cm}^3.$$

Momentul de inerţie mecanic al arborelui faţă de axa de rotaţie este:

$$J_1 = \frac{Qd^2}{8g} = \frac{V\gamma d^2}{8g} = \frac{19\,600 \cdot \frac{7{,}8}{1000} \cdot 5^2}{8 \cdot 981} = 0{,}488 \text{ daN cms}^2$$

unde Q este greutatea arborelui.

Momentul de inerţie al roţii este:

$$J_2 = \frac{PD^2}{8g} = \frac{7 \cdot 35^2}{8 \cdot 981} = 1{,}093 \text{ daN cms}^2$$

unde P este greutatea roţii.

$$J = J_1 + J_2 = 0{,}488 + 1{,}093 = 1{,}581 \text{ daN cms}^2.$$

Din relaţia (3) se obţine:

$$\tau_{max} = \omega \sqrt{\frac{2JG}{V}} = 12{,}56 \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}581 \cdot 8{,}1 \cdot 10^5}{19\,600}} = 143 \text{ daN/cm}^2.$$

b) În cazul cînd se neglijează masa arborelui, momentul de inerţie este:

$$J = J_2 = 1{,}093 \text{ daNcms}^2.$$

$$\tau_{max} = \omega \sqrt{\frac{2JG}{V}} = 12{,}56 \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}093 \cdot 8{,}1 \cdot 10^5}{19\,600}} = 119 \text{ daN/cm}^2.$$

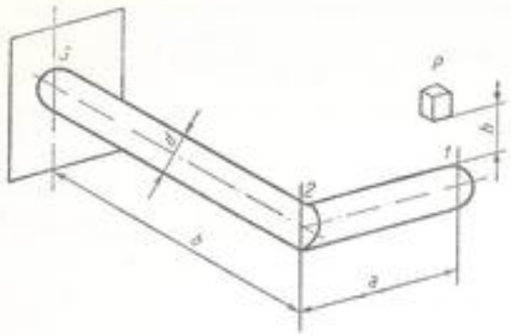


Fig. 13.31

Se vede că diferenţa dintre rezultate este apreciabilă, ca fiind de aproximativ 20%.

13.31. Asupra grinzii cotite de oţel din figura 13.31, de dimensiuni $a = 30$ cm, $b = 80$ cm, cade o greutate $P = 50$ daN, de la o înălţime $h = 1{,}2$ cm. Să se verifice grinda ştiind că este de secţiune circulară cu $d = 6$ cm, iar $\sigma_a = 1\,200$ daN/cm².

Rezolvare. Efortul unitar dinamic este dat de relaţia (13.12). Săgeata statică produsă de sarcina P în punctul 1 se calculează ca în problema (10.6) obţinîndu-se

$$\delta_{st} = \frac{P(a^3 + b^3)}{3EI} + \frac{Pa^2b}{GI_p} = \frac{50(30^3 + 80^3)}{3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 6^4}{64}} + \frac{50 \cdot 30^2 \cdot 80}{81{,} \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 6^4}{32}} = 0{,}102 \text{ cm}.$$

Coeficientul de impact are valoarea

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1{,}2}{0{,}102}} \cong 6.$$

Secţiunea cea mai solicitată este în punctul *3* unde momentul încovoietor echivalent are valoarea (după teoria a 3-a de rezistenţă):

$$M_{ech3} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2} = \sqrt{(50 \cdot 30)^2 + (50 \cdot 80)^2} = 4\,280 \text{ daNcm}.$$

Efortul unitar echivalent static este

$$\sigma_{ech\,st} = \frac{M_{ech3}}{W} = \frac{4\,280}{\frac{\pi \cdot 6^3}{32}} = 202 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar dinamic are valoarea

$$\sigma_{ech\,d} = \psi \cdot \sigma_{ech,st} = 6 \cdot 202 = 1\,212 \text{ daN/cm}^2 \approx \sigma_a.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

13.32. Să se refacă problema 13.5 în cazul cînd viteza unghiulară are o valoare mai mică, ceea ce face ca poziţia de echilibru să fie oarecare, iar greutăţile proprii să fie luate în considerare. Se va determina întîi

poziţia de echilibru relativ a sistemului şi apoi se vor construi diagramele N, T, M la cele trei bare, luînd în considerare atît forţele de inerţie cît şi greutăţile proprii.

Indicaţie. Se determină poziţia de echilibru relativ prin principiul deplasărilor virtuale, sau prin altă metodă. După aceea, se pot separa barele, introducînd reacţiunile şi se pot construi diagramele N, T, M.

13.33. Să se calculeze efortul unitar σ_{max} care se produce în inelul studiat în problema 13.7.

Răspuns. Efortul unitar maxim are loc în secţiunea A, iar valoarea sa este

$$\sigma_{max} = \frac{\gamma R^2 \omega^2}{g}\left(1 + \frac{AR}{4W}\right).$$

13.34. Să se găsească efortul unitar maxim în secţiunea A_1 (v. Fig. 13.10) pentru o paletă de turbină de secţiune variabilă după relaţia:

$$A = A_1\left(\frac{H - z}{H}\right)^2,$$

în care H este distanţa de la baza paletei pînă la punctul de întîlnire al prelungirilor laturilor paletei,

z — distanţa de la baza paletei la un punct oarecare.

Răspuns. Se aplică metoda din problema 13.10 şi se află

$$\sigma_1 = \frac{\gamma l \omega^2}{12g}\left[2\left(R_1 + \frac{A_2}{A_1} R_2\right) + (R_1 + R_2)\left(1 + 2\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} + \frac{A_2}{A_1}\right)\right].$$

13.35. Să se calculeze efortul unitar ce se produce într-o grindă I 20 simplu rezemată, pe mijlocul căreia se aşază brusc o sarcină $OP = 1\,300$ daN, dacă lungimea grinzii este $l = 4$ m.

Răspuns. Aşezarea bruscă este echivalentă cu o sarcină dinamică aplicată de la înălţimea $h = 0$. Se obţine:

$$\psi = 2; \quad \sigma_d = \psi\sigma_{st} = 1\,216 \text{ daN/cm}^2.$$

CAPITOLUL **14**

VIBRAŢII ÎN SISTEME ELASTICE

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. După numărul de coordonate care pot defini poziţia lui la un moment dat, sistemul elastic în vibraţie poate fi cu unul, cu două sau cu mai multe grade de libertate. Mişcarea sistemului elastic care a fost îndepărtat de la poziţia de echilibru şi lăsat liber se numeşte *vibraţie proprie* sau *liberă*. Mişcarea sistemului acţionat de o sarcină variabilă, periodică, se numeşte *vibraţie forţată* sau *întreţinută*. Dacă există frecări, vibraţia se numeşte *amortizată* şi, în general, amplitudinile ei scad cu timpul.

Prin sistem elastic cu caracteristică liniară se înţelege un sistem ale cărui deformaţii sînt proporţionale cu forţele care le produc; în cazul cînd deformaţiile variază după altă lege decît proporţional cu forţele, sistemul este cu caracteristică neliniară.

La sistemele elastice cu caracteristică liniară, rezonanţa se produce cînd există o forţă exterioară periodică, a cărei frecvenţă coincide cu una din frecvenţele proprii ale sistemului.

2. Vibraţiile liniare cu *un grad de libertate*, libere şi fără amortizare, au următoarea ecuaţie de mişcare

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0;\quad \text{sau}\quad \frac{d^2x}{dt^2}+p^2x=0,$$

unde $p^2=kg/P$ este pulsaţia proprie, k fiind constanta elastică a sistemului, definită ca forţa care produce o deformaţie egală cu unitatea.

Soluţia ecuaţiei este:

$$x=C_1\cos pt+C_2\sin pt. \tag{14.1}$$

Frecvenţa proprie a sistemului este:

$$f=\frac{p}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{P}}. \tag{14.2}$$

Deoarece $P/k=\delta_{st}$,

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \tag{14.3}$$

unde δ_{st} este deformaţia statică.

Vibraţia liberă cu amortizare vîscoasă are următoarea ecuaţie de mişcare, cînd forţa de frecare este proporţională cu viteza:

$$\frac{P}{g}\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+kx=0,\quad \text{sau}\quad \frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+p^2x=0,$$

unde $2n=hg/P$ şi $p^2=kg/P$.

Soluţia este de forma:

$$x=e^{-nt}(C_1\cos p_1t+C_2\sin p_1t) \tag{14.4}$$

unde: $p_1^2=p^2-n^2$, iar amplitudinea scade cu timpul.

3. În afară de metoda de calcul descrisă mai sus (integrarea ecuaţiei mişcării) pentru calculul frecvenţelor proprii la sistemele fără frecare se poate utiliza ecuaţia conservării energiei. Pentru aceasta se scrie că suma energiilor cinetică şi potenţială (energia totală a sistemului) este o constantă. Pentru a determina energia totală se observă că în momentul în care viteza sistemului în vibraţie este nulă, întreaga energie este potenţială, iar cînd viteza este maximă, întreaga energie este cinetică. Egalînd cele două expresii ale energiei se obţine o ecuaţie din care rezultă pulsaţia proprie.

Pentru cazurile citate la punctul 2, dacă x reprezintă unghiuri, definiţiile şi formulele rămîn valabile, înlocuind masa $\frac{P}{g}$ prin momentul de inerţie J, forţa Q prin momentul perturbator M, $h\frac{d\varphi}{dt}$ devenind moment de frecare, proporţional cu viteza de rotaţie.

4. Pentru soluţionarea problemelor de vibraţii în cazul sistemelor cu mai multe grade de libertate, se utilizează în mod curent, pe lîngă metodele exacte de calcul şi metode aproximative. Metoda exactă de rezolvare constă în a scrie ecuaţiile de mişcare pentru fiecare masă a sistemului în parte.

Se obţine un sistem de n ecuaţii diferenţiale, dacă sistemul elastic are n grade de libertate.

Luînd soluţii de forma:

$$p_i=\lambda_i(\cos pt-\alpha), \tag{14.5}$$

se obţine un sistem de ecuaţii liniare omogene în λ_i. Condiţia de compatibilitate este o ecuaţie de grad n în p^2 rezultînd din anularea determinantului sistemului şi soluţiile ei dau valorile proprii ale pulsaţiei p.

5. Dacă numărul de ecuaţii, respectiv de grade de libertate, este mare, metodele exacte devin foarte laborioase şi în locul lor se utilizează *metode aproximative*. Pentru calculul frecvenţei proprii fundamentale (cea mai mică) se poate utiliza metoda lui Rayleigh. Presupunînd că se cunoaşte forma sistemului elastic în timpul vibraţiei, numărul de grade de libertate se reduce la unul şi se poate aplica metoda energetică descrisă mai sus.

Scriind egalitatea dintre energia cinetică şi cea potenţială maximă, se obţine o ecuaţie din care se determină în mod aproximativ pulsaţia fundamentală a sistemului.

Se poate presupune, într-o primă aproximaţie, că deformaţia sistemului în vibraţie are aceeaşi formă cu aceea a sistemului cînd acesta este solicitat de forţele aplicate static.

Aplicînd metoda lui Rayleigh în cazul unui arbore cu mai mulţi volanţi, se obţine următoarea expresie pentru frecvenţa proprie fundamentală a sistemului:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\Sigma P_i v_i}{\Sigma P_i v_i^2}}, \tag{14.6}$$

unde v_i reprezintă săgeţile statice în dreptul sarcinilor P_i de pe arbore.

6. Pentru soluţionarea problemelor de vibraţii ale sistemelor cu număr infinit de grade de libertate, se utilizează atît metode exacte (cînd acestea există) cît şi metode aproximative. Ca metode exacte se scriu, de la caz la caz, ecuaţiile diferenţiale de mişcare ale sistemului şi se integrează.

De exemplu, ecuaţia de mişcare a vibraţiilor longitudinale în bare de secţiune constantă este:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{Eg}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{unde} \quad \alpha^2 = \frac{Eg}{\gamma} \tag{14.7}$$

iar soluţia ei este de forma:

$$u = (C_1 \cos pt + C_2 \sin pt)\left(C_3 \cos \frac{p}{\alpha}x + C_4 \sin \frac{p}{\alpha}x\right) = TX.$$

Determinarea constantelor se face utilizînd condiţiile la limită.

Pentru o bară încastrată la un capăt şi liberă la celălalt se obţine:

Pentru $x = 0$, $u = 0$, $X = 0$; pentru $x = l$, $\frac{du}{dx} = 0$, deci $X' = 0$.

De aici rezultă: $C_3 = 0$; $\cos \frac{p}{\alpha} l = 0$

sau:

$$p = \frac{\pi\alpha}{2l} = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} \quad \text{sau} \quad f = \frac{1}{4l}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}. \tag{14.8}$$

7. La barele de secţiune constantă în vibraţie transversală, ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate este:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{m}{EI}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

în care: v este săgeata;

E — modulul de elasticitate;

I — momentul de inerţie;

m — masa grinzii pe unitatea de lungime.

Această ecuaţie diferenţială se rezolvă de obicei căutînd o soluţie de forma $v = XT$ unde X este o funcţie numai de x, iar T este o funcţie numai de

timp. În modul acesta, ecuaţia cu derivate parţiale se desface în două ecuaţii diferenţiale obişnuite:

$$X^{(IV)} - \alpha^4 X = 0 \text{ şi } \ddot{T} + \alpha^4\frac{EI}{m}T = 0.$$

Frecvenţa vibraţiei este dată de formula:

$$f = \frac{\alpha^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{m}} \tag{14.9}$$

iar:

$$X = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + C_3 \operatorname{ch} \alpha x + C_4 \operatorname{sh} \alpha x. \tag{14.10}$$

Valoarea constantei α se determină prin condiţii la limită, de la caz la caz.

B. PROBLEME REZOLVATE

14.1. Să se calculeze frecvenţa de oscilaţie a unui ascensor, după ce acesta s-a oprit brusc prin blocarea tamburului pe care este înfăşurat cablul. Calculul se va face în două ipoteze:

a) cablul este legat direct de cabina ascensorului (Fig. 14.1, *a*).

b) cablul este legat prin intermediul unui arc de cabina ascensorului (Fig. 14. 1, *b*).

Se presupune că amplitudinea oscilaţiei este astfel, încît semiperioada oscilaţiei ascensorului deasupra poziţiei de echilibru este aceeaşi ca şi cea de sub această poziţie. Se dau: lungimea cablului $l = 10$ m, constanta elastică a arcului $k = 2$ kN/ cm, greutatea ascensorului $P = 20$ kN şi aria secţiunii cablului $A = 4$ cm².

Rezolvare. Cazul a). Deformaţia sub sarcina P aplicată static este:

$$\delta_{st} = \frac{Pl}{EA} = \frac{2\,000 \cdot 1\,000}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 4} = \frac{1}{4{,}2} \text{ cm}.$$

Utilizînd formula (14.3) se obţine frecvenţa:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{981 \cdot 4{,}2} = 10{,}22 \text{ Hz}.$$

Cazul *b*). Deformaţia sub sarcina aplicată static este:

$$\delta_{st} = \frac{Pl}{EA} + \frac{P}{k} = \frac{2\,000 \cdot 1\,000}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 4} + \frac{20}{2} = 10{,}238 \text{ cm}.$$

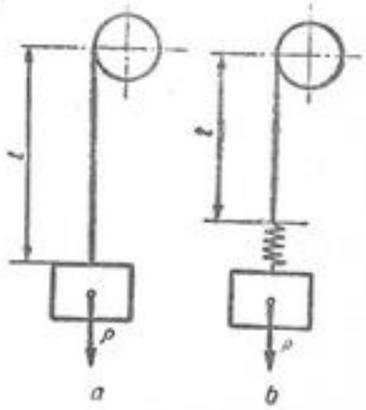


Fig. 14.1

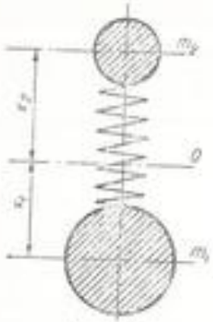


Fig. 14.2*

Fig. 14.3

Frecvența sistemului va fi deci:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{981}{10{,}238}} = 1{,}56 \text{ Hz}.$$

14.2. Să se calculeze viteza de rezonanță a unui tren compus dintr-o locomotivă (cu doi cilindri cu dublu efect) și un vagon, știind că greutatea locomotivei este $P_1 = 1\,000$ kN, greutatea vagonului $P_2 = 700$ kN, constanta elastică a cuplajului $k = 500$ daN/mm și raza roții locomotivei $R = 0{,}9$ m.

Rezolvare. Se observă că singurul mod de oscilație posibil constă în deplasarea în sens contrar a celor două mase. În acest caz, există un punct O, care nu oscilează, iar frecvențele de oscilație ale celor două mase sînt egale (Fig. 14.2).

Utilizînd relația (14.3) se obține:

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st1}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st2}}},$$

de unde:

$$\frac{1}{\delta_{st1}} = \frac{1}{\delta_{st2}} \quad \text{sau} \quad \frac{k_1}{P_1} = \frac{k_2}{P_2}.$$

S-a notat cu k_1 constanta elastică a cuplajului între punctul O și masa m_1, respectiv cu k_2 între O și m_2. Constantele elastice fiind în serie, se poate scrie

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

de unde

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{k}{k_2 - k}$, respectiv $k_2 = k\left(\frac{P_2}{P_1} + 1\right)$. Frecvența de rezonanță este:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gk_2}{P_2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{kg\left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}\right)}.$$

Locomotiva, fiind cu doi cilindri și dublu efect, are patru impulsuri la o rotație a roții. Viteza de rezonanță este:

$$v = 2\pi R\frac{f}{4} = \frac{R}{4}\sqrt{gk\left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}\right)},$$

$$v = \frac{90}{4}\sqrt{981 \cdot 5\,000\left(\frac{1}{100\,000} + \frac{1}{70\,000}\right)} = 245 \text{ cm/s} = 8{,}81 \text{ km/h}.$$

* Figura reprezintă o schematizare a sistemului privit de deasupra

14.3. Să se calculeze mărimea constantei elastice a unui arc de ceas, astfel încît rotița avînd greutatea coroanei P și raza de inerție a coroanei a să efectueze f oscilații pe secundă (Fig. 14.3).

Aplicație numerică. $P = 20$ mN; $a = 1$ cm; $f = 2$ Hz.

Rezolvare. Utilizînd formula (14.2), în care se înlocuiește masa $\frac{P}{g}$ prin momentul de inerție J, se obține: $k = 4\pi^2 f^2 J$, unde $J = \frac{Pa^2}{g}$, deci:

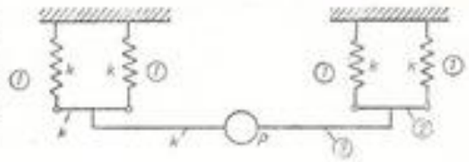


Fig. 14.4

$$k = 4\pi^2 f^2 \frac{Pa^2}{g} = 4 \cdot \pi^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{20 \cdot 1^2}{981} = 3{,}21 \text{ mN/cm}.$$

14.4. Să se afle frecvența proprie a sistemului oscilant din figura 14.4. Se dau: $k = 10$ N/cm, $P = 1\,000$ N.

Rezolvare. Sistemul oscilant are un singur grad de libertate. Frecvența proprie este dată de formula (14.3):

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}.$$

Deplasarea statică a greutății P este suma deplasărilor elementelor elastice 1, 2 și 3:

$$\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{P_1}{k} + \frac{P_2}{k} + \frac{P_3}{k}.$$

Datorită simetriei, fiecare element 1 preia a patra parte din forța P:

$$P_1 = \frac{P}{4}$$

și fiecare element 2, a doua parte din forța P:

$$P_2 = \frac{P}{2}.$$

Elementul 3 preia integral forța P:

$$P_3 = P.$$

Deci:

$$\delta_{st} = \frac{P}{4k} + \frac{P}{2k} + \frac{P}{k} = \frac{7}{4}\frac{P}{k}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4kg}{7P}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot 981}{7 \cdot 1\,000}} = 0{,}375 \text{ Hz}.$$

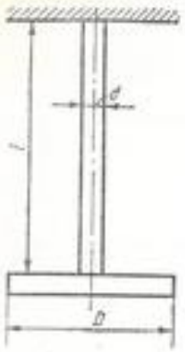


Fig. 14.5

14.5. Un arbore cu secţiune circulară, de lungime l şi diametru d, are la extremitate un disc circular, de greutate P şi diametru D (Fig. 14.5).

Ştiind că frecvenţa proprie a vibraţiilor de răsucire ale sistemului este f, să se calculeze modulul de elasticitate G al materialului arborelui.

Aplicaţie numerică. $P = 10$ da N; $D = 30$ cm; $l = 1$ m; $d = 1$ cm; $f = 4{,}2$ Hz.

Rezolvare. Se utilizează formula (14.2) în care se înlocuieşte masa $\frac{P}{g}$ prin momentul de inerţie J.

Constanta elastică a sistemului este: $k = \frac{\pi d^4 G}{32l}$,

iar momentul de inerţie masic al discului: $J = \frac{PD^2}{8g}$.

Înlocuind aceste expresii în formula (14.2) se obţine:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi g d^4 G}{4PD^2 l}},$$

de unde:

$$G = \frac{16PD^2 l f^2}{g d^4} = \frac{16 \cdot 10 \cdot 30^2 \cdot 100 \cdot \pi \cdot 4{,}2^2}{981 \cdot 1^4} \approx 813\ 500 \text{ daN/cm}^2.$$

14.6. Să se calculeze frecvenţa proprie a vibraţiilor de răsucire pentru un arbore cu doi volanţi la capete, avînd momentele de inerţie J_1 şi J_2, în două ipoteze:

a) Arborele este continuu şi de secţiune constantă (Fig. 14.6, *a*).

b) Arborele este format din două bucăţi de seţiuni diferite, cuplate prin două roţi dinţate avînd z_1, respectiv z_2, dinţi (Fig. 14.6, *b*).

Se presupune că atît arborii, cît şi roţile dinţate au momente de inerţie neglijabile faţă de momentele de inerţie ale volanţilor.

Aplicaţie numerică. Volanţii au greutăţile şi diametrele: $P_1 = 200$ daN, $P_2 = 100$ daN, $D_1 = 60$ cm, $D_2 = 40$ cm. Arborele din figura 14.6, *a* are $d = 4$ cm, şi $l = 200$ cm, iar cei din figura 14.6, *b* au $l_1 = 120$ cm, $l_2 = 80$ cm, $d_1 = 4$ cm, $d_2 = 3$ cm, $z_1 = 2\,z_2$.

Rezolvare. a) Pentru calculul frecvenţei proprii se foloseşte teorema momentelor cantităţilor de mişcare. Oscilaţia este posibilă numai dacă cei doi volanţi se rotesc în sensuri diferite, cu aceeaşi frecvenţă. Există în acest caz o secţiune a arborelui, la distanţa a de volantul J_1, care rămîne nemişcată.

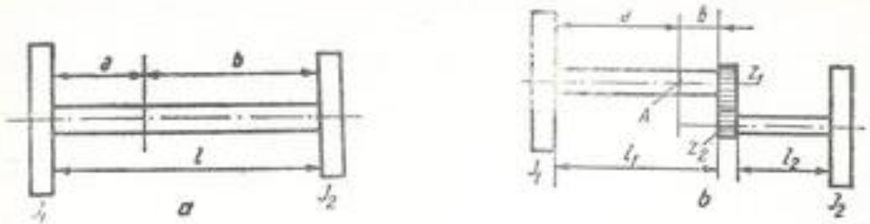


Fig. 14.6

Dacă se notează I_p, momentul de inerţie polar al secţiunii arborelui, frecvenţele fiind egale, se poate scrie:

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GI_p}{aJ_1}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GI_p}{bJ_2}},$$

unde s-a introdus valoarea constantelor elastice ale celor două porţiuni ale arborelui, de o parte şi de alta a secţiunii neutre.

$$k_1 = \frac{GI_p}{a};\quad k_2 = \frac{GI_p}{b}.$$

Deoarece $a + b = l$, din relaţia de mai sus se obţine: $aJ_1 = (l - a)\,J_2$ de unde: $a = l\frac{J_2}{J_1 + J_2}$, iar frecvenţa proprie este: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GI_p}{l} \cdot \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}}$.

În cazul aplicaţiei numerice, se obţine:

$$J_1 = \frac{P_1 D_1^2}{8g} = \frac{200 \cdot 60^2}{8 \cdot 981} = 91{,}7 \text{ daN cm s}^2;$$

$$J_2 = \frac{P_2 D_2^2}{8g} = \frac{100 \cdot 40^2}{8 \cdot 981} = 20{,}3 \text{ daN cm s}^2;$$

$$G = 810\ 000 \text{ da N/cm}^2;\quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 4^4}{32} = 25{,}1 \text{ cm}^4,$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{810\ 000 \cdot 25{,}1}{200} \cdot \frac{91{,}7 + 20{,}3}{91{,}7 \cdot 20{,}3}} = 12{,}45 \text{ Hz}.$$

b) Dacă se presupune că secţiunea A care rămîne nemişcată se găseşte la distanţa a de la volantul 1, constanta elastică a acestei porţiuni din stînga este:

$$k_1 = \frac{GI_{p1}}{a}.$$

Constanta elastică a porţiunii din dreapta secţiunii fixe A se determină calculînd unghiul de răsucire φ al ansamblului pînă la volantul din dreapta, asupra căruia se aplică un cuplu M:

$$\varphi = \frac{Ml_2}{GI_{p2}} + M\frac{z_1}{z_2}\frac{b}{GI_{p1}},$$

în care I_{p1} şi I_{p2} sînt momentele de inerţie polare ale secţiunilor celor doi arbori.

Constanta elastică este: $k_2 = \frac{M}{\varphi} = \frac{GI_{p1}}{l_2\frac{I_{p1}}{I_{p2}} + \frac{z_1}{z_2}b}$.

Din egalitatea frecvenţelor celor două părţi, se obţine:

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GI_{p1}}{aJ_1}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GI_{p1}}{\left(l_2\frac{I_{p1}}{I_{p2}} + \frac{z_1}{z_2}b\right)J_2}}.$$

Deoarece $a + b = l_1$, din relaţia de mai sus se obţine valoarea lui a:

$$a = \frac{J_2}{J_1 + \frac{z_1}{z_2}J_2}\left(l_2\frac{I_{p1}}{I_{p2}} + \frac{z_1}{z_2}l_1\right).$$

Frecvenţa proprie a sistemului este:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1 + \frac{J_2}{J_1}\frac{z_1}{z_2}}{J_2}\cdot\frac{GI_{p1}}{l_2\frac{I_{p1}}{I_{p2}} + \frac{z_1}{z_2}l_1}}.$$

În cazul aplicaţiei numerice: $I_{p1} = 25{,}1\ \text{cm}^4$; $I_{p2} = \frac{\pi\cdot 3^4}{32} = 7{,}95\ \text{cm}^4$.

Se calculează valoarea lui a spre a vedea dacă secţiunea fixă este pe primul arbore, aşa cum s-a presupus. Se găseşte:

$$a = \frac{20{,}3}{91{,}7 + 20{,}3\cdot 2}\left(80\frac{25{,}1}{7{,}95} + 2\cdot 120\right) = 75{,}3\ \text{cm} < 120\ \text{cm}.$$

Formula dedusă pentru frecvenţă este deci valabilă şi valoarea frecvenţei proprii este:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GI_{p1}}{aJ_1}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{810\,000\cdot 25{,}1}{75{,}3\cdot 91{,}7}} = 8{,}62\ \text{Hz}.$$

14.7. Să se calculeze frecvenţa proprie de oscilaţie în rotirea în jurul axei centrale longitudinale a unui motor ca în figura 14.7. Motorul este fixat elastic, pe o fundaţie rigidă de masă mare.

Momentul de inerţie al ansamblului faţă de axa centrală longitudinală este J iar constanta elastică a fiecărei linii de reazem este k.

Aplicaţie numerică: distanţa între liniile de reazem este $l = 80$ cm; momentul de inerţie $J = 30$ daN cms²; constanta elastică este $k = 250$daN/cm.

Rezolvare. Pentru oscilaţiile mici cuplul elastic care se produce la o rotire a ansamblului cu un unghi θ se poate scrie $N = kl^2\theta/2$. Ecuaţia de mişcare a ansamblului, în cazul oscilaţiilor libere de rotaţie, se poate scrie

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\frac{l^2}{2}\theta = 0;\quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{kl^2}{2J}\theta = 0.$$

Frecvenţa proprie are deci valoarea:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l^2k}{2J}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{80^2\cdot 250}{2\cdot 30}} = 26\ \text{Hz}.$$

14.8. Să se calculeze frecvenţa de oscilaţie a unui tramvai după o oprire bruscă a acestuia. Se admite aproximaţia că greutatea totală suspendată P este uniform repartizată în lungul tramvaiului.

Constanta elastică a suspensiei este k_1, aceeaşi pe amîndouă osiile (Fig. 14.8).

Aplicaţie numerică: momentul de inerţie central

$$J = 400\,000\ \text{daN cm s}^2;\quad 2a = 4\ \text{m};\quad k_1 = 1\,000\ \text{daN/cm}.$$

Se consideră că arcurile se deformează, în timpul vibraţiei, numai pe verticală.

Rezolvare. Frecvenţa de rezonanţă are expresia:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{J}}.$$

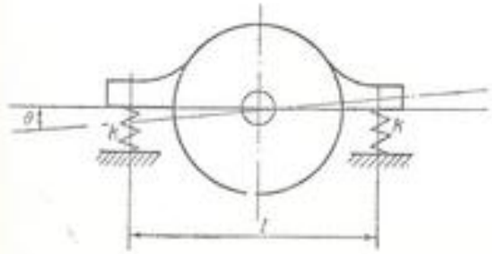


Fig. 14.7

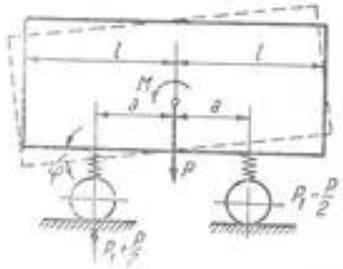


Fig. 14.8

Constanta elastică a întregului vehicul k se determină ca raportul dintre un *moment arbitrar de tangaj* M şi unghiul φ pe care acesta îl produce. Reacţiunile la acest moment arbitrar vor fi $P_1 = M_1/2a$. Deformaţia arcului este: $f = P_1/k_1 = M/2ak_1$. Unghiul este dat de relaţia $\varphi = f/a = M/2a^2k_1$. În acest caz, constanta elastică are valoarea

$$k = \frac{M}{\varphi} = \frac{M}{M}\,2a^2k_1 = 2a^2k_1.$$

Frecvenţa proprie devine:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2a^2k_1}{J}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\cdot 200^2\cdot 1\,000}{400\,000}} = 2{,}26 \text{ Hz}.$$

14.9. Se consideră un captor seismic de măsurat vibraţii schematizat ca în figura 14.9. Acest captor se compune din o lamă elastică de celuloid (N), avînd doi traductori rezistivi lipiţi pe cele două feţe, o pîrghie de amplificare (q), o masă seismică (P) şi un arc de susţinere (M).

Se cere să se calculeze frecvenţa proprie a sistemului în ipoteza că pîrghia (q) este rigidă, iar lama (N) are masa neglijabilă.

Se consideră cunoscută valoarea P a greutăţii, greutatea ql a pîrghiei, constanta k a arcului (M) şi constanta k_1 a lamelei (N).

Aplicaţie numerică: $P = 1{,}5$ daN, $ql = 0{,}3$ daN, $a = 2$ cm, $l = 20$ cm, $k = 0{,}02$ daN/cm şi $k_1 = 0{,}01$ daN/cm.

Rezolvare. În stare de repaus, pîrghia face un unghi φ_0 cu o direcţie de reper (Fig. 14.9). În această stare, momentele forţelor elastice $k_1l\varphi_0$ şi $ka\varphi_0$ faţă de punctul 0, echilibrează momentul greutăţii P şi al greutăţii ql.

Faţă de poziţia de repaus φ_0, la un moment oarecare, pîrghia are o poziţie φ, iar asupra sa acţionează, în afară de forţele anterioare, $k_1 l\varphi_0$, $ka\varphi_0$, P, ql,

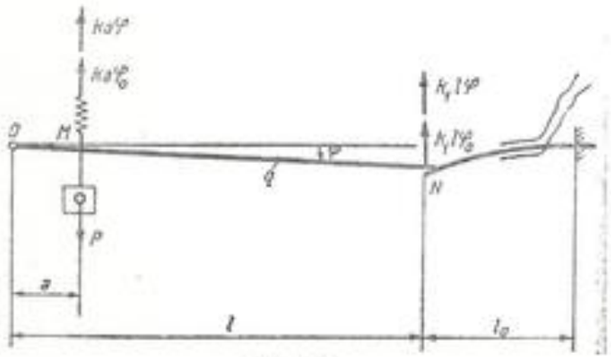


Fig. 14.9

care îşi fac echilibru — forţele de inerţie ale corpurilor P şi ql şi forţele elastice $k_1l\varphi$ şi $ka\varphi$. Scriind ecuaţia mişcării de rotaţie faţă de punctul O, rezultă

$$\sum J\ddot{\varphi} + \sum M_0 = 0,$$

$$\left(\frac{P}{g}a^2 + \frac{q}{g}\cdot\frac{l^2}{3}\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k_1l^2\varphi + ka^2\varphi = 0,$$

respectiv:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{(ka^2 + k_1l^2)g}{Pa^2 + \frac{1}{3}ql^2}\varphi = 0.$$

Frecvenţa proprie a vibraţiei este:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ka^2 + k_1l^2}{Pa^2 + \frac{1}{3}ql^2}\,g}.$$

Aplicaţie numerică:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0{,}02\cdot 2^2 + 0{,}01\cdot 20^2}{1{,}5\cdot 2^2 + \frac{1}{3}\,0{,}3\cdot 20^2}\,981} = 1{,}48 \text{ Hz}.$$

14.10. Un sistem oscilant este format dintr-un disc circular de greutate Q şi rază R, o lamelă cu lungimea l şi rigiditatea la încovoiere EI_z şi două arcuri elicoidale identice, cu constante elastice k^*, (fig. 14.10, *a*). Să se determine frecvenţa proprie a vibraţiilor sistemului, ştiind că masele proprii ale arcurilor şi lamelei sînt neglijabile.

Rezolvare. Sistemul oscilant are un singur grad de libertate. Frecvenţa proprie este dată de formula (14.2) în care se înlocuieşte masa P/g prin momentul de inerţie J al discului,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{J}}, \quad \text{în care} \quad J = \frac{QR^2}{2g}.$$

Pentru determinarea constantei elastice k a sistemului oscilant, se aplică discului un moment M, sub acţiunea căruia el se roteşte cu un unghi φ, iar elementele elastice se deformează ca în figura 14. 10, *b*. Prin definiţie, $k = \frac{M}{\varphi}$.

Notînd cu δ_{st_1} săgeata lamelei şi cu δ_{st_2} deplasarea punctului 2, rezultă:

$$\varphi = \frac{\delta_{st_1} + \delta_{st_2}}{R + l}. \qquad (1)$$

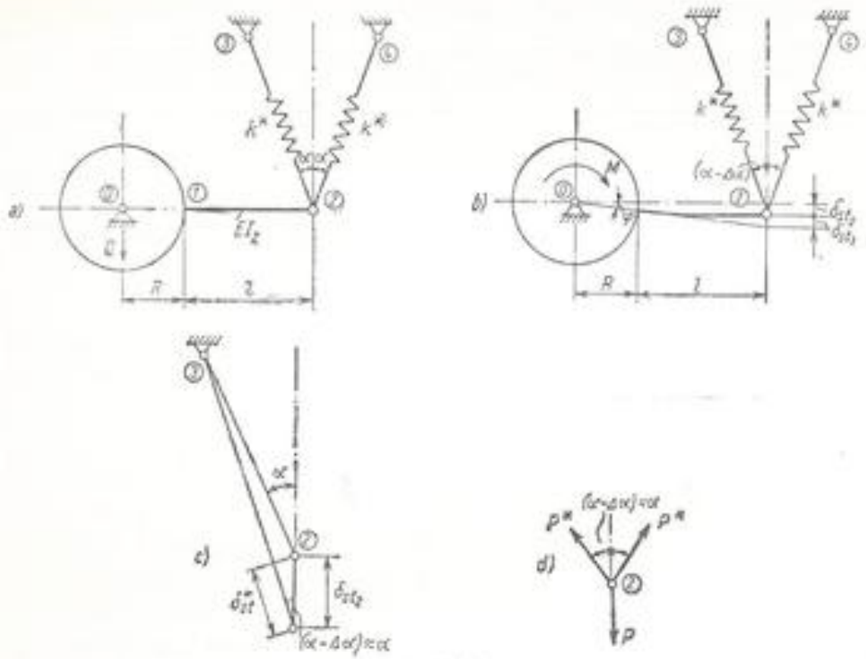


Fig. 14.10

Lamela este încastrată în *1* și solicitată la încovoiere de o forță concentrată $P = \frac{M}{R+l}$, aplicată în *2*; rezultă

$$\delta_{st_1} = \frac{Pl^3}{3EI_z}.$$

Dacă punctul **2** are deplasarea δ_{st_2}, fiecare din cele două arcuri se va lungi cu δ^*_{st} (fig. 14.10, *c*):

$$\delta^*_{st} = \delta_{st_2} \cos(\alpha - \Delta\alpha) \approx \delta_{st_2} \cos\alpha.$$

În fiecare arc va apare forța

$$P^* = k^* \delta^*_{st} = k^* \delta_{st_2} \cos\alpha,$$

deci

$$\delta_{st_2} = \frac{P^*}{k^* \cos\alpha}. \qquad (2)$$

Din ecuația de echilibru a nodului 2 rezultă (fig. 14. 10, *d*):

$$P^* = \frac{P}{2\cos\alpha},$$

care introdusă în relația (2), dă:

$$\delta_{st_2} = \frac{P}{2k^* \cos^2\alpha}.$$

Înlocuind în relația (1) expresiile găsite pentru δ_{st_1} și δ_{st_2} se obține

$$k = \frac{M}{\varphi} = \frac{(R+l)^2}{\frac{l^3}{3EI_z} + \frac{1}{2k^* \cos^2\alpha}}.$$

Frecvența este

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{QR^2} \cdot \frac{(R+l)^2}{\frac{l^3}{3EI_z} + \frac{1}{2k^* \cos^2\alpha}}}.$$

14.11. Pe o grindă simplu rezemată, de 6 m deschidere, avînd secțiunea transversală un profil I 26, este așezat un motor de 1 500 daN greutate, care are o turație de 750 rot/min. Să se cerceteze dacă motorul poate fi așezat oriunde pe grindă. În caz contrar, să se indice regiunile de pe grindă în care există pericol de rezonanță (Fig. 14.11).

Rezolvare: Săgeata produsă de o forță P este:

$$\delta_{st} = \frac{Px^2(l-x)^2}{3EIl}.$$

Frecvența vibrației proprii este:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \frac{1}{6{,}28}\sqrt{\frac{981}{\frac{1\,500x^2(600-x)^2}{3 \cdot 2\,100\,000 \cdot 5\,740 \cdot 600}}} = \frac{600\,000}{x(600-x)}.$$

Frecvența de lucru a motorului este:

$$f' = \frac{750}{60} = 12{,}5 \text{ Hz}.$$

Pentru ca să nu existe pericol de rezonanță este necesar ca:

$$f \neq f' \quad \text{sau} \quad \frac{600\,000}{x(600-x)} \neq 12{,}5.$$

Poziția motorului pe grindă, pentru a exista rezonanța, se determină din ecuația $f = f'$ adică:

$$x^2 - 600\,x + 48\,000 = 0.$$

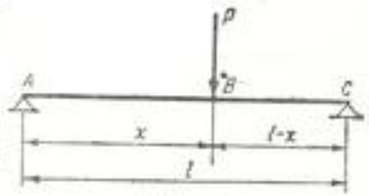


Fig. 14.11

Rădăcinile acestei ecuaţii fiind:

$$x_1 = 505 \quad \text{şi} \quad x_2 = 95,$$

rezultă că pentru a nu se produce rezonanţă trebuie ca:

$$x \neq 5{,}05 \text{ m sau } x \neq 0{,}95 \text{ m}.$$

Desigur că trebuie evitate şi zonele din apropierea acestor puncte.

14.12. Un motor, avînd o greutate de 6 500 daN, este aşezat pe un bloc de fundaţie de beton cu dimensiunile:

$$1{,}00 \times 1{,}00 \times 0{,}80 \text{ m}^3.$$

Coeficientul de tasare fiind $k = 10 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^3}$, iar greutatea specifică a betonului $\gamma = 2\,200$ daN/m³, se cere să se determine frecvenţa proprie de oscilaţie şi turaţia pe care o poate avea motorul pentru a nu exista pericol de rezonanţă.

Rezolvare. Greutatea blocului de fundaţie este:

$$G = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}8 \cdot 2\,200 = 1\,760 \text{ daN}.$$

Greutatea totală (fundaţie + motor) este:

$$P = 6\,500 + 1\,760 = 8\,260 \text{ daN}.$$

Masa este:

$$m = \frac{P}{g} = \frac{8\,260}{981} = 8{,}42 \text{ daN s}^2/\text{cm}.$$

Efortului unitar pe fundaţie:

$$\sigma = \frac{8\,260}{10\,000} = 0{,}826 \text{ daN/cm}^2$$

îi corespunde o tasare elastică:

$$\delta = \frac{\sigma}{k} = \frac{0{,}826}{10} = 0{,}0826 \text{ cm}.$$

Constanta elastică este:

$$\frac{P}{\delta} = \frac{8\,260}{0{,}0826} = 100\,000 \text{ daN/cm},$$

iar frecvenţa:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{100\,000}{8{,}42}} = 17{,}4 \text{ Hz}.$$

Turaţia motorului trebuie să fie:

$$n \neq 17{,}4 \cdot 60 = 1\,044 \text{ rot/min}.$$

14.13. Un motor cu greutatea $P = 500$ daN este fixat pe două grinzi paralele din lemn de brad ca în figura 14.13, avînd o deschidere $l = 160$ cm. Motorul are o masă neechilibrată de greutate $Q = 5$ daN, la distanţa $R = 10$ cm de la axul rotorului. Turaţia lui este de 1 500 rot/min.

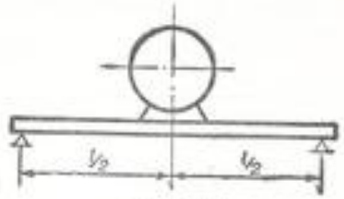


Fig. 14.13

Grinzile de lemn pot fi făcute în trei alternative, avînd, respectiv, secţiunile:

$$A = 12 \times 20 \text{ cm}^2,\ A = 12 \times 12 \text{ cm}^2 \text{ şi } A = 15 \times 24 \text{ cm}^2$$

şi greutatea proprie pentru o grindă, respectiv:

$$G = 23 \text{ daN},\ G = 13{,}8 \text{ daN, sau } G = 34{,}5 \text{ daN}.$$

Să se calculeze care dintre grinzi poate suporta vibraţia fără depăşirea rezistenţei admisibile $\sigma_a = 100$ daN/cm² şi să se arate între ce limite poate varia turaţia pentru a nu se depăşi această rezistenţă.

Rezolvare. Se consideră prima grindă şi se efectuează calculele numai pentru una dintre cele două grinzi aşezate în paralel.

Această grindă va suporta numai jumătate din greutatea motorului. Pulsaţia vibraţiei proprii, ţinînd seamă şi de masa proprie, este:

$$p = \sqrt{\frac{g}{f}} = \sqrt{\frac{g}{\dfrac{\left(\frac{P}{2} + \frac{17}{35}G\right)l^3}{48EI}}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 80\,000 \cdot \frac{12 \cdot 20^3}{12}}{\left(\frac{500}{2} + \frac{17}{35} \cdot 23\right) \cdot 160^3}} \cdot 981 = 166{,}5 \text{ rad/s}.$$

Turaţia critică corespunzătoare a motorului este:

$$n_{cr} = \frac{30}{\pi}\omega_{cr} = \frac{30}{\pi} \cdot 166{,}5 = 1\,590 \text{ rot/min}.$$

Pentru calculul efortului unitar ce se produce în grindă, se va ţine seamă şi de efortul unitar suplimentar, care se produce prin creşterea amplitudinilor, datorită factorului de amplificare A_0:

$$\sigma = \sigma_{st}\left(1 + \delta_F \frac{A_0}{\delta_{st}}\right)$$

unde δ_F este săgeata corespunzătoare forţei F, care produce vibraţia forţată, în cazul că aceasta s-ar aplica static.

Forţa centrifugă F a greutăţii neechilibrate Q este (pentru o singură grindă)

$$F = \frac{Q}{2g} R\omega^2,$$

iar săgeata corespunzătoare este:

$$\delta_F = \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{QR\omega^2 l^3}{2 \cdot 48EI\,g}.$$

Săgeata statică datorită greutății proprii și forței concentrate este:

$$\delta_{st} = \frac{\frac{P}{2} l^3}{48EI} + \frac{5\frac{G}{l} l^4}{384EI} = \frac{(4P + 5G)l^3}{384EI}.$$

Raportul lor este:

$$\frac{\delta_F}{\delta_{st}} = \frac{\frac{QR\omega^2 l^3}{96EIg}}{\frac{(4P + 5G)l^3}{384EI}} = \frac{4QR\omega^2}{(4P + 5G)g} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10\omega^2}{(4 \cdot 500 + 5 \cdot 23)981} = 0{,}0000965\,\omega^2.$$

Factorul de amplificare este:

$$A_0 = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} = \frac{p^2}{p^2 - \omega^2} = \frac{166{,}5^2}{166{,}5^2 - \omega^2}.$$

Efortul unitar static este:

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W} = \frac{\frac{Pl}{2 \cdot 4} + \frac{Gl}{8}}{W} = \frac{(P + G)l}{8\frac{bh^2}{6}} = \frac{(500 + 23)160}{8 \cdot \frac{12 \cdot 20^2}{6}} = 13{,}1 \text{ daN/cm}^2.$$

Dacă motorul se roteşte cu turaţia de regim se obţine:

$$\omega = \omega_0 = \frac{\pi n_0}{30} = \pi\frac{1\,500}{30} = 157 \text{ rad/s},$$

iar raportul săgeţilor este:

$$\frac{\delta_F}{\delta_{st}} = 0{,}0000965 \cdot 157^2 = 2{,}37;$$

$$A_0 = \frac{168^2}{168^2 - 157^2} = 9;$$

$$\sigma = \sigma_{st}\left(1 + \frac{\delta_F}{\delta_{st}} A_0\right) = 13{,}1(1 + 2{,}37 \cdot 9) \approx 292 \text{ daN/cm}^2 > \sigma_a.$$

Prima grindă nu poate fi folosită pentru turaţia de regim. Trebuie să se afle pentru ce turaţii poate fi folosită, astfel ca $\sigma \leqslant \sigma_a$.

$$\sigma_a = \sigma_{st}\left(1 + \frac{\delta_F}{\delta_{st}} A_0\right);$$

sau:

$$1 + \frac{\delta_F}{\delta_{st}} \cdot \frac{p^2}{p^2 - \omega^2} = \frac{\sigma_a}{\sigma_{st}}.$$

Introducînd valorile numerice se obţine:

$$1 + 0{,}0000965\,\omega^2 \frac{166{,}5^2}{166{,}5^2 - \omega^2} = \frac{100}{13{,}1} = 7{,}63.$$

Se obţin în felul acesta două soluţii pentru ω, respectiv pentru n

$$\omega_1 = 140{,}5 \text{ rad/s sau } n_1 \simeq 1\,340 \text{ rot/min},$$

$$\omega_2 = 215{,}7 \text{ rad/s sau } n_2 \simeq 2\,060 \text{ rot/min}.$$

Grinda de 12 × 20 poate fi deci folosită numai pentru turaţii mai mici decît 1 340 rot/min sau mai mari decît 2 090 rot/min.

În mod analog se va găsi şi pentru celelalte două grinzi domeniul de utilizare. Rezultatele sînt trecute în tabela 14.13.

Se observă că celelalte două grinzi pot fi folosite pentru turaţia de 1 500 rot/min; la una, această turaţie este superioară turaţiei critice, iar la cealaltă, inferioară turaţiei critice.

Tabela 14.13

Nr.	Secţiunea cm²	Greutatea proprie, G daN	σ_{st} daN/cm²	n_{cr} rot/min	n_1 rot/min	n_2 rot/min	A_0 la $\omega = \omega_0$	σ la $n = n_0$ daN/cm²
1	12×20	23	13,1	1 605	1 340	2 060	9	292
2	12×12	13,8	35,7	750	648	923	0,333	64,5
3	15×24	34,5	7,42	2 330	1 930	3 210	1,72	37

14.14. Să se calculeze frecvenţa de oscilaţie pe verticală a unei greutăţi P, atîrnată de două bare elastice, din oţel de secţiune A, ca în figura 14.14. Se va neglija masa proprie a celor două bare în raport cu cea a greutăţii P.

Aplicaţie numerică: $P = 15$ kN; $l = 1{,}8$ m; $A = 2$ cm².

Rezolvare. Se utilizează formula (14.3) în care:

$$\delta_{st} = \frac{2Pl}{3EA}.$$

Rezultă deci:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3gEA}{2Pl}}.$$

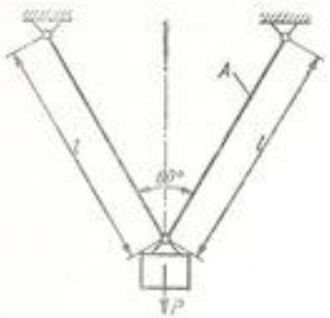


Fig. 14.14

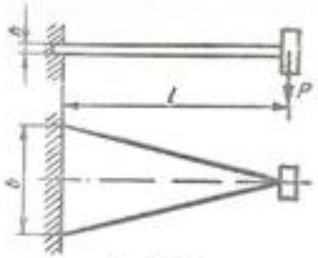


Fig. 14.15

Numeric se obține:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3 \cdot 981 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 2}{2 \cdot 1\,500 \cdot 180}} = 24{,}1 \text{ Hz}.$$

14.15. Să se calculeze frecvența proprie de oscilație a unui arc cu foi în consolă, în soluția teoretică de realizare a acestuia (Fig. 14.15). Se va neglija masa proprie a arcului față de cea a sarcinii P.

Aplicație numerică: $P = 100$ daN; $h = 0{,}6$ cm; $l = 60$ cm; $b = 40$ cm.

Rezolvare. Pentru calculul frecvenței proprii se utilizează formula (14.3). Calculul deformației δ_{st} se face analitic, prin integrarea ecuației diferențiale a fibrei medii deformate, ținînd seama că momentul de inerție variază liniar, după aceeași lege ca și momentul încovoietor. După determinarea constantelor de integrare, săgeata va avea expresia:

$$\delta_{st} = \frac{Pl^3}{2EI_0},$$

unde

$$I_0 = \frac{bh^3}{12}.$$

Numeric se obține:

$$\delta_{st} = \frac{100 \cdot 60^3 \cdot 12}{2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 40 \cdot 0{,}6^3} = 7{,}15 \text{ cm},$$

astfel încît frecvența proprie devine:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{981}{7{,}15}} = 1{,}87 \text{ Hz}.$$

14.16. Se dă un arbore pe trei reazeme, avînd la o extremitate un volant ca în figura 14.16. Știind că arborele este din oțel cu secțiune circulară de diametru d și de masă neglijabilă față de cea a sarcinii P, se cere turația critică a acestuia.

Aplicație numerică: $P = 1\,400$ daN; $d = 5$ cm; $l = 20$ cm; $a = 10$ cm.

Rezolvare. Pentru calculul frecvenței proprii se va utiliza formula (14.6), care în acest caz coincide cu formula (14.3).

Pentru calculul deformației δ_{st} prin metoda *Maxwell-Mohr*, se va trasa mai întîi diagrama momentelor încovoietoare M corespunzătoare sarcinii P aplicată static. Momentul încovoietor pe reazemul din mijloc M_2 se obține aplicînd ecuația celor trei momente:

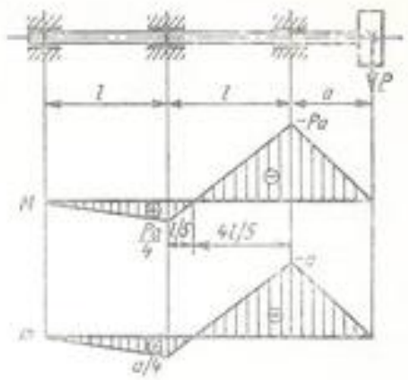


Fig. 14.16

$$2M_2(l + l) + (-Pa)l = 0$$

și va avea valoarea:

$$M_2 = \frac{Pa}{4},$$

astfel încît diagrama de momente încovoietoare va avea forma din figura 14.16. Diagrama de momente încovoietoare m produse de o forță unitară aplicată în secțiunea și direcția în care dorim să găsim deplasarea, deci în locul forței P, va avea aceeași formă, amplitudinile avînd expresiile date în diagrama M, în care se introduce $P = 1$.

Aplicînd teorema lui *Maxwell-Mohr*, precum și regula lui *Vereșceaghin*, se obține:

$$\delta_{st} = \frac{1}{EI}\int Mm\,dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\frac{Pa}{4}l\frac{2}{3}\frac{a}{4} + \frac{1}{2}\frac{Pa}{4}\frac{l}{5}\frac{2}{3}\frac{a}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(-Pa)\frac{4l}{5}\frac{2}{3}(-a) + \frac{1}{2}(-Pa)a\frac{2}{3}(-a)\right] = \frac{Pa^3}{EI}\left(\frac{7l}{24} + \frac{a}{3}\right).$$

Numeric rezultă:

$$\delta_{st} = \frac{1\,400 \cdot 10^3 \cdot 64}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 5^4}\left(\frac{7 \cdot 20}{24} + \frac{10}{3}\right) = 0{,}01985 \text{ cm},$$

astfel încît frecvența proprie va fi:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{981}{0{,}01985}} = 35{,}5 \text{ Hz},$$

respectiv turația critică este:

$$n = f \cdot 60 = 35{,}5 \cdot 60 = 2\,130 \text{ rot/min}.$$

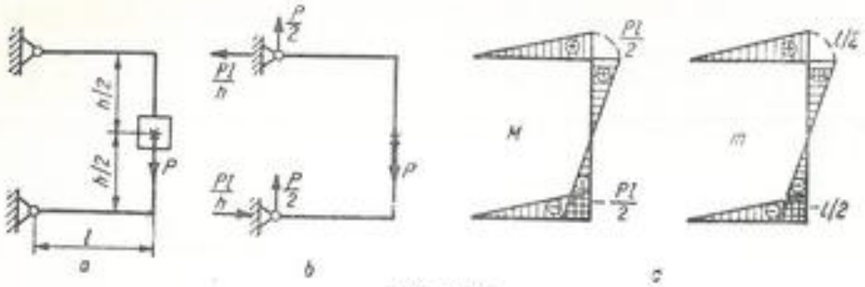


Fig. 14.17

14.17. Să se calculeze frecvența proprie de oscilație pe verticală a greutății P fixată pe cadrul din figura 14.17, *a*. Cadrul este din oțel, avînd momentul de inerție I constant pe toată lungimea, iar masa acestuia este neglijabilă față de cea a sarcinii P.

Aplicație numerică: $P = 600$ daN; $l = 1{,}5$ m; $h = 2$m; $I = 221$ cm^4.

Rezolvare. Pentru calculul frecvenței proprii se va utiliza formula (14.3). Aplicînd metoda *Maxwell-Mohr*, valorile reacțiunilor se obțin ca în figura 14.17, *b*. Aceste rezultate se pot obține și direct din considerente de simetrie. Diagramele momentelor încovoietoare datorite forței P și unei forțe unitare aplicată în locul forței P sînt date în figura 14.17, *c*. Aplicînd metoda *Maxwell-Mohr*, săgeata va avea expresia:

$$\delta_{st} = \frac{1}{EI}\left[2\,\frac{1}{2}\,\frac{Pl}{2}\,l\,\frac{2}{3}\,\frac{l}{2} + 2\,\frac{1}{2}\,\frac{Pl}{2}\,\frac{h}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{l}{2}\right] = \frac{Pl^3}{6EI}\left(l + \frac{h}{2}\right).$$

Numeric se obține:

$$\delta_{st} = \frac{600 \cdot 150^3}{6 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 221}\left(150 + \frac{200}{2}\right) = 1{,}215 \text{ cm},$$

astfel încît frecvența proprie va fi:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{981}{1{,}215}} = 4{,}53 \text{ Hz}.$$

14.18. Se dă un amortizor cu lichid ca în figura 14.18. Se constată că fără discul B amplitudinile oscilațiilor scad la 1/10 din cele inițiale, în timp de 2 s.

Se cere:

a) Să se calculeze raportul dintre secțiunea totală a cilindrului amortizorului și a găurilor acestuia pentru ca amplitudinea să fie, după 2s, $\frac{1}{100}$ din cea inițială.

Se presupune că rezistența ce o produce lichidul la trecerea prin găurile *a* din discul B este de forma $c\frac{dx}{dt}$.

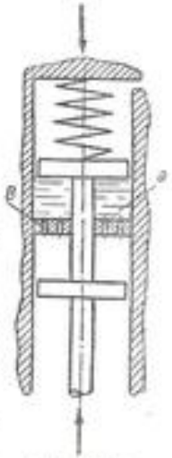


Fig. 14.18

b) Să se calculeze același raport pentru ca mișcarea să fie aperiodică, cunoscînd valoarea lui δ_{st}.

Aplicație numerică: $\delta_{st} = 4$ cm.

Rezolvare. a) În relația (14.4) se pune condiția ca amplitudinea după 2*s* să reprezinte $\frac{1}{10}$ din cea inițială.

Se obține astfel:

$$e^{-2n} = \frac{1}{10},$$

de unde:

$$n = 1{,}15.$$

Notînd cu α raportul dintre secțiunea pistonului și a găurilor, în virtutea continuității și a incompresibilității lichidului, viteza acestuia prin găurile *a* este de α ori mai mare decît cea din cilindru.

Ecuația de mișcare va fi asemănătoare ecuației (14.4) în care se înlocuiește n cu αn. În acest caz:

$$e^{-2\alpha n} = \frac{1}{100},$$

de unde:

$$2\alpha n = 4{,}6$$

iar:

$$\alpha = 2.$$

b) Condiția de aperiodicitate este:

$$p \leqslant n.$$

Pentru cazul limită, $p = n$ se obține:

$$\alpha n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

$$\alpha = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \frac{1}{1{,}15}\sqrt{\frac{981}{4}} = 13{,}65.$$

Trebuie deci ca: $\alpha \geqslant 13{,}65$.

14.19. Să se determine constanta elastică k_2 așa fel ca sistemul din figura 14.19 să fie absorbitor de vibrații. Se consideră că nu există frecări. Forța periodică este $Q \cos \omega t$.

Rezolvare. Notînd cu x_1 și x_2 deplasarea celor două mase de la poziția lor de echilibru, ecuațiile de mișcare pentru cele două mase sînt:

$$M\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = Q \cos \omega t,$$

$$m\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0.$$

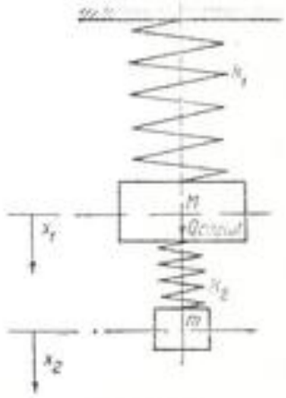


Fig. 14.19

Încercînd soluţii de forma:

$$x_1 = \delta_1 \cos \omega t$$

$$x_2 = \delta_2 \cos \omega t$$

se obţine:

$$-M\delta_1\omega^2 \cos \omega t + k_1\delta_1 \cos \omega t - k_2(\delta_2 - \delta_1) \cos \omega t = Q \cos \omega t$$

$$-m\delta_2\omega^2 \cos \omega t + k_2(\delta_2 - \delta_1) \cos \omega t = 0.$$

Simplificînd cu $\cos \omega t$, din cele două ecuaţii, rezultă:

$$\delta_1 = \frac{Q(k_2 - \omega^2 m)}{(k_1 + k_2 - \omega^2 M)(k_2 - \omega^2 m) - k_2^2}$$

$$\delta_2 = \frac{Qk_2}{(k_1 + k_2 - \omega^2 M)(k_2 - \omega^2 m) - k_2^2}.$$

Se observă că pentru ca masa M să rămînă nemişcată, trebuie ca $\delta_1 = 0$, adică:

$$k_2 - \omega^2 m = 0,$$

sau:

$$k_2 = m\omega^2,$$

deci constanta elastică a absorbitorului de vibraţii trebuie să fie astfel încît frecvenţa lui proprie să fie egală cu frecvenţa oscilaţiei forţate.

14.20. O greutate P este suspendată de o bară curbă circulară încastrată la un capăt, cu rigiditate constantă EI, avînd raza medie R şi unghiul la centru $\frac{3\pi}{2}$. Să se calculeze frecvenţele proprii ale sistemului.

Rezolvare. Sistemul are două grade de libertate. Masa $m = \frac{P}{g}$ se mişcă în planul xOy; deplasările ei faţă de poziţia de echilibru static pe direcţiile x, y se notează respectiv cu u şi v. Forţele de inerţie corespunzătoare au expresiile:

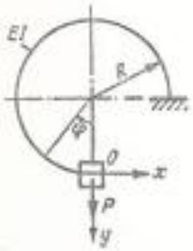


Fig. 14.20

$$X = -m\ddot{u}, \qquad Y = -m\ddot{v}. \tag{1}$$

Legătura dintre forţele de inerţie şi deplasări este dată de relaţiile:

$$u = X\delta_{xx} + Y\delta_{xy} \tag{2a}$$

$$v = X\delta_{xy} + Y\delta_{yy} \tag{2b}$$

care exprimă deplasările efective u, v cu ajutorul deplasărilor $\delta_{xx}, \ldots, \delta_{yy}$ date de sarcinile unitare pe direcţiile x şi y.

Dacă se înlocuiesc expresiile (1) în (2a) şi (2b) se obţine:

$$u + m\delta_{xx}\ddot{u} + m\delta_{xy}\ddot{v} = 0 \tag{3a}$$

$$v + m\delta_{xy}\ddot{u} + m\delta_{yy}\ddot{v} = 0. \tag{3b}$$

Sistemul (3) admite soluţii de forma:

$$u = u_0 \sin (pt + \varphi) \tag{4a}$$

$$v = v_0 \sin (pt + \varphi) \tag{4b}$$

care introduse în (3a) şi (3b) dau:

$$(1 - m\delta_{xx}p^2)u_0 - m\delta_{xy}p^2 v_0 = 0 \tag{5a}$$

$$-m\delta_{xy}p^2 u_0 + (1 - m\delta_{yy}p^2)v_0 = 0. \tag{5b}$$

Ecuaţiile (5a) şi (5b) conduc la soluţii nenule pentru amplitudinile u_0 şi v_0 dacă determinantul sistemului este nul:

$$\begin{vmatrix} 1 - m\delta_{xx}p^2 & -m\delta_{xy}p^2 \\ -m\delta_{xy}p^2 & 1 - m\delta_{yy}p^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Rezolvînd ecuaţia (6) în p^2 se obţine:

$$p_{1,2}^2 = \frac{(\delta_{xx} + \delta_{yy}) \pm \sqrt{(\delta_{xx} - \delta_{yy})^2 + 4\delta_{xy}^2}}{2m(\delta_{xx}\delta_{yy} - \delta_{xy}^2)}. \tag{6a}$$

Deplasările date de sarcinile unitare pe direcţiile x şi y se calculează cu metoda *Mohr-Maxwell:*

$$EI\delta_{xx} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} m_x^2 R d\varphi \tag{7a}$$

$$EI\delta_{xy} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} m_x m_y R d\varphi \tag{7b}$$

$$EI\delta_{yy} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} m_y^2 R d\varphi. \tag{7c}$$

Momentele m_x şi m_y sînt date de sarcinile unitare aplicate respectiv pe direcţiile x şi y:

$$m_x(\varphi) = -R(1 - \cos \varphi) \tag{8a}$$

$$m_y(\varphi) = R \sin \varphi. \tag{8b}$$

Introducînd (8a) şi (8b) în expresiile (7) se obţine:

$$\delta_{xx} = \frac{9\pi + 8}{4} \cdot \frac{R^3}{EI};$$

$$\delta_{xy} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R^3}{EI};$$

$$\delta_{yy} = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{R^3}{EI}.$$

Cu aceste relaţii, pulsaţiile proprii devin:

$$p_1 = 0{,}33\sqrt{\frac{EI}{mR^3}}$$

$$p_2 = 0{,}66\sqrt{\frac{EI}{mR^3}}.$$

Modurile proprii corespunzătoare sînt caracterizate de rapoarte ale amplitudinilor $\frac{u_0}{v_0}$, obţinute din ecuaţiile (5a) sau (5b):

$$\frac{u_0}{v_0} = \frac{m\delta_{xy}p^2}{1 - m\delta_{xx}p^2} = \frac{1 - m\delta_{yy}p^2}{m\delta_{xy}p^2}$$

prin particularizarea pulsaţiei proprii.

Astfel, pentru $p = p_1$ se obţine:

$$\frac{u_{01}}{v_{01}} = -4{,}74$$

şi pentru $p = p_2$:

$$\frac{u_{02}}{v_{02}} = 0{,}074.$$

Se observă că vibraţiile cu pulsaţia p_2 se realizează practic pe verticală.

14.21. Să se calculeze turaţia critică fundamentală a arborelui din figura 14.21 încărcat cu trei sarcini P_1, P_2 şi P_3, ştiind că sub aceste sarcini aplicate static, săgeţile respective sînt δ_1, δ_2 şi δ_3.

Aplicaţie numerică: $P_1 = 1\,000$ daN; $P_2 = 2\,000$ daN; $P_3 = 4\,000$ daN; $\delta_1 = 0{,}02$ cm; $\delta_2 = 0{,}1$ cm; $\delta_3 = 0{,}04$ cm.

Rezolvare. Conform relaţiei (14.6) se obţine:

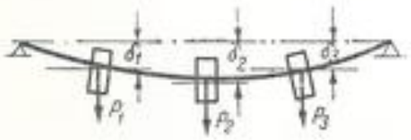


Fig. 14.21

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{g(P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + P_3\delta_3)}{P_1\delta_1^2 + P_2\delta_2^2 + P_3\delta_3^2}},$$

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{981(1000 \cdot 0{,}02 + 2000 \cdot 0{,}1 + 4000 \cdot 0{,}04)}{1000 \cdot 0{,}02^2 + 2000 \cdot 0{,}1^2 + 4000 \cdot 0{,}04^2}} =$$

$$= 118 \text{ rad/s} = \frac{\pi n_{cr}}{30},$$

$$n_{cr} = 1\,130 \text{ rot/min}.$$

14.22. O grindă încastrată la ambele extremităţi este încărcată cu o sarcină uniform distribuită. Se cere să se determine frecvenţele oscilaţiilor proprii.

Rezolvare. Formula care dă aceste frecvenţe este (14.9):

$$f = \frac{\alpha^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{m}},$$

în care α se determină prin condiţia ca X, definit de relaţia (14.10) să satisfacă toate condiţiile de rezemare.

Pentru

$$x = 0, \quad v = 0 \quad \text{şi} \quad v' = 0$$

$$x = l, \quad v = 0 \quad \text{şi} \quad v' = 0.$$

Aceste condiţii se scriu astfel

$$C_1 + C_3 = 0$$

$$\alpha C_2 + \alpha C_4 = 0$$

$$C_1 \cos \alpha l + C_2 \sin \alpha l + C_3 \operatorname{ch} \alpha l + C_4 \operatorname{sh} \alpha l = 0$$

$$-\alpha C_1 \sin \alpha l + \alpha C_2 \cos \alpha l + \alpha C_3 \operatorname{sh} \alpha l + \alpha C_4 \operatorname{ch} \alpha l = 0.$$

Din primele două ecuaţii se deduce:

$$C_3 = -C_1; \; C_4 = -C_2$$

astfel încît ultimele ecuaţii devin:

$$(\cos \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l)C_1 + (\sin \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l)C_2 = 0$$

$$-(\sin \alpha l + \operatorname{sh} \alpha l)C_1 + (\cos \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l)C_2 = 0.$$

Egalînd cu zero determinantul acestui sistem se obţine:

$$(\cos \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l)^2 + (\sin^2 \alpha l - \operatorname{sh}^2 \alpha l) = 0.$$

Dezvoltînd şi ţinînd seamă că

$$\sin^2 \alpha l + \cos^2 \alpha l = 1 \quad \text{şi} \quad \operatorname{ch}^2 \alpha l - \operatorname{sh}^2 \alpha l = 1$$

se obţine:

$$2 - 2 \cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l = 0,$$

sau

$$\cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l = 1.$$

Valorile pentru care este satisfăcută această ecuație transcendentă sînt:

$$\alpha l = 4{,}73,\ 7{,}853,\ 10{,}996\ \ldots$$

Pentru aceste valori se obține:

$$f_1 = \frac{3{,}56}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\quad f_2 = \frac{9{,}8}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\quad f_3 = \frac{19{,}3}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

14.23. Un arc elicoidal care susține o greutate $P = 1$ daN are următoarele caracteristici: raza de înfășurare $R = 3$ cm, numărul de spire $n = 20$ spire, diametrul sîrmei arcului $d = 3$ mm și $G = 810\,000$ daN/cm². Se cere să se calculeze cu ce pulsație ω trebuie aplicată o forță periodică de amplitudine $Q = 0{,}2$ daN astfel ca săgeata obținută prin vibrația forțată să fie de cinci ori mai mare decît săgeata statică produsă de sarcina P. Să se calculeze efortul unitar ce se produce în acest caz.

Răspuns. $\omega = 13{,}36$ rad/s; $\tau = 2\,830$ daN/cm².

14.24. Să se calculeze factorul de amortizare necesar arcului menționat în problema 14.23 fără vibrație forțată, astfel încît după 10 s, amplitudinea să devină $\frac{1}{100}$ din cea inițială.

Răspuns. $c = 0{,}00094$ daNs/cm.

14.25. Să se determine pulsația proprie a vibrației de încovoiere a unei grinzi simplu rezemată la capete și încărcată la mijloc cu o greutate $P = 20$ kN, dacă lungimea grinzii este $l = 8$ m și dacă ea este dimensionată din profil I, luînd $\sigma_a = 600$ daN/cm².

Să se calculeze amplitudinea vibrației forțate cu amortizare dacă forța care produce vibrația forțată are amplitudinea $F = 100$ daN, pulsația vibrației forțate $\omega = 1{,}1p$, iar factorul de amortizare $n = 0{,}1p$.

Care este efortul unitar maxim în acest caz? Care este efortul unitar maxim în momentul rezonanței, dacă există amortizare?

Răspuns. Profilul necesar este I 30 iar: $p = 30{,}8$ rad/s; $a = 0{,}17$ cm; $\sigma = 712$ daN/cm²; $a_r = 0{,}258$ cm; $\sigma_r = 765$ daN/cm².

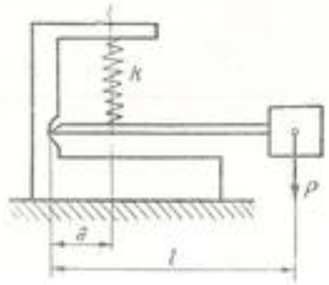


Fig. 14.26

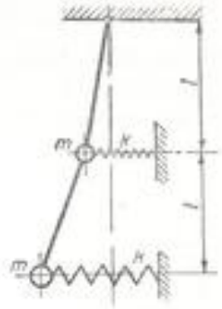


Fig. 14.27

14.26. Să se calculeze frecvența proprie a pendulului orizontal reprezentat în figura 14.26, neglijînd masa barei.

Răspuns. $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{l}\,\frac{g}{\delta_{st}}}$, unde $\delta_{st} = \frac{Pl}{ak}$.

14.27. Să se calculeze care este lungimea pendulului dublu din figura 14.27 și care este raportul dintre constanta elastică k și masa m pentru ca sistemul să aibă pulsația proprie cea mai mică p, iar a doua pulsație proprie să fie cu 20% mai mare.

Răspuns. $l = 10\sqrt{2}\,\frac{g}{p^2}$; $\frac{k}{m} = \frac{7{,}8\sqrt{2} - 4{,}4}{10\sqrt{2}}\,p^2$.

Pulsațiile proprii sînt:

$$p_1^2 = \frac{k}{m} + \frac{2g}{l} - \sqrt{2}\,\frac{g}{l};\quad p_2^2 = \frac{k}{m} + \frac{2g}{l} + \sqrt{2}\,\frac{g}{l}.$$

CAPITOLUL 15

SOLICITĂRI VARIABILE ÎN TIMP

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. Solicitarea variabilă în timp este formată din *cicluri*, adică din variaţii periodice ale efortului unitar între o valoare maximă şi una minimă, ca în figura 15.*a*. Următoarele mărimi definesc ciclul de solicitări variabile:

— efortul unitar maxim σ_{max}

— efortul unitar minim σ_{min}

— efortul unitar mediu σ_m:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; \tag{15.1}$$

— amplitudinea efortului unitar:

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}; \tag{15.2}$$

— coeficientul de asimetrie al ciclului:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \tag{15.3}$$

După semnele pe care le au mărimile de mai sus, se definesc următoarele feluri de cicluri:

— ciclul alternant simetric, avînd:

$$\sigma_m = 0; \quad \sigma_v = \sigma_{max};$$

— ciclul pulsant, cu:

$$\sigma_m = \sigma_v = \frac{\sigma_{max}}{2};$$

— solicitarea statică, cu:

$$\sigma_m = \sigma_{max} = \sigma_{min}; \quad \sigma_v = 0.$$

2. Un element de bază în calculul de rezistenţă la solicitări variabile este *rezistenţa la oboseală*, determinată pe cale experimentală.

Ea se notează cu: σ_{-1}, pentru ciclul simetric;
σ_0, pentru ciclul pulsant;
σ_R, pentru ciclul cu coeficient de asimetrie oarecare.

Cunoaşterea completă a unui material în ce priveşte rezistenţa la oboseală, implică construirea *diagramei rezistenţelor la oboseală*, adică diagrama care dă pe σ_R în funcţie de coeficientul de asimetrie R. Practica a consacrat două tipuri de diagrame ale rezistenţelor la oboseală:

— unele care dau pe σ_v în funcţie de σ_m, valorile σ_v şi σ_m corespunzînd rezistenţelor la oboseală ale diverselor cicluri;

— altele care dau pe σ_{max} şi σ_{min} în funcţie de σ_m.

Diagramele rezistenţelor la oboseală sînt, în general, linii curbe. Construirea acestor curbe este dificilă şi din acest motiv se folosesc *diagrame schematizate*.

Rezistenţele la oboseală ale ciclurilor simetric, pulsant şi oarecare se notează cu următoarele simboluri:

— pentru încovoiere: σ_{-1}, σ_0, σ_R

— pentru întindere-compresiune: σ_{-1t}

— pentru întindere: σ_{0t}, σ_{Rt}

— pentru compresiune: σ_{0c}, σ_{Rc}

— pentru răsucire: τ_{-1}, τ_0, τ_R.

3. Rezistenţele la oboseală sînt determinate, în general, pe epruvete tip netede, cu suprafeţe bine şlefuite şi cu diametre în jurul a 10 mm.

Experienţa a arătat că anumiţi factori care se întîlnesc la piesele reale, diferiţi de cei întîlniţi la epruvetele tip, modifică valorile rezistenţelor la oboseală. Se poate face o grupare a acestor factori astfel:

a) materialul;
b) concentrarea eforturilor unitare;
c) starea suprafeţei epruvetei (piesei)şi tratamentele care i-au fost aplicate;
d) acţiunea agenţilor corosivi;
e) dimensiunile epruvetei;
f) frecvenţa variaţiei sarcinilor;
g) temperatura;
h) tensiunile remanente.

Efectul unora dintre aceşti factori a putut fi determinat cantitativ destul de bine, ceea ce permite luarea lor în considerare în calcul. Pentru alţii, se cunoaşte efectul calitativ, din care rezultă prescripţii de ordin tehnologic. În cele ce urmează se face o scurtă examinare a acestor factori.

a) *Fiecare material* are proprietăţile sale mecanice, deci şi caracteristici proprii la oboseală.

b) *Efectul de concentrare a eforturilor unitare* este unul din factorii principali care trebuie luaţi în considerare în calcule.

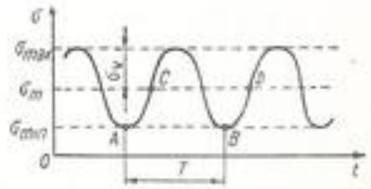


Fig. 15. *a*

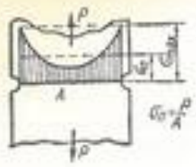


Fig. 15. b

Fenomenul concentrării eforturilor unitare la solicitări statice, reprezentat schematic în figura 15. *b*, este îndeajuns de cunoscut. Efortul unitar maxim în dreptul concentratorului este dat de formula:

$$\sigma_{max} = \alpha_k \sigma_n \tag{15.4}$$

în care: α_k este *coeficientul de concentrare;*
σ_n — *efortul unitar nominal*, dat de formulele curente din rezistenţa materialelor.

Coeficientul de concentrare α_k intră în calculele de rezistenţă în cazul solicitărilor statice. La solicitări variabile, se foloseşte *coeficientul efectiv de concentrare* β_k, definit ca raportul dintre rezistenţa la oboseală a epruvetei tip şi rezistenţa la oboseală a epruvetei crestate, ambele avînd aceleaşi dimensiuni minime, deci acelaşi efort unitar nominal. Valorile lui β_k, întocmai ca acelea ale rezistenţei la oboseală, depind de o serie întreagă de factori (material, forma concentratorului, starea suprafeţei, dimensiunile piesei etc.) ceea ce face mult mai dificilă determinarea lor.

În acest caz se recurge, în general, la grafice. Pe lîngă acestea se folosesc şi diverse formule de recurenţă pentru calculul lui β_k.

O formulă, utilizată adesea, calculează pe β_k în funcţie de α_k:

$$\beta_k = 1 + \eta_k(\alpha_k - 1). \tag{15.5}$$

Valorile lui η_k pentru oţeluri se pot lua din figura 15.*c*, în funcţie de raza de racordare r a concentratorului şi de raportul $\frac{\sigma_c}{\sigma_r}$ între limita de curgere şi rezistenţa de rupere.

În figura 15.*d* se dau valorile lui β_k pentru bara de secţiune circulară avînd variaţie de diametru, de la D la d, realizată cu racordare circulară. Coeficienţii sînt daţi pentru $\frac{D}{d} = 2$ şi $d = 30 \ldots 50$ mm.

Pentru alt raport $\frac{D}{d}$, coeficienţii de concentrare se determină cu relaţia

$$\beta_k = 1 + \xi(\beta_{k0} - 1) \tag{15.6}$$

în care coeficientul ξ se ia din figura 15.*e* (curba *1* pentru încovoiere şi *2* pentru răsucire), iar β_{k0} corespunde lui $\frac{D}{d} = 2$ din figura 15.*d*.

Pentru acelaşi concentrator, solicitat la răsucire, valorile lui β_k, pentru $\frac{D}{d} = 2$ şi $d = 30 \ldots 50$ mm, sînt date de figura 15.*f*. La alte rapoarte $\frac{D}{d}$, se foloseşte formula (15.6) şi figura 15.*e*.

Pentru arborele de secţiune circulară, avînd o gaură transversală, solicitat la încovoiere, coeficienţii β_k, se iau din figura 15.*g* în care: curba *1* este pentru $\frac{d}{D} = 0{,}05 - 0{,}1$ şi $D = 40 - 50$ mm; curba *2* pentru $\frac{d}{D} = 0{,}10 - 0{,}20$ şi $D = 40 - 50$ mm; curba *3* pentru $\frac{d}{D} = 0{,}15 - 0{,}25$ şi $D = 6 - 8$ mm.

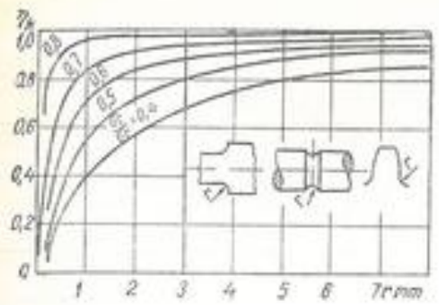


Fig. 15. e

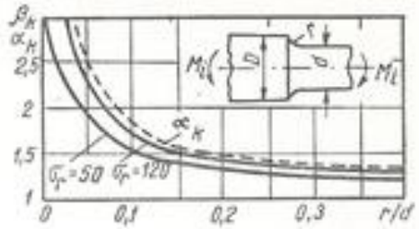


Fig. 15. d

În figura 15.*h* se dau coeficienţii de concentrare, inclusiv factorul dimensional $\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon}\right)$, pentru montaje presate: curba *1* cînd bucşa transmite o forţă sau cuplu; curba *2* cînd bucşa nu transmite sarcini. Graficele sînt construite pentru arbore de oţel cu $\sigma_r = 50$ daN/mm², respectiv pentru o presiune între bucşă şi arbore $p \geqslant 3$ daN/mm². Pentru alte rezistenţe de rupere, respectiv altă presiune de fretaj, coeficientul de concentrare este

$$\frac{\beta_k}{\varepsilon} = \left(\frac{\beta_k}{\varepsilon}\right)_0 \cdot \xi' \xi'', \tag{15.7}$$

unde $\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon}\right)_0$ sînt valorile din figura 15.*h*, iar coeficienţii de corecţie ξ', ξ'' se iau din figurile 15.*i*, 15.*j*. Valorile din figura 15.*h* sînt pentru arbori solicitaţi la încovoiere. Pentru răsucire se ia

$$\frac{\beta_{kr}}{\varepsilon} = 1 + 0{,}6\left(\frac{\beta_{k0}}{\varepsilon} - 1\right). \tag{15.8}$$

c) *Starea suprafeţei epruvetei şi efectul tratamentelor superficiale care i-au fost aplicate acesteia* au o mare influenţă asupra valorii rezistenţei la oboseală.

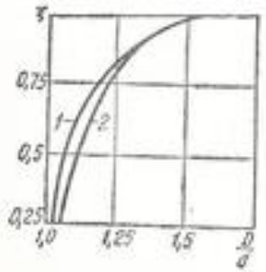


Fig. 15. e

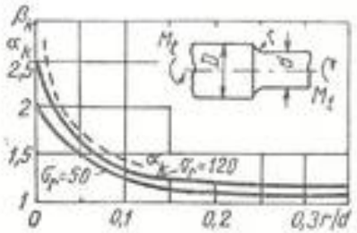


Fig. 15. f

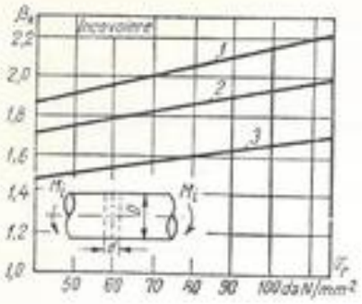


Fig. 15. g

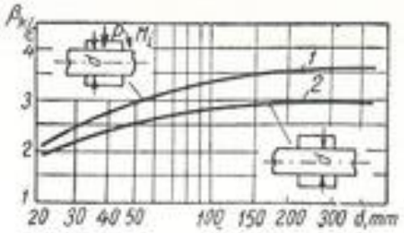


Fig. 15. h

Suprafaţa unei piese reprezintă în general locul de apariţie a microfisurilor care provoacă ruperea prin oboseală.

α) *Gradul de prelucrare* a suprafeţei influenţează în mare măsură valoarea rezistenţei la oboseală. Epruvetele standard au suprafaţa şlefuită. Pentru piese cu o prelucrare mai brută, rezistenţa la oboseală scade. Acest lucru se ia în considerare în calcule prin introducerea *coeficientului de calitate al suprafeţei* γ, care este raportul dintre rezistenţa la oboseală a piesei cu o prelucrare oarecare a suprafeţei şi rezistenţa la oboseală a piesei cu suprafaţa şlefuită. Valorile lui γ, pentru oţel, se pot lua din figura 15.*h*.

β) Rezistenţa la oboseală se măreşte prin tratamente termice, termochimice şi mecanice superficiale, cum sînt: călirea prin curenţi de înaltă frecvenţă, călirea prin flacără, cementarea, nitrurarea, ecruisarea cu jet de alice, rularea cu role. La oricare din aceste tratamente, apare de asemenea un coeficient de calitate γ, de data aceasta supraunitar. Valori informative pentru aceşti coeficienţi se găsesc în literatura de specialitate.

γ) Pentru protecţia împotriva uzurii şi coroziunii a pieselor de oţel, se folosesc acoperiri metalice, realizate în general pe cale electrolitică, din: crom, nichel, cupru, zinc etc. Aceste straturi acoperitoare au un rol foarte

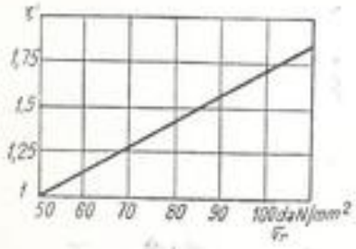


Fig. 15. i

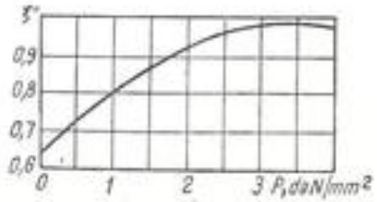


Fig. 15. j

important în mărirea rezistenţei la uzură şi coroziune. În schimb, ele duc la uşoare micşorări ale rezistenţei la oboseală, ceea ce se traduce prin apariţia în formulele de rezistenţă a unui coeficient de calitate subunitar γ.

Valorile lui γ din figura 15.*k* se referă la:

1) epruvetă lustruită;
2) şlefuire;
3) finisare prin strunjire;
4) degroşare prin strunjire;
5) piese cu concentrator inelar;
6) suprafaţa laminată, cu crustă;
7) coroziune în apă dulce;
8) coroziune în apă sărată.

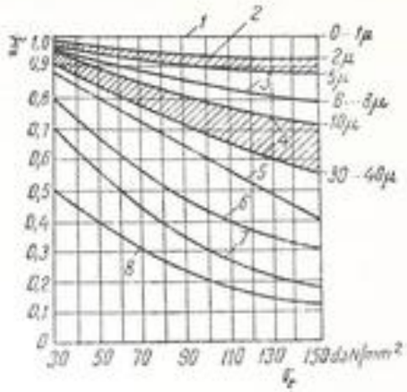


Fig. 15. k

d) *Acţiunea agenţilor corosivi* este foarte dăunătoare asupra rezistenţei la oboseală. Efectul acestora se ia în considerare prin acelaşi coeficient γ, definit mai sus. Adesea se introduce în calcul coeficientul de calitate γ ca reprezentînd atît acţiunea agentului corosiv, cît şi efectul metodei de protecţie împotriva coroziunii. În această situaţie, cu cît protecţia anticorosivă este mai eficace, cu atît coeficientul de calitate γ este mai mare, ajungînd uneori, chiar la valori supraunitare.

e) *Dimensiunile* epruvetelor au de asemenea influenţă asupra rezistenţei la oboseală: cu cît diametrul piesei creşte, rezistenţa la oboseală scade. Acest efect se ia în considerare în calcule prin introducerea *factorului dimensional* ε, subunitar, care este raportul între rezistenţa la oboseală a epruvetei cu diametrul oarecare şi cea a epruvetei tip cu diametrul de 10 mm sau apropiat de acesta. În cazul unei piese cu crestături, factorul dimensional (notat uneori cu ε_k) are o definiţie analogă.

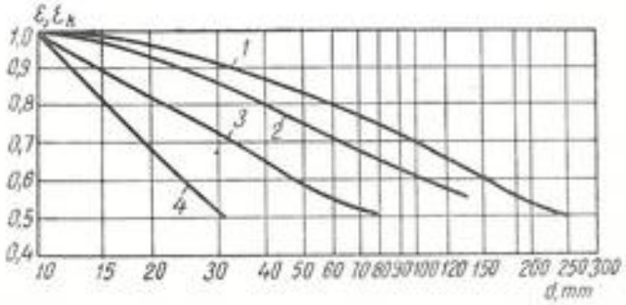


Fig. 15. l

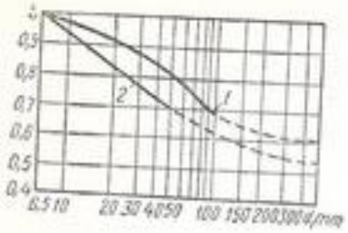


Fig. 15. m

Valorile factorului dimensional se iau din figura 15.*l*, pentru oţeluri solicitate la încovoiere. În lipsă de alte date, aceste valori se pot folosi şi pentru răsucire. Curbele din figura 15.*l* se referă la:

1) oţel carbon, fără concentrări de eforturi unitare;

2) oţel aliat fără concentrări şi oţel carbon cu concentrări moderate;

3) oţel aliat cu concentrări moderate de eforturi unitare;

4) oţel aliat cu concentrări puternice.

Se dă şi figura 15.*m*, în care curba *1* se referă la oţel carbon, cu $\sigma_r = 40 - 50$ daN/mm², iar curba *2* la oţel aliat, cu $\sigma_r = 120 - 140$ daN/mm². Pentru alte calităţi de oţel, se poate interpola.

f) În ce priveşte *frecvenţa de variaţie* a solicitărilor, se constată că ea nu are influenţă asupra rezistenţei la oboseală, deci nu va apărea în calcule.

g) *Temperaturi înalte*, întîlnite în unele construcţii de maşini, influenţează simţitor rezistenţa la oboseală.

h) *Tensiunile remanente*, în special cele produse prin tratamente mecanice superficiale, au efect favorabil asupra rezistenţei la oboseală.

4. În calculul de rezistenţă la oboseală, se urmăreşte în general *verificarea coeficientului de siguranţă* pentru piese dimensionate în baza unor evaluări aproximative. Mai rar, se determină rezistenţa admisibilă la solicitări variabile, prin metode similare celor de verificare a coeficientului de siguranţă.

În aceste calcule intră următoarele mărimi:

— eforturile unitare *nominale* ale ciclurilor de solicitări variabile σ_{max}, σ_{min}, σ_m, σ_a;

— caracteristicile mecanice ale materialelor, la solicitări statice şi variabile σ_r, σ_c, σ_{-1}, σ_0;

— coeficienţii β_k, ε, γ, care reprezintă efectul asupra rezistenţei la oboseală al concentratorilor de eforturi unitare, al dimesiunilor piesei şi al stării suprafeţei piesei;

— valorile statistice, informative, asupra coeficientului de siguranţă, care depind de material, procedeele tehnologice, importanţa piesei şi a maşinii etc.

Există metode variate de calcul al coeficientului de siguranţă.

O clasificare în mare poate deosebi două feluri de coeficienţi de siguranţă.

a) Un coeficient de siguranţă *c*, definit ca raportul dintre rezistenţa la oboseală şi efortul unitar maxim din piesă, cu condiţia de a se compara *cicluri similare*, iar *piesele comparate să fie identice sau echivalente*. Echivalenţa între piese care nu sînt identice se realizează prin introducerea în calcule a coeficienţilor β_k, ε, γ.

b) Un coeficient de siguranţă *global* K, prin care se compară rezistenţa la oboseală a epruvetei tip cu efortul unitar maximal din piesa reală. Acest coeficient global este, desigur, mai mare decît *c*.

În continuare sînt prezentate amănunte asupra primei clase de metode:

Pentru determinarea coeficientului de siguranţă *c* se ajunge la metode de calcul variate, după *forma diagramei schematizate* care se utilizează şi după *criteriul de asemănare* ales între ciclul real şi cel limită de pe diagrama rezistenţelor la oboseală.

În cazul particular al ciclului simetric, care are $\sigma_{max} = \sigma_a$, coeficientul de siguranţă are expresia:

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma}\sigma_a}. \tag{15.9}$$

Pentru ciclurile asimetrice, apar metode de calcul variate, din motivele arătate mai sus.

α) În metoda *Soderberg*, se poate lua ca diagramă a ciclurilor limită linia dreaptă EA din figura 15.*n*. Ciclurile cu coeficienţi de siguranţă *c* se află pe linia $E'A'$, paralelă cu EA. Două cicluri se consideră asemenea — de exemplu ciclul M asemenea cu ciclul limită L — dacă au acelaşi coeficient de asimetrie R, ceea ce se traduce prin faptul că ele se află pe o dreaptă care trece prin origine. Se ajunge la formula care dă coeficientul de siguranţă:

$$c = \frac{1}{\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma}\cdot\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r}}. \tag{15.10}$$

Pentru metale tenace punctul A din figura 15.*n* corespunde limitei de curgere, nu rezistenţei de rupere, ceea ce face ca formula (15.10) să se transforme în:

$$c = \frac{1}{\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma}\cdot\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c}}. \tag{15.11}$$

Coeficienţii de siguranţă calculaţi mai sus se numesc *coeficienţi de siguranţă faţă de rezistenţa la oboseală*. În afară de aceştia, se determină şi *coeficientul de siguranţă faţă de limita de curgere:*

$$c_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_c}{\sigma_m + \sigma_a}. \tag{15.12}$$

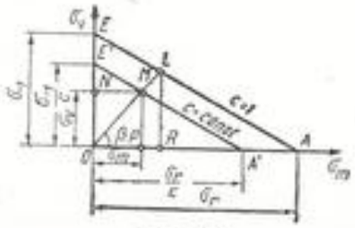


Fig. 15. n

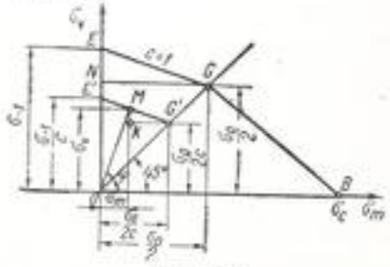


Fig. 15. o

β) În metoda *Serensen*, diagrama schematizată este formată din linii frînte. Una dintre formele curente de schematizări este cea din figura 15.*o*, care, pentru cicluri situate în triunghiul *EOG*, duce la expresia coeficientului de siguranță:

$$c = \frac{1}{\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} \cdot \frac{\sigma_v}{\sigma_{-1}} + \psi \frac{\sigma_m}{\sigma_{-1}}} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} \sigma_v + \psi \sigma_m}. \qquad (15.13)$$

În această relație, coeficientul ψ are expresia:

$$\psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}. \qquad (15.14)$$

Dacă ciclul se află în triunghiul *OGB* (Fig. 15, *o*) se calculează coeficientul de siguranță față de limita de curgere, cu formula (15.13).

γ) Dacă diagrama ciclurilor limită, pentru metale tenace, este schematizată sub forma unui sfert de elipsă, de semiaxe σ_{-1} și σ_0, ca în figura 15.*p*, coeficientul de siguranță are expresia:

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma}\right)^2 \sigma_v^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_0}\right)^2 \sigma_m^2}}. \qquad (15.15)$$

În figura 15.*p*, elipsa mare este curba ciclurilor limită, iar cea mai mică curba ciclurilor cu coeficient de siguranță c = const.

Pentru simplificare, în calcule, adesea se notează coeficientul de concentrare complex

$$\beta_{kP} = \frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma}.$$

Cînd $\gamma = 1$, el devine

$$\beta_{kP} = \frac{\beta_k}{\varepsilon}.$$

5. Se poate determina și o *rezistență admisibilă* la solicitări variabile. Așa, de exemplu, pe baza metodei *Serensen* se determină rezistența admisibilă

$$\bar{\sigma}_a = \frac{\sigma_{-1}}{c} \cdot \frac{1 + k}{k \frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} + \psi}, \qquad (15.16)$$

unde:

$$k = \frac{1 - R}{1 + R} = \frac{\sigma_v}{\sigma_m}. \qquad (15.17)$$

Pe baza formulei *Soderberg* rezultă

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{c} \cdot \frac{1 + k}{k \frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_0}}. \qquad (15.18)$$

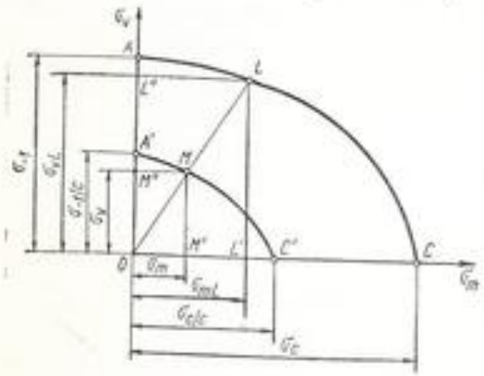


Fig. 15.*p*

6. La solicitări compuse, în cazul materialelor cu proprietăți plastice accentuate, coeficientul de siguranță se determină cu ajutorul relației:

$$c = \frac{c_\sigma c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}}, \qquad (15.19)$$

unde c_σ, c_τ sînt coeficienții de siguranță ai solicitărilor simple componente determinați prin metodele arătate mai sus.

B. PROBLEME REZOLVATE

15.1. Pentru un oțel, se dau $\sigma_{-1} = 24$ daN/mm²; $\sigma_0 = 37$ daN/mm². Dacă se ia diagrama ciclurilor limită ca o linie dreaptă, se cere să se determine rezistența la oboseală pentru ciclurile cu $R = 0{,}5$ și $R = -0{,}2$.

Rezolvare. Problema se poate trata grafic sau analitic. S-a ales calea grafică, întocmindu-se figura 15.1. Ciclurile asemenea se află pe o dreaptă care trece prin origine și are coeficientul unghiular φ dat de relația:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{1 - R}{1 + R}.$$

Pentru cele două valori date ale lui R, rezultă:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1 - 0{,}5}{1 + 0{,}5} = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1 + 0{,}2}{1 - 0{,}2} = \frac{3}{2}.$$

Se trasează dreptele respective, *OB* și *OD* și se citesc pe desen rezistențele la oboseală:

$$\sigma_{0,5} = OA + AB = 32{,}6 \text{ daN/mm}^2,$$

$$\sigma_{-0,2} = OC + CD = 27{,}7 \text{ daN/mm}^2.$$

15.2. O tijă din oțel, cu $\sigma_r = 70$ daN/mm², $\sigma_c = 34$ daN/mm² și $\sigma_{-1t} = 22$ daN/mm², este supusă unei solicitări alternante simetrice de întindere-compresiune, cu efortul unitar nominal $\sigma_n = \sigma_v = 500$ daN/cm². Să se calculeze coeficientul de siguranță, dacă se dau: $\beta_k = 2$, $\varepsilon = 0{,}7$, $\gamma = 0{,}8$.

Rezolvare. Fiind vorba de un ciclu simetric, se aplică formula (15.9):

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} \sigma_v} = \frac{22}{\frac{2}{0{,}7 \cdot 0{,}8} \cdot 5} = 1{,}23.$$

15.3. O tijă de piston este solicitată printr-un ciclu asimetric, avînd $P_{max} = 70$ kN și $P_{min} = -50$ kN. Tija

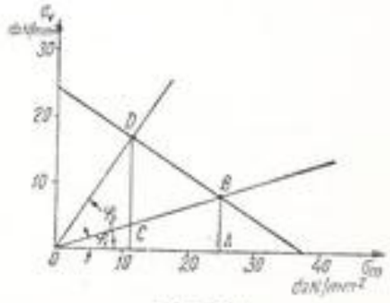


Fig. 15. 1

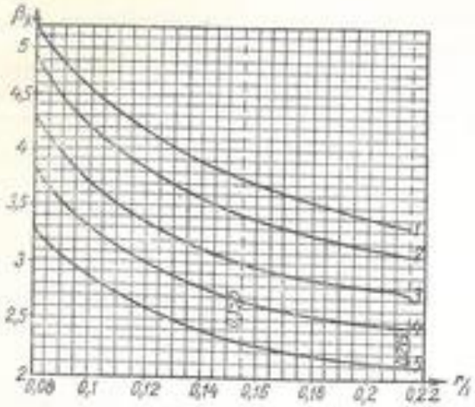


Fig. 15.3, *a*

se termină prin filet *M*68. Materialul este oţel cu $\sigma_r = 60$ daN/mm², $\sigma_c = 30$ daN/mm², $\sigma_{-1t} = 20$ daN/mm², $\sigma_{ot} = 30$ daN/mm². Să se calculeze coeficientul de siguranţă.

Rezolvare. După figura 15.3, *a*, se găseşte coeficientul de concentrare, pe curba *3*: $\beta_k = 3{,}0$. După figura 15.3, *b*, factorul dimensional este $\varepsilon = 0{,}50$. Rezultă coeficientul de concentrare complex

$$\beta_{kP} = \frac{\beta_k}{\varepsilon} = \frac{3{,}0}{0{,}50} = 6.$$

Şurubul are $d_1 = 60{,}2$ mm, iar aria secţiunii este $A = 28{,}4$ cm².

Îmbinarea între tijă şi piston este făcută fără prestrîngere, ceea ce face ca eforturile unitare nominale să aibă valorile

$$\sigma_{max} = \frac{7\,000}{28{,}4} = 247\,\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}; \quad \sigma_{min} = -\frac{5\,000}{28{,}4} = -176\,\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2};$$

$$\sigma_m = \frac{2{,}47 - 1{,}76}{2} = 0{,}35 \text{ daN/mm}^2; \quad \sigma_r = \frac{2{,}47 + 1{,}76}{2} = 2{,}12 \text{ daN/mm}^2.$$

Se determină coeficientul

$$\psi = \frac{2\sigma_{-1t} - \sigma_{ot}}{\sigma_{ot}} = \frac{2 \cdot 20 - 30}{30} = 0{,}33.$$

Coeficientul de siguranţă, calculat prin formula (15.13) este,

$$c = \frac{20}{6 \cdot 2{,}12 + 0{,}33 \cdot 0{,}35} = 1{,}56.$$

Dacă se foloseşte formula (15.15), rezultă

$$c = \frac{20}{\sqrt{6^2 \cdot 2{,}12^2 + 0{,}35^2 \left(\frac{20}{30}\right)^2}} = 1{,}57.$$

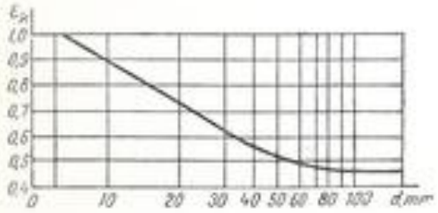


Fig. 15.3, *b*

Solicitarea fiind apropiată de cea simetrică, ambele metode dau acelaşi rezultat.

15.4. O bară de secţiune circulară este solicitată la întindere printr-un ciclu oscilant, forţa variind între $P_{max} = 7000$ daN şi $P_{min} = 3000$ daN. Să se dimensioneze bara, dacă materialul este un oţel cu $\sigma_r = 30$ daN/mm² şi $\sigma_{-1t} = 21$ daN/mm².

Rezolvare. Modul de solicitare nu se încadrează în domeniul de aplicare al formulei *Serensen*. Pe baza formulei (15.18) luînd $c = 2$, rezistenţa admisibilă este

$$\sigma_a = \frac{21}{2} \cdot \frac{1 + 0{,}4}{0{,}4 + \frac{21}{30}} = 13{,}4 \text{ daN/mm}^2$$

$$k = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{P_{max} - P_{min}}{P_{max} + P_{min}} = \frac{7 - 3}{7 + 3} = 0{,}4.$$

S-a luat $\beta_k = 1$, $\gamma = 1$, iar, într-un prim calcul, $\varepsilon = 1$.

Cu aceasta, se dimensionează bara

$$A_{nec} = \frac{P_{max}}{\sigma_a} = \frac{7\,000}{1\,340} = 5{,}22 \text{ cm}^2; \quad d = 2{,}58 \text{ cm}.$$

Se alege $d = 26$ mm. Oţelul fiind de tipul oţel carbon, din curba *1* a figurii 15. *m* se ia $\varepsilon = 0{,}9$.

Se recalculează rezistenţa admisibilă

$$\sigma_a = \frac{21}{2} \cdot \frac{1 + 0{,}4}{\frac{0{,}4}{0{,}9} + \frac{21}{30}} = 12{,}8 \text{ daN/mm}^2.$$

Noua dimensionare dă

$$A_{nec} = \frac{7\,000}{1\,280} = 5{,}47 \text{ cm}^2; \quad d = 2{,}64 \text{ cm}.$$

Se menţine valoarea anterioară, $d = 26$ mm.

15.5. Pe un arbore cu variaţie de diametru (racordare) avînd forma din figura 15.*d*, cu $D = 55$ mm şi $d = 45$ mm, urmează să se monteze un rulment. Inelul rulmentului are raza de racordare $r_1 = 2$ mm, ceea ce impune ca arborele să aibă o rază mai mică, de exemplu $r = 1$ mm. Dacă această racordare este periculoasă, se foloseşte un inel intermediar *A*, ca în figura 15.5, ceea ce permite să se ia o rază mai mare, după voie, de exemplu $r = 8$ mm. Materialul arborelui este oţel cu $\sigma_r = 52{,}5$ daN/mm² şi $\sigma_{-1} = 22{,}5$ daN/mm². Solicitarea arborelui se face printr-un ciclu simetric, cu $M_i = 10\,300$ daNcm. Se cere să se determine coeficientul de siguranţă în ambele alternative de construcţie.

Rezolvare. Efortul unitar nominal în arbore este:

$$\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \frac{M_i}{W} = \frac{10\,300}{\frac{\pi \cdot 4{,}5^3}{32}} = 1\,150 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_m = 0; \quad \sigma_a = 11{,}5 \text{ daN/mm}^2.$$

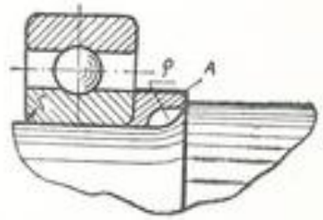


Fig. 15.5

Pentru determinarea coeficientului efectiv de concentrare β_k se procedează astfel:

a) Pentru raza de racordare $r = 1$ mm.

În figura 15.*d*, curba de jos se referă la un oţel cu $\sigma_r = 50$ daN/mm² şi $d = 30 - 50$ mm, deci tocmai cazul considerat. Pentru $\frac{r}{d} = \frac{1}{45} = 0{,}02$, se găseşte $\beta_{k0} = 2{,}7$. Întrucît coeficientul β_{k0} este determinat tocmai pentru diametrul piesei de faţă, rezultă $\varepsilon = 1$.

Diagrama se referă la $\frac{D}{d} = 2$, iar piesa studiată are $\frac{D}{d} = \frac{55}{45} = 1{,}22$. Se aplică formula (15.6), în care, după figura 15.*e*, $\xi = 0{,}85$

$$\beta_k = 1 + 0{,}85(2{,}7 - 1) = 2{,}45.$$

Arborele este bine rectificat şi se ia $\gamma = 1$.

Cu relaţia (15.9) se află coeficientul de siguranţă

$$c = \frac{122{,}5}{2{,}45 \cdot 11{,}5} = 0{,}8.$$

Coeficientul fiind subunitar, piesa se va rupe prin oboseală.

b) Pentru raza $r = 8$ mm.

Repetînd succesiunea de calcule, rezultă:

$$\frac{r}{d} = 0{,}178;\ \beta_{k0} = 1{,}35;\quad \xi = 0{,}85;\quad \beta_k = 1{,}3;$$

$$c = \frac{22{,}5}{1{,}3 \cdot 11{,}5} = 1{,}5.$$

A doua variantă este corespunzătoare.

15.6. Un arbore solicitat la încovoiere, printr-un ciclu simetric, cu $\sigma_{max} = |\sigma_{min}| = \sigma_p = 6$ daN/mm², are un şanţ cu forma din figura 15.6 pentru fixarea volantului. Acest şanţ de pană poate fi executat în două alternative:

a) cu $r = 3$ mm şi $r/B = 0{,}05$,

b) cu $r = 7$ mm şi $r/B = 0{,}15$.

Materialul din care este confecţionat arborele este un oţel cu $\sigma_{-1} = 28$ daN/mm²; $\sigma_r = 60$ daN/mm² şi $\sigma_c = 30$ daN/mm².

Se cere să se afle coeficientul de siguranţă.

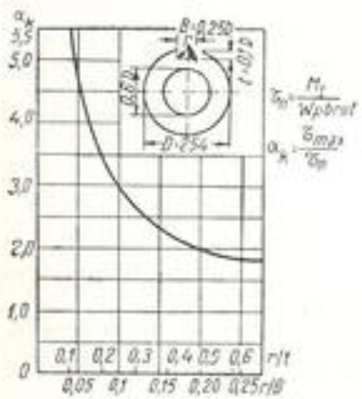


Fig. 15.6

Rezolvare. Diagrama din figura 15.6 dă numai valorile α_k:

Cazul a): $\alpha_k = 4{,}70$,

Cazul b): $\alpha_k = 2{,}25$.

Pentru calculul lui β_k se aplică formula (15.5):

$$\beta_k = 1 + \eta_k(\alpha_k - 1).$$

Pentru coeficientul η_k se foloseşte figura 15.*c*. Materialul are

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_r} = \frac{30}{60} = 0{,}5.$$

Căutînd pe curba respectivă din figura 15.*c*, se găseşte:

— la $r = 3$ mm, $\eta_k = 0{,}8$;

— la $r = 7$ mm, $\eta_k = 0{,}92$.

Valorile lui β_k sînt:

Cazul a):

$$\beta_k = 1 + 0{,}8(4{,}70 - 1) = 3{,}96.$$

Cazul b):

$$\beta_k = 1 + 0{,}92(2{,}25 - 1) = 2{,}15.$$

Pentru calculul coeficientului de siguranţă, se foloseşte formula (15.9), în care — nefiind precizate alte date — se ia $\varepsilon = \gamma = 1$:

Cazul a):

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} \cdot \sigma_p} = \frac{28}{\frac{3{,}96}{1 \cdot 1} \cdot 6} = 1{,}18.$$

Cazul b):

$$c = \frac{28}{2{,}15 \cdot 6} = 2{,}17.$$

Se recomandă construcţia din cazul b), întrucît la cealaltă, coeficientul de siguranţă este prea mic.

15.7. Un arbore de secţiune circulară, cu diametrul $D = 40$ mm, este solicitat la încovoiere printr-un ciclu oscilant, care face ca în fibrele extreme efortul unitar să varieze între $\sigma_{max} = 16$ daN/mm² şi $\sigma_{min} = 4$ daN/mm². În secţiunea unde se produc aceste eforturi unitare, arborele are o gaură transversală, cu diametrul $d = 2$ mm, perpendiculară pe axa neutră (Fig. 15.7). Materialul arborelui este un oţel cu $\sigma_r = 95$ daN/mm², $\sigma_c = 72$ daN/mm², $\sigma_{-1} = 43$ daN/mm². Suprafaţa este strunjită brut. Se cere să se afle coeficientul de siguranţă.

Rezolvare. Se determină în prealabil coeficienţii β_k, ε, γ. Pentru calculul lui β_k se foloseşte diagrama reprezentată în figura 15.*g*.

În cazul problemei de faţă se cunoaşte:

$$\frac{d}{D} = \frac{2}{40} = 0{,}05;\ D = 40 \text{ mm},$$

ceea ce corespunde curbei *1* din figura 15.*g*. Pentru valoarea dată a lui σ_r se găseşte $\beta_k = 2{,}14$.

După figura 15.*l* curba *3*, la $D = 40$ mm, se află $\varepsilon = 0{,}65$.

Din figura 15.*k*, zona 4, se găseşte $\gamma = 0{,}78$.

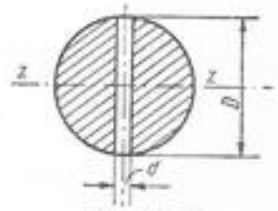


Fig. 15. 7

Ciclul asimetric are

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{16 + 4}{2} = 10 \text{ daN/mm}^2,$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{16 - 4}{2} = 6 \text{ daN/mm}^2.$$

Coeficientul de siguranță se află cu ajutorul formulei (15.11):

$$c = \frac{1}{\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} \cdot \frac{\sigma_v}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_p}} = \frac{1}{\frac{2,14}{0,65 \cdot 0,78} \cdot \frac{6}{43} + \frac{10}{72}} = 1,37.$$

Coeficientul de siguranță față de limita de curgere, calculat cu formula (15.12), este:

$$c_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_m + \sigma_v} = \frac{72}{10 + 6} = 4,5.$$

15.8. Un arbore de mașină este solicitat la răsucire printr-un ciclu asimetric cu $R = -0,5$. Materialul are caracteristicile mecanice: $\sigma_r = 50$ daN/mm², $\tau_c = 18$ daN/mm², $\tau_{-1} = 12$ daN/mm². Să se determine rezistența la oboseală corespunzătoare acestui ciclu, dacă se dau: $\alpha_k = 1,5$; $\eta_k = 0,6$; $\varepsilon = 1$; $\gamma = 0,78$.

Rezolvare. Se consideră diagrama rezistențelor la oboseală schematizată printr-o linie dreaptă, ca în figura 15.*n*, avînd ca puncte extreme τ_{-1} și τ_c. Conform desenului, se poate scrie:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_v}{\tau_m} = \frac{1 - R}{1 + R} = \frac{1 + 0,5}{1 - 0,5} = 3 = \frac{\tau_{vL}}{\tau_{mL}}$$

(s-a înlocuit σ prin τ).

Din datele problemei, prin aplicarea formulei (15.5), se găsește:

$$\beta_k = 1 + \eta_k(\alpha_k - 1) = 1 + 0,6\,(1,5 - 1) = 1,3.$$

Dacă ar fi vorba despre un arbore cu coeficienții $\beta_k = \varepsilon = \gamma = 1$, ecuația liniei drepte EA care dă ciclurile limită se poate scrie (dacă se înlocuiesc literele σ prin τ și dacă pentru punctul A se ia valoarea limitei de curgere τ_c):

$$\tau_{vL} = \tau_{-1}\left(1 - \frac{\tau_{mL}}{\tau_c}\right).$$

Înlocuind valoarea de mai sus:

$$\tau_{mL} = \frac{\tau_{vL}}{3}$$

se obține:

$$\tau_{vL} = \tau_{-1}\left(1 - \frac{\tau_{vL}}{3\tau_c}\right),$$

care se transformă în:

$$\tau_{vL} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_{-1}} + \frac{1}{3\tau_c}}.$$

Coeficienții β_k, ε, γ se aplică, după cum se știe, numai asupra lui τ_{-1} nu și asupra lui τ_c. În consecință, pentru arborele real se aplică acești coeficienți în formula de mai sus:

$$\tau_{vL} = \frac{1}{\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} \cdot \frac{1}{\tau_{-1}} + \frac{1}{3\tau_c}} = \frac{1}{\frac{1,3}{1 \cdot 0,78} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{3 \cdot 18}} = 6,35 \text{ daN/mm}^2.$$

Rezistența la oboseală este:

$$\tau_R = \tau_{max} = \tau_{vL} + \tau_{mL} = \tau_{vL}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 6,35\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 8,47 \text{ daN/mm}^2.$$

15.9. Un arbore de oțel, avînd forma din figura 15.*f*, este solicitat la răsucire printr-un ciclu pulsant, cu $M_{t\,max} = 6\,400$ daNcm. Dimensiunile sînt: $D = 50$ mm, $d = 40$ mm, $r = 2$ mm. Materialul are $\tau_r = 40$ daN/mm², $\tau_c = 26$ daN/mm², $\tau_{-1} = 19$ daN/mm². Se cere să se calculeze coeficienții de siguranță față de ruperea prin oboseală și față de limita de curgere.

Rezolvare. Efortul unitar nominal maxim este:

$$\tau_{max} = \frac{M_{t\,max}}{W_p} = \frac{6\,400}{\frac{\pi d^3}{16}} = 500 \text{ daN/cm}^2.$$

Rezultă:

$$\tau_m = \tau_v = \frac{\tau_{max}}{2} = 2,5 \text{ daN/mm}^2.$$

Coeficientul de siguranță față de limita de curgere este dat de formula (15.12):

$$c_c = \frac{\tau_c}{\tau_{max}} = \frac{26}{5} = 5,2.$$

Arborele are următoarele date geometrice:

$$\frac{D}{d} = \frac{50}{40} = 1,25; \quad \frac{r}{d} = \frac{2}{40} = 0,05.$$

Din figura 15.*f*, curba a doua de jos, se ia coeficientul

$$\beta_{k0} = 1,5,$$

care corespunde la oţel cu $\sigma_r = 50$ daN/mm² şi la un raport $\frac{D}{d} = 2$. Materialul arborelui corespunde rezistenţei $\sigma_r = 60$ daN/mm². În ce priveşte raportul $\frac{D}{d}$, din formula (15.6) şi figura 15.*e* se află:

$$\xi = 0{,}8 \text{ pentru } \frac{D}{d} = 1{,}25;$$

$$\beta_k = 1 + 0{,}8(1{,}5 - 1) = 1{,}4.$$

Diagrama din figura 15.*f* este construită pentru arbori cu $d = 30 \ldots 50$ mm, deci vom lua în calcul $\varepsilon = 1$.

Neavînd precizări asupra prelucrării superficiale, se alege:

$$\gamma = 1.$$

Cu formula (15.11) se găseşte:

$$c = \frac{1}{\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} \cdot \frac{\tau_v}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_r}} = \frac{1}{\frac{1{,}4}{1 \cdot 1} \cdot \frac{2{,}5}{19} + \frac{2{,}5}{26}} = 3{,}6.$$

15.10. Un arbore avînd forma din figura 15.*f* este solicitat la răsucire printr-un ciclu oscilant, la care se cunoaşte:

$$R = \frac{\tau_{min}}{\tau_{max}} = \frac{M_{t\,min}}{M_{t\,max}} = 0{,}5.$$

Dimensiunile sînt: $D = 75$ mm, $d = 60$ mm, $r = 5$ mm, iar materialul are $\sigma_r = 83$ daN/mm², $\tau_c = 38$ daN/mm², $\tau_{-1} = 21$ daN/mm². Coeficienţii de corecţie sînt $\beta_k = 1{,}29$; $\varepsilon = 0{,}65$; $\gamma = 0{,}83$. Dacă se ia coeficientul de siguranţă $c = 2$, se cere să se determine momentul de răsucire $M_{t\,max}$ pe care îl poate suporta arborele.

Rezolvare. Se determină rezistenţa admisibilă cu ajutorul formulei (15.18) după ce în prealabil se calculează coeficientul k, dat de formula (15.17):

$$k = \frac{1 - R}{1 + R} = \frac{1 - 0{,}5}{1 + 0{,}5} = \frac{1}{3}$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{-1}}{c} \frac{1 + k}{k\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} + \frac{\tau_{-1}}{\tau_c}} = \frac{21}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1{,}29}{0{,}65 \cdot 0{,}83} + \frac{21}{38}} = 10{,}4 \ \frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}.$$

Momentul capabil este

$$M_{t\,max} = \tau_a \cdot W_p = \tau_a \cdot \frac{\pi d^3}{16} = 1\,040 \cdot \frac{\pi \cdot 6^3}{16} = 44\,000 \text{ daNcm}.$$

15.11. Un arc elicoidal are diametrul de înfăşurare $D = 60$ mm şi diametrul firului $d = 6$ mm. El este confecţionat dintr-un oţel de arc, cu

$\tau_r = 80$ daN/mm², $\tau_c = 50$ daN/mm², $\tau_{-1} = 30$ daN/mm². După înfăşurare, arcul a fost călit şi ecruisat cu alice, ceea ce permite să se obţină un coeficient de calitate $\gamma = 1{,}55$. Arcul este supus unui ciclu pulsant cu $\tau_{max} = 42$ daN/mm² şi $\tau_{min} = 18{,}7$ daN/mm². Dacă se iau $\beta_k = \varepsilon = 1$, se cere să se calculeze coeficientul de siguranţă.

Rezolvare. Se calculează τ_v şi τ_m

$$\tau_v = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{42 - 18{,}7}{2} = 11{,}7 \text{ daN/mm}^2,$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{42 + 18{,}7}{2} = 30{,}4 \text{ daN/mm}^2.$$

Se aplică formula (15.10):

$$c = \frac{1}{\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} \frac{\tau_v}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_r}} = \frac{1}{\frac{1}{1 \cdot 1{,}55} \cdot \frac{11{,}7}{30} + \frac{30{,}4}{80}} = 1{,}59.$$

15.12. Un arc elicoidal este făcut dintr-un oţel cu $\sigma_r = 180$ daN/mm², $\tau_c = 90$ daN/mm², $\tau_{-1} = 45$ daN/mm². El este solicitat printr-un ciclu oscilant, ce e face ca efortul unitar să varieze între $\tau_{max} = 40$ daN/mm² şi $\tau_{min} = 24$ daN/mm². Să se determine coeficientul de siguranţă, dacă se ia drept criteriu de asemănare a ciclurilor egalitatea coeficientului de asimetrie şi dacă se ia drept curbă a ciclurilor limită o parabolă, de ecuaţie:

$$\tau_{vL} = \tau_{-1}\left[1 - \left(\frac{\tau_{mL}}{\tau_c}\right)^2\right],$$

unde τ_{vL}, τ_{mL} sînt coordonatele curente pe diagrama ciclurilor limită.

Rezolvare. Se construieşte curba ciclurilor limită din figura 15.12 prin puncte, conform ecuaţiei:

$$\tau_{vL} = 45\left[1 - \left(\frac{\tau_{mL}}{90}\right)^2\right],$$

în baza tabelei 15.12.

Tabela 15.12

Punctul	1	2	3	4
τ_{mL} daN/mm²	20	40	60	80
τ_{vL} daN/mm²	42,7	36,2	25,0	9,45

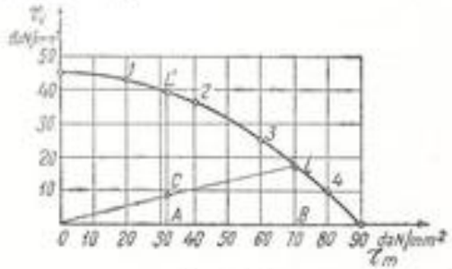


Fig. 15.12

Ciclul ce solicită arcul are:

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{40 + 24}{2} = 32 \text{ daN/mm}^2,$$

$$\tau_v = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{40 - 24}{2} = 8 \text{ daN/mm}^2.$$

Ciclul este reprezentat prin punctul C din desen.

În baza criteriului de asemănare a ciclurilor dat în enunțul problemei, ciclul limită L se află ducînd linia OC. Coeficientul de siguranță este:

$$c = \frac{\tau_{max L}}{\tau_{max}} = \frac{OB + BL}{OA + AC} = \frac{70 + 18}{32 + 8} = 2{,}2.$$

15.13. Un arbore dintr-o cutie de viteze are forma din figura 15.13, pe cele două porțiuni λ_1, λ_2 fiind montate presat două roți dințate. Dimensiunile sînt: $d_1 = 80$ mm, $d_2 = 100$ mm, $d_3 = 110$ mm. Materialul este oțel 35CN 25 avînd:

$\sigma_r = 90$ daN/mm², $\tau_c = 30$ daN/mm²; $\tau_{-1} = 23$ daN/mm², $\tau_0 = 36$ daN/mm².

Locurile de calare au fost perfect șlefuite, deci $\gamma = 1$. Arborele transmite un moment de răsucire pulsant, de valoare $M_{t\,max} = 40\,000$ daNcm. Se cere coeficientul de siguranță al piesei.

Rezolvare. Modulul de rezistență polar al secțiunii este

$$W_p = \frac{\pi(10^4 - 8^4)}{16 \cdot 10} = 116 \text{ cm}^3.$$

Eforturile unitare nominale sînt

$$\tau_{max} = \frac{M_{t\,max}}{W_p} = \frac{40\,000}{116} = 345 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_v = \tau_m = 1{,}72 \text{ daN/mm}^2.$$

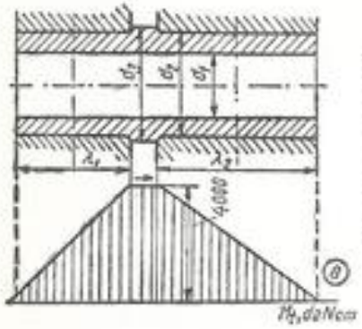


Fig. 15.13

Coeficientul de concentrare, inclusiv factorul dimensional, se determină după figurile 15.*h*; 15.*i*; 15.*j*. Din figura 15.*h* curba *1*, pentru $d = 100$ mm, se află $\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon}\right)_0 = 3{,}4$. Nefiind indicații asupra presiunii de fretaj, se ia $\xi'' = 1$. Pentru $\sigma_r = 90$ daN/mm², după figura 15.*i*, rezultă $\xi' = 1{,}6$. Formula (15.7) dă:

$$\frac{\beta_k}{\varepsilon} = 3{,}4 \cdot 1{,}6 = 5{,}44 = \beta_{kp}.$$

Din datele problemei rezultă $\psi = 0{,}28$.

Aplicînd formula lui *Serensen* (15.13), rezultă:

$$c = \frac{\tau_{-1}}{\beta_{kp}\tau_v + \psi\tau_m} = \frac{23}{1{,}72(5{,}44 + 0{,}28)} = 2{,}33.$$

Cu metoda dată de formula (15.15) se obține:

$$c = \frac{\tau_{-1}}{\sqrt{\beta_{kp}^2\tau_v^2 + \tau_m^2\left(\frac{\tau_{-1}}{\tau_c}\right)^2}} = \frac{23}{1{,}72\sqrt{5{,}44^2 + \left(\frac{23}{30}\right)^2}} = 2{,}42.$$

Cele două rezultate diferă între ele numai cu 4%. Fiind vorba de un ciclu pulsant, se calculează și coeficientul de siguranță față de limita de curgere:

$$c_c = \frac{\tau_c}{\tau_{max}} = \frac{30}{3{,}45} = 8{,}7.$$

Piesa este corect dimensionată.

15.14. Să se găsească rezistența la oboseală, prin ciclu simetric, a unui arbore de forma din figura 15.*f*, dacă se dau $D = 110$ mm, $d = 80$ mm, $r = 12$ mm, iar materialul este oțel cu $\sigma_r = 120$ daN/mm² și $\tau_{-1} = 30$ daN/mm².

Rezolvare. Cu ajutorul figurii 15.*f* se află, de pe curba de sus, $\beta_{k0} = 1{,}25$, corespunzător la $\frac{r}{d} = \frac{12}{80} = 0{,}15$. Din figura 15.*e* pentru $\frac{D}{d} = \frac{110}{80} = 1{,}38$, rezultă $\xi = 0{,}90$. Cu relația (15.6) se află:

$$\beta_k = 1 + 0{,}90(1{,}25 - 1) = 1{,}225.$$

Diagrama din figura 15.*f* se referă la $d_1 = 30 \ldots 50$ mm, în medie $d_1 = 40$ mm, pe cînd piesa are $d = 80$ mm.

Din figura 15.*l*, pentru $d = 80$ mm, pe curba *3* se află $\varepsilon = 0{,}5$.

Rezistența la oboseală a arborelui este:

$$\tau_{-1P} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{\beta_k}{\varepsilon \cdot \gamma}} = \frac{3\,000}{\frac{1{,}225}{0{,}5 \cdot 1}} = 1\,230 \text{ daN/cm}^2.$$

15.15. Un arbore de oțel, avînd forma din figura 15.*f*, este solicitat la întindere prin o forță constantă, ceea ce dă $\sigma_m = 5$ daN/mm² și $\sigma_v = 0$, iar la răsucire printr-un moment oscilant, care produce $\tau_{max} = 5$ daN/mm² și $\tau_{min} = 2{,}5$ daN/mm². Materialul are $\sigma_r = 52{,}5$ daN/mm², $\sigma_{-1t} = 21{,}7$ daN/mm², $\sigma_c = 28$ daN/mm², $\tau_{-1} = 11$ daN/mm², $\tau_c = 16{,}4$ daN/mm². Dimensiunile sînt: $D = 50$ mm, $d = 40$ mm, $r = 2{,}5$ mm. Suprafața arborelui este șlefuită. Se cere să se afle coeficientul de siguranță al solicitării compuse.

Rezolvare. Se folosește formula (15.11), aplicată o dată pentru σ apoi pentru τ și după aceea formula (15.19).

Pentru solicitarea de întindere, cu $\sigma_v = 0$, formula (15.11) dă coeficientul:

$$c_\sigma = \frac{\sigma_c}{\sigma_m} = \frac{28}{5} = 5{,}6.$$

Pentru solicitarea de răsucire, se caută întîi valorile coeficienților β_k, ε, γ. Se cunoaște

$$\frac{r}{d} = \frac{2{,}5}{40} = 0{,}06.$$

Din figura 15.*f* curba a doua de jos, rezultă:

$$\beta_{k0} = 1{,}35$$

corespunzător lui $\sigma_r = 50$ daN/mm² și $\frac{D}{d} = 2$. Deoarece arborele are $\frac{D}{d} = \frac{50}{40} = 1{,}25$ din figura 15.*e* se găsește $\xi = 0{,}8$, iar formula (15.6) dă:

$$\beta_k = 1 + 0{,}8(1{,}35 - 1) = 1{,}28.$$

Figura 15.*f* corespunde la $d = 40$ mm, deci $\varepsilon = 1$.

Din figura 15.*k* curbele *2*, pentru $\sigma_r = 52{,}5$ daN/mm², rezultă coeficientul de calitate:

$$\gamma = 0{,}96.$$

Se aplică formula (15.11) pentru eforturile unitare τ:

$$c_\tau = \frac{1}{\frac{1{,}28}{1 \cdot 0{,}96} \cdot \frac{1{,}25}{11} + \frac{3{,}75}{16{,}4}} = 2{,}63,$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{5 + 2{,}5}{2} = 3{,}75 \text{ daN/mm}^2,$$

$$\tau_v = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{5 - 2{,}5}{2} = 1{,}25 \text{ daN/mm}^2.$$

Folosind formula (15.19), rezultă:

$$c = \frac{c_\sigma c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} = \frac{5{,}6 \cdot 2{,}63}{\sqrt{5{,}6^2 + 2{,}63^2}} = 2{,}37.$$

15.16. Se dă un arbore solicitat la încovoiere și răsucire, pe care sînt împănate două roți dințate, ca în figura 15.16. Materialul este un oțel cu $\sigma_c = 43$ daN/mm², $\sigma_r = 60$ daN/mm², $\sigma_{-1} = 25$ daN/mm², $\tau_r = 50$ daN/mm², $\tau_{-1} = 15$ daN/mm². Reacțiunile în reazemele *A* și *B* au valorile: $V_A = 520$ daN, $H_A = 140$ daN, $V_B = 410$ daN, $H_B = 60$ daN. Momentul de răsucire între secțiunile *I* și *II* este $M_t = 6\,000$ daN cm. Solicitările de încovoiere variază după un ciclu simetric, iar cele de răsucire după un ciclu pulsant. Se cere să se afle coeficientul de siguranță.

Rezolvare. Reacțiunile în cele două reazeme sînt:

$$R_A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2} =$$

$$= \sqrt{520^2 + 140^2} = 540 \text{ daN},$$

$$R_B = \sqrt{V_B^2 + H_B^2} =$$

$$= \sqrt{410^2 + 60^2} = 414 \text{ daN}.$$

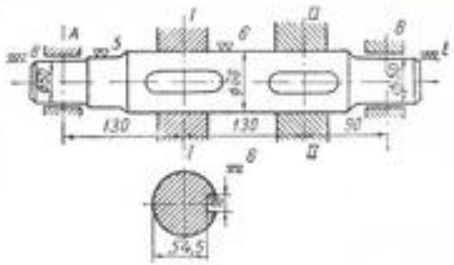


Fig. 15.16

Secțiunea periculoasă este *I*, în care momentul încovoietor este maxim, de valoare:

$$M_{max} = 540 \cdot 13 = 7\,000 \text{ daN cm}.$$

Eforturile unitare nominale în secțiunea periculoasă sînt:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{7\,000}{\frac{\pi \cdot 6^3}{32}} = 324 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{t\,max}}{W_p} = \frac{6\,000}{\frac{\pi \cdot 6^3}{16}} = 138 \text{ daN/cm}^2.$$

Cele două cicluri au:

$$\sigma_m = 0, \quad \sigma_v = \sigma_{max} = 3{,}24 \text{ daN/mm}^2;$$

$$\tau_m = \tau_v = \frac{\tau_{max}}{2} = 0{,}69 \text{ daN/mm}^2.$$

Se determină coeficienții β_k, ε, γ.

a) La încovoiere.

Din figura 15.*h*, curba *1*, pentru $d = 60$ mm, rezultă

$$\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon}\right)_0 = 3{,}05,$$

corespunzător la $\sigma_r = 50$ daN/mm². Pentru oțelul cu $\sigma_r = 60$ daN/mm², figura 15.*i* dă $\xi' = 1{,}13$. Neexistînd indicații asupra presiunii, se ia $\xi'' = 1$. Formula (15.7) dă

$$\frac{\beta_k}{\varepsilon} = 3{,}05 \cdot 1{,}13 \cdot 1 = 3{,}45.$$

Se consideră suprafaţa şlefuită, ceea ce dă, după curba *2* din figura 15.*k*, $\gamma = 0{,}95$

$$\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma}\right)_\sigma = \frac{3{,}45}{0{,}95} = 3{,}63.$$

b) La răsucire, cu formula (15.8) rezultă:

$$\frac{\beta_{k\tau}}{\varepsilon} = 1 + 0{,}6(3{,}45 - 1) = 2{,}47,$$

respectiv, luînd aceeaşi valoare pentru γ:

$$\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma}\right)_\tau = \frac{2{,}47}{0{,}95} = 2{,}6.$$

Se aplică formulele (15.11) şi (15.19)

$$c_\sigma = \frac{1}{3{,}63 \cdot \frac{3{,}24}{25}} = 2{,}12$$

$$c_\tau = \frac{1}{2{,}6\,\frac{0{,}69}{15} + \frac{0{,}69}{50}} = 7{,}7$$

$$c = \frac{2{,}12 \cdot 7{,}7}{\sqrt{2{,}12^2 + 7{,}7^2}} = 2{,}05.$$

15.17. Un arbore de oţel, avînd secţiune inelară cu $D = 80$ mm şi $d = 40$ mm, este supus acţiunii unui moment încovoietor care variază între $M_{i\,max} = 20\,500$ daN cm şi $M_{i\,min} = -10\,500$ daN cm şi unui moment de răsucire care variază între $M_{t\,max} = 24\,000$ daN cm şi $M_{t\,min} = -6\,000$ daN cm. Coeficienţii de concentrare, de calitate şi dimensiuni, pentru ambele solicitări, au valoarea $\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} = 3$. Materialul are următoarele caracteristici mecanice: $\sigma_e = 43$ daN/mm², $\sigma_{-1} = 27$ daN/mm², $\tau_e = 22$ daN/mm², $\tau_{-1} = 15$ daN/mm², $\psi_\sigma = 0{,}17$, $\psi_\tau = 0$. Se cere să se afle coeficientul de siguranţă al solicitării compuse, determinat prin metoda *Serensen*.

Rezolvare. Se calculează eforturile unitare produse de cele două cicluri de solicitări variabile:

$$W = \frac{\pi D^3}{32}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = \frac{\pi \cdot 8^3}{32}\left[1 - \left(\frac{4}{8}\right)^4\right] = 46{,}1 \text{ cm}^3;$$

$$W_p = 2W = 92{,}2 \text{ cm}^3;$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i\,max}}{W} = \frac{20\,500}{46{,}1} = 445 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{min} = \frac{M_{i\,min}}{W} = -\frac{10\,500}{46{,}1} = -228 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{4{,}45 - 2{,}28}{2} = 1{,}08 \text{ daN/mm}^2;$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{4{,}45 + 2{,}28}{2} = 3{,}36 \text{ daN/mm}^2;$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{t\,max}}{W_p} = \frac{24\,000}{92{,}2} = 260 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\tau_{min} = \frac{M_{t\,min}}{W_p} = -\frac{6\,000}{92{,}2} = -65 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{2{,}60 - 0{,}65}{2} = 0{,}98 \text{ daN/mm}^2;$$

$$\tau_v = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{2{,}60 + 0{,}65}{2} = 1{,}63 \text{ daN/mm}^2.$$

Se aplică de două ori formula (15.13) şi apoi formula (15.19):

$$c_\sigma = \frac{1}{\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} \cdot \frac{\sigma_v}{\sigma_{-1}} + \psi_\sigma \frac{\sigma_m}{\sigma_{-1}}} = \frac{1}{3\,\frac{3{,}36}{27} + 0{,}17\,\frac{1{,}08}{27}} = 2{,}6;$$

$$c_\tau = \frac{1}{\frac{\beta_k}{\varepsilon\gamma} \cdot \frac{\tau_v}{\tau_{-1}} + \psi_\tau \frac{\tau_m}{\tau_{-1}}} = \frac{1}{3\,\frac{1{,}63}{15}} = 3{,}1;$$

$$c = \frac{c_\sigma c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} = \frac{2{,}6 \cdot 3{,}1}{\sqrt{2{,}6^2 + 3{,}1^2}} = 2.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

15.18. Să se repete problema 15.12, luînd drept criteriu de asemănare a ciclurilor egalitatea efortului unitar τ_m şi ca definiţie a coeficientului de siguranţă:

$$c = \frac{\tau_{vL}}{\tau_v}.$$

Răspuns. În figura 15.12 se găseşte ciclul limită L' şi rezultă $c = 4{,}9$.

15.19. Un arbore de forma celui reprezentat în figura 15.*f* este solicitat la răsucire printr-un moment oscilant care variază între $M_{min} = 3\,350$ daN cm

şi o valoare necunoscută M_{max}. Arborele are dimensiunile $D = 50$ mm, $d = 35$ mm, $r = 3$ mm, iar materialul este un oţel cu $\sigma_r = 52$ daN/mm², $\tau_c = 19$ daN/mm², $\tau_{-1} = 12$ daN/mm². Suprafaţa este strunjită curent. Dacă coeficientul de siguranţă este $c = 1{,}6$, să se afle valoarea lui M_{max}.

Indicaţie. Pe baza materialului documentar anterior, se determină coeficienţii β_k, ε, γ.

Se calculează τ_{min} cu formulele cunoscute. În formula (15.11), se înlocuiesc τ_a şi τ_m în funcţie de τ_{max}, τ_{min} unde τ_{min} este cunoscut şi se găseşte τ_{max}. Rezultă apoi M_{max}.

15.20. La arborele menţionat în problema 15.7, se cere să se determine momentul încovoietor maxim pe care îl poate suporta, în cazul coeficientului de asimetrie $R = -0{,}2$ şi al coeficientului de siguranţă $c = 1{,}6$.

Indicaţie. Se exprimă σ_{min}, σ_m, σ_a în funcţie de σ_{max} şi se aplică formula (15.11), care dă $\sigma_{max} = 9{,}72$ daN/mm². Rezultă $M_{max} = 6\,100$ daN cm.

CAPITOLUL **16**

PLĂCI PLANE

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. Se consideră plăci plane elementele mărginite de două suprafeţe plane paralele, a căror grosime este relativ mică în raport cu celelalte două dimensiuni ale plăcii, totuşi suficient de mare pentru ca placa să poată prelua momente încovoietoare.

2. Plăcile se presupun solicitate de forţe normale pe planul lor.

3. Plăcile plane se deosebesc după forma conturului lor. Se disting: plăci circulare, plăci dreptunghiulare etc.

4. În capitolul de faţă se studiază probleme în legătură cu plăcile circulare şi inelare încărcate simetric şi cu plăcile dreptunghiulare cu margini rezemate sau încastrate.

5. În cazul general ecuaţia diferenţială a plăcilor plane este:

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{D}, \tag{16.1}$$

în care: w este săgeata plăcii, într-un punct oarecare;
p — sarcina exterioară, iar:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \tag{16.2}$$

în care: h — grosimea plăcii;
E — modulul de elasticitate;
μ — coeficientul de contracţie transversală al lui *Poisson*.

În coordonate carteziene, ecuaţia diferenţială (16.1) se scrie:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}. \tag{16.3}$$

În coordonate polare, ecuaţia diferenţială (16.1) se scrie:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) = \frac{p}{D}. \tag{16.4}$$

6. *Plăci circulare şi inelare încărcate axial simetric.* În cazul încărcării axial simetrice, p şi w nu depind de unghiul φ şi ecuaţia (16.4) devine:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} = \frac{p}{D}, \tag{16.5}$$

ecuaţie diferenţială de tip *Euler* cu soluţia generală:

$$w = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + \varpi, \tag{16.6}$$

unde ϖ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene. O asemenea soluţie particulară se poate obţine în cazul general cu formulele:

$$\overline{M} = -\int_0^r \frac{1}{r}\left[\int_0^r p r \mathrm{d}r\right] \mathrm{d}r \text{ şi apoi } \varpi = -\frac{1}{D}\int_0^r \frac{1}{r}\left[\int_0^r \overline{M} r \mathrm{d}r\right] \mathrm{d}r. \tag{16.7}$$

În cazul particular al unei sarcini uniform distribuite (p = const), soluţia particulară ϖ are valoarea:

$$\varpi = \frac{p r^4}{64D}. \tag{16.8}$$

7. Rotirile, momentele încovoietoare şi forţele tăietoare au expresiile de mai jos (în funcţie de săgeata w dată de 16.6):

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= -\frac{\partial w}{\partial r},\\
M_r &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right],\\
M_t &= -D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right],\\
T_r &= -D\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right],\\
T_t &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{16.9}$$

8. Cele patru constante arbitrare C_1, C_2, C_3 şi C_4 care apar în ecuaţia (16.6) se pot determina prin condiţii la limită în felul următor:
- la o periferie simplu rezemată: $w = 0$ şi $M_r = 0$;
- la o periferie încastrată: $w = 0$ şi $\varphi = 0$;
- la o periferie liberă: $M_r = 0$, $T_r = 0$.

În mijlocul unei plăci, w şi $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ sînt cantităţi finite.

9. Pentru cazurile curente expresiile w, φ, M_r şi M_t se iau din tabela 16. *a*.

10. Eforturile unitare σ_r şi σ_t variază liniar pe grosimea plăcii:

$$\sigma_r = \frac{12 M_t}{h^3} z; \quad \sigma_t = \frac{12 M_r}{h^3} z, \tag{16.10}$$

fiind maxime în fibrele extreme ale plăcii la $z = h/2$,

$$\sigma_{r\,max} = \frac{6 M_t}{h^2}; \quad \sigma_{t\,max} = \frac{6 M_r}{h^2}. \tag{16.11}$$

11. *Plăcile dreptunghiulare.* Ecuaţia (16.3) se poate rezolva prin diferite metode, proprii ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al patrulea. În problemele din capitolul de faţă se folosesc: *metoda indirectă*; *metoda seriilor Fourier simple*; *metoda seriilor Fourier duble.*

Tabela 16. a

Expresiile săgeţii w, rotirii φ, momentului încovoietor radial M_r, momentului încovoietor tangenţial M_t la plăcile circulare şi inelare încărcate simetric

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad \rho = \frac{r}{a}$$

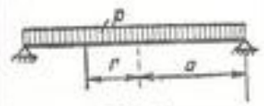
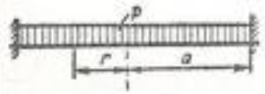
Nr. crt.	Felul de încărcare	Expresiile w, φ, M_r şi M_t
1	 P[daN]	$w = \frac{Pa^2}{64\pi D}(1-\rho^2)\left(\frac{5+\mu}{1+\mu} - \rho^2\right)$ $\varphi = \frac{Pa}{16\pi D}\rho\left(\frac{3+\mu}{1+\mu} - \rho^2\right)$ $M_r = \frac{P}{16\pi}(3+\mu)(1-\rho^2)$ $M_t = \frac{P}{16\pi}[3+\mu-(1+3\mu)\rho^2]$ unde $P = \pi a^2 p$
2	 P[daN]	$w = \frac{Pa^2}{64\pi D}(1-\rho^2)^2$ $\varphi = \frac{Pa}{16\pi D}\rho(1-\rho^2)$ $M_r = \frac{P}{16\pi}[1+\mu-(3+\mu)\rho^2]$ $M_t = \frac{P}{16\pi}[1+\mu-(1+3\mu)\rho^2]$ unde $P = \pi a^2 p$
3	p_0[daN/cm²]	$w = \frac{Pa^2}{4\,800\pi D}\left[\frac{3(183+43\mu)}{1+\mu} - \frac{10(71+29\mu)}{1+\mu}\rho^2 + 225\rho^4 - 64\rho^6\right]$ $\varphi = \frac{Pa}{240\pi D}\rho\left[\frac{71+29\mu}{1+\mu} - 45\rho^2 + 16\rho^3\right]$ $M_r = \frac{P}{240\pi}[71+29\mu+45(3+\mu)\rho^2+16(4+\mu)\rho^3]$ $M_t = \frac{P}{240\pi}[71+29\mu-45(1+3\mu)\rho^2+16(1+4\mu)\rho^3]$ unde $P = \frac{1}{3}\pi a^2 p_0$

Tabela 16.a (continuare)

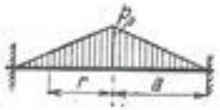
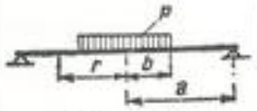
N. c.	Felul de încărcare	Expresiile w, φ, M_r și M_t
4	 p_0[daN/cm²]	$w = \frac{Pa^2}{4\,800\pi D}\,[129 - 290\rho^2 + 225\rho^4 - 64\rho^5]$ $\varphi = \frac{Pa}{240\pi D}\,\rho\,[29 - 45\rho^2 + 16\rho^3]$ $M_r = \frac{P}{240\pi}\,[29(1+\mu) - 45(3+\mu)\rho^2 + 16(4+\mu)\rho^3]$ $M_t = \frac{P}{240\pi}\,[29(1+\mu) - 45(1+3\mu)\rho^2 + 16(1+4\mu)\rho^3]$ unde $P = \frac{1}{3}\,\pi a^2 p_0$
5	 p[daN/cm²]	$r \leqslant b$ (regiunea încărcată) $w = \frac{Pa^2}{64\pi D}\,\frac{1}{1+\mu}\left\{4(3+\mu) - (7+3\mu)\beta^2 + 4(1+\mu)\beta^2 \ln\beta - 2[4-(1-\mu)\beta^2 - 4(1+\mu)\ln\beta]\rho^2 + \frac{1+\mu}{\beta^2}\rho^4\right\}$ $\varphi = \frac{Pa}{16\pi D}\cdot\frac{1}{1+\mu}\,\rho\left[4 - (1-\mu)\beta^2 - 4(1+\mu)\ln\beta - \frac{1+\mu}{\beta^2}\rho^2\right]$ $M_r = \frac{P}{16\pi}\left[4 - (1-\mu)\beta^2 - 4(1+\mu)\ln\beta - \frac{3+\mu}{\beta^2}\rho^2\right]$ $M_t = \frac{P}{16\pi}\left[4 - (1-\mu)\beta^2 - 4(1+\mu)\ln\beta - \frac{1+3\mu}{\beta^2}\rho^2\right]$ $b \leqslant r \leqslant a$ (regiunea neîncărcată) $w = \frac{Pa^2}{32\pi D}\cdot\frac{1}{1+\mu}\left\{[2(3+\mu) - (1-\mu)\beta^2](1-\rho^2) + 2(1+\mu)\beta^2\ln\rho + 4(1+\mu)\rho^2\ln\rho\right\}$ $\varphi = \frac{Pa}{16\pi D}\cdot\frac{1}{1+\mu}\left\{[4 - (1-\mu)\beta^2]\rho - (1+\mu)\beta^2\frac{1}{\rho} - 4(1+\mu)\rho\ln\rho\right\}$ $M_r = \frac{P}{16\pi}\left[(1-\mu)\beta^2\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right) - 4(1+\mu)\ln\rho\right]$ $M_t = \frac{P}{16\pi}\left\{(1-\mu)\left[4 - \beta^2\left(\frac{1}{\rho^2} + 1\right)\right] - 4(1+\mu)\ln\rho\right\}$ unde $P = \pi b^2 p$; $\beta = \frac{b}{a}$

Tabela 16.a (continuare)

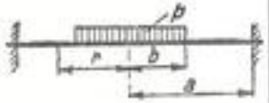
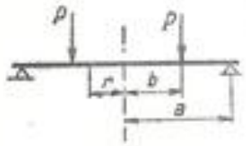
N. c.	Felul de încărcare	Expresiile w, φ, M_r și M_t
6	 p[daN/cm²]	$r \leqslant b$ (regiunea încărcată) $w = \frac{Pa^2}{64\pi D}\left[4 - 3\beta^2 + 4\beta^2\ln\beta - 2(\beta^2 - 4\ln\beta)\rho^2 + \frac{1}{\beta^2}\rho^4\right]$ $\varphi = \frac{Pa}{16\pi D}\,\rho\left[\beta^2 - 4\ln\beta - \frac{1}{\beta^2}\rho^2\right]$ $M_r = \frac{P}{16\pi}\left[(1+\mu)(\beta^2 - 4\ln\beta) - \frac{3+\mu}{\beta^2}\rho^2\right]$ $M_t = \frac{P}{16\pi}\left[(1+\mu)(\beta^2 - 4\ln\beta) - \frac{1+3\mu}{\beta^2}\rho^2\right]$ $b \leqslant r \leqslant a$ (regiunea neîncărcată) $w = \frac{Pa^2}{32\pi D}\,[(2-\beta^2)(1-\rho^2) + 2(\beta^2 + 2\rho^2)\ln\rho]$ $\varphi = \frac{Pa}{16\pi D}\,\rho\left[\beta^2\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) - 4\ln\rho\right]$ $M_r = \frac{P}{16\pi}\left[-4 + (1-\mu)\beta^2\frac{1}{\rho^2} + (1+\mu)(\beta^2 - 4\ln\rho)\right]$ $M_t = \frac{P}{16\pi}\left[-4\mu - (1-\mu)\beta^2\frac{1}{\rho^2} + (1+\mu)(\beta^2 - 4\ln\rho)\right]$ unde $P = \pi b^2 p$; $\beta = \frac{b}{a}$
7	 P[daN/cm]	$\rho \leqslant \beta$ (regiunea interioară $w = \frac{Pa^2}{8D}\cdot\frac{\beta}{1+\mu}\,([3+\mu)(1-\beta^2) + 2(1+\mu)\beta^2\ln\beta - [(1-\mu)(1-\beta^2) - 2(1+\mu)\ln\beta]\rho^2)$ $\varphi = \frac{Pa^2}{4D}\,\frac{\beta}{1+\mu}\,\rho\,[(1+\mu)(1-\beta^2) - 2(1+\mu)\ln\beta]$ $M_r = M_t = \frac{Pa}{4}\cdot\beta\,[(1-\mu)(1-\beta^2) - 2(1+\mu)\ln\beta]$ $\beta \leqslant \rho \leqslant 1$ (regiunea exterioară) $w = \frac{Pa^2}{8D}\,\frac{\beta}{1+\mu}\,[[3+\mu - (1-\mu)\beta^2](1-\rho^2) + 2(1+\mu)(\beta^2 + \rho^2)\ln\rho]$ $\varphi = \frac{Pa^2}{4D}\,\frac{\beta}{1+\mu}\,\rho\left[2 - (1-\mu)\beta^2 - (1+\mu)\beta^2\frac{1}{\rho^2} - 2(1+\mu)\ln\rho\right]$ $M_r = \frac{Pa}{4}\cdot\beta\cdot\left[(1-\mu)\beta^2\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right) - 2(1+\mu)\ln\rho\right]$ $M_t = \frac{Pa}{4}\,\beta\left\{(1-\mu)\left[2 - \beta^2\left(\frac{1}{\rho^2} + 1\right)\right] - 2(1+\mu)\ln\rho\right\}$ unde $\beta = \frac{b}{a}$

Tabela 16. a (continuare)

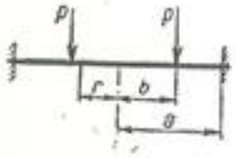
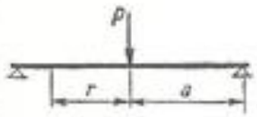
Cz.	Felul de încărcare	Expresiile w, φ, M_r și M_t
8	 P[daN/cm]	$\rho \leqslant \beta$ (regiunea interioară) $w = \frac{Pa^2}{8D}\beta[1 - \beta^2 + 2\beta^2 \ln \beta + (1 - \beta^2 + 2 \ln \beta)\rho^2]$ $\varphi = -\frac{Pa^2}{4D}\beta\rho(1 - \beta^2 + 2 \ln \beta)$ $M_r = M_t = -\frac{Pa}{4}\beta(1 + \mu)(1 - \beta^2 + 2 \ln \beta)$ $\beta \leqslant \rho \leqslant 1$ (regiunea exterioară) $w = \frac{Pa^2}{8D}\beta[(1 + \beta^2)(1 - \rho^2) + 2(\beta^2 + \rho^2) \ln \rho]$ $\varphi = \frac{Pa^2}{4D}\beta\rho\left[\beta^2\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) - 2 \ln \rho\right]$ $M_r = -\frac{Pa}{4}\beta\left[2-(1-\mu)\beta^2\frac{1}{\rho^2} - (1 + \mu)(\beta^2 - 2 \ln \rho)\right]$ $M_t = -\frac{Pa}{4}\beta\left[2\mu + (1 - \mu)\beta^2\frac{1}{\rho^2} - (1+\mu)(\beta^2 - 2 \ln \rho)\right]$ unde $\beta = \frac{b}{a}$
9	 p[daN]	$w = \frac{Pa^2}{16\pi D}\left[\frac{3 + \mu}{1 + \mu}(1 - \rho^2) + 2\rho^2 \ln \rho\right]$ $\varphi = \frac{Pa}{4\pi D}\rho\left[\frac{1}{1 + \mu} - \ln \rho\right]$ $M_r = -\frac{P}{4\pi}(1 + \mu) \ln \rho$ $M_t = \frac{P}{4\pi}[1 - \mu - (1 + \mu) \ln \rho]$ În mijlocul plăcii $M_r = M_t = \frac{P}{4\pi}[1 - (1 + \mu) \ln \beta]$ unde $\beta = 0{,}05$

Tabela 16. a (continuare)

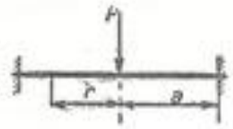
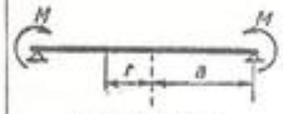
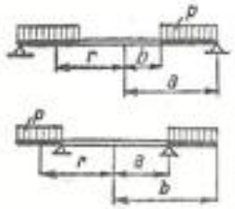
Cz.	Felul de încărcare	Expresiile w, φ, M_r și M_t
10	 P[daN]	$w = \frac{Pa^2}{6\pi D}(1 - \rho^2 + 2\rho^2 \ln \rho)$ $\varphi = -\frac{Pa}{4\pi D}\rho \cdot \ln \rho$ $M_r = -\frac{P}{4\pi}[1 + (1 + \mu) \ln \rho]$ $M_t = -\frac{P}{4\pi}[\mu + (1 + \mu) \ln \rho]$ În mijlocul plăcii $M_r = M_t = -\frac{P}{4\pi}(1 + \mu) \ln \beta$ unde $\beta \approx 0{,}05$
11	 M[daN cm/cm]	$w = \frac{Ma^2}{2D(1 + \mu)}(1 - \rho^2)$ $\varphi = \frac{Ma}{D(1 + \mu)}\rho$ $M_r = M_t = M$
12	 p[daN/cm²]	$w = \frac{pa^4}{64D}\left\{\frac{2}{1 + \mu}[(3 + \mu)(1 - 2\beta^2) + k](1 - \rho^2) - (1 - \rho^4) - \frac{4}{1 - \mu}k \cdot \ln \rho - 8\beta^2\rho^2 \cdot \ln \rho\right\}$ $\varphi = \frac{pa^3}{16D}\left[\frac{1}{1 + \mu}(3 + \mu - 4\beta^2 + k)\rho - \rho^3 + \frac{k}{1 - \mu}\frac{1}{\rho} + 4\beta^2\rho \ln \rho\right]$ $M_r = \frac{pa^2}{16}\left[(3 + \mu)(1 - \rho^2) + k\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) + 4(1 + \mu)\beta^2 \ln \rho\right]$ $M_t = \frac{pa^2}{16}\left[2(1 - \mu)(1 - 2\beta^2) + (1 + 3\mu)(1 - \rho^2) + k\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) + 4(1 + \mu)\beta^2 \ln \rho\right]$ unde $k = \beta^2\left[3 + \mu + 4(1 + \mu)\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta\right]$; $\beta = \frac{b}{a}$

Tabela 16. a (continuare)

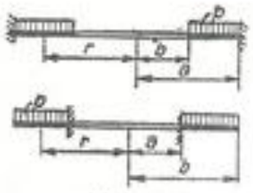
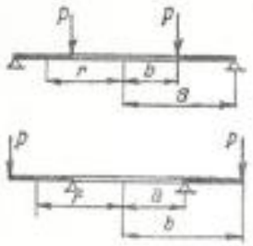
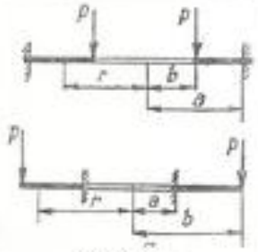
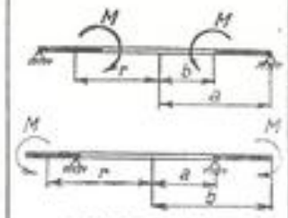
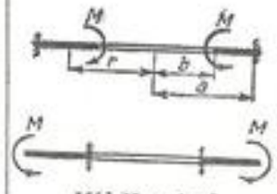
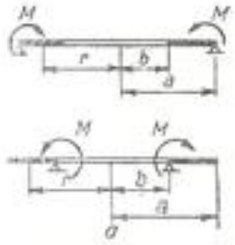
Nr. crt.	Felul de încărcare	Expresiile w, φ, M_r şi M_t
13	 p [daN/cm²]	$w = \frac{pa^4}{64D}[-1 + 2(1 - k - 2\beta^2)(1 - \rho^2) + \rho^4 - 4k \ln \rho - 8\beta^2 \rho^2 \ln \rho]$ $\varphi = \frac{pa^3}{16D}\left[(1 - k)\rho - \rho^3 + k\frac{1}{\rho} + 4\beta^2 \rho \ln \rho\right]$ $M_r = \frac{pa^2}{16}\left[(1 + \mu)(1 - k) + 4\beta^2 - (3 + k)\rho^2 - (1 - \mu)k\frac{1}{\rho^2} + 4(1 + \mu)\beta^2 \ln \rho\right]$ $M_t = \frac{pa^2}{16}\left[(1 + \mu)(1 - k) + 4\mu\beta^2 - (1 + 3\mu)\rho^2 + (1 - \mu)k\frac{1}{\rho^2} + 4(1 + \mu)\beta^2 \ln \rho\right]$ unde $\beta = \frac{b}{a}$ şi $k = \beta^2 \frac{(1 - \mu)\beta^2 + (1 + \mu)(1 + 4\beta^2 \ln \beta)}{1 - \mu + (1 + \mu)\beta^2}$
14	 P [daN/cm]	$w = \frac{Pa^2}{8D}\beta\left[\frac{3 + \mu - 2k}{1 + \mu}(1 - \rho^2) + 4\frac{k}{1 - \mu}\ln \rho + 2\rho^2 \ln \rho\right]$ $\varphi = \frac{Pa^2}{2D}\beta\left[\frac{1 - k}{1 + \mu}\rho - \frac{k}{1 - \mu}\frac{1}{\rho} - \rho \ln \rho\right]$ $M_r = \frac{Pa}{2}\beta\left[k\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right) - (1 + \mu)\ln \rho\right]$ $M_t = \frac{Pa}{2}\beta\left[1 - \mu - k\left(\frac{1}{\rho^2} + 1\right) - (1 + \mu)\ln \rho\right]$ unde $\beta = \frac{b}{a}$, $k = (1 + \mu)\frac{\beta^2}{1 - \beta^2}\ln \beta$
15	 P [daN/cm]	$w = \frac{Pa^2}{8D}\beta[(1 + 2k)(1 - \rho^2) + 4k \ln \rho + 2\rho^2 \ln \rho]$ $\varphi = \frac{Pa^2}{2D}\beta\left[k\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) - \rho \ln \rho\right]$ $M_r = \frac{Pa}{2}\beta\left[-1 + (1 + \mu)k + (1 - \mu)k\frac{1}{\rho^2} - (1 + \mu)\ln \rho\right]$ $M_t = \frac{Pa}{2}\beta\left[-\mu + (1 + \mu)k - (1 - \mu)k\frac{1}{\rho^2} - (1 + \mu)\ln \rho\right]$ unde $\beta = \frac{b}{a}$ şi $k = \beta^2 \frac{1 + (1 + \mu)\ln \beta}{1 - \mu + (1 + \mu)\beta^2}$

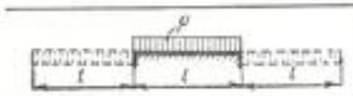
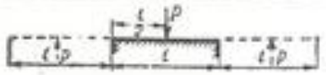
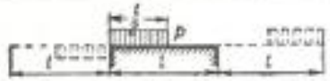
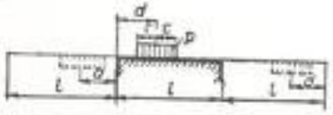
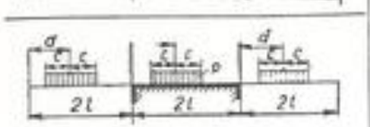
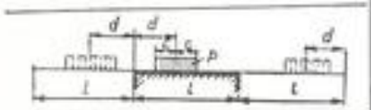
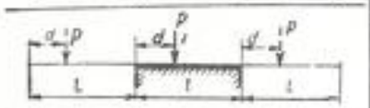
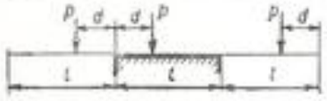
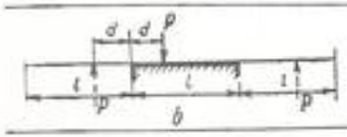
Tabela 16.a (continuare)

Nr. crt.	Felul de încărcare	Expresiile w, φ, M_r şi M_t
16	 M [daN cm/cm]	$w = \frac{Ma^2}{2D} \cdot \frac{k}{1 + \mu}\left(1 - \rho^2 - 2\frac{1 + \mu}{1 - \mu}\ln \rho\right)$ $\varphi = \frac{Ma}{D}\frac{k}{1 + \mu}\left(\rho + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \cdot \frac{1}{\rho}\right)$ $M_r = M \cdot k\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)$ $M_t = M \cdot k\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right)$ unde $\beta = \frac{b}{a}$ şi $k = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$
17	 M [daN cm/cm]	$w = \frac{Ma^2}{2D}k(-1 + \rho^2 - 2\ln \rho)$ $\varphi = \frac{Ma}{D}k\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)$ $M_r = -M \cdot k \cdot \left[1 + \mu + (1 - \mu)\frac{1}{\rho^2}\right]$ $M_t = -Mk\left(1 + \mu - (1 - \mu)\frac{1}{\rho^2}\right)$ unde $\beta = \frac{b}{a}$ şi $k = \frac{\beta^2}{1 - \mu + (1 + \mu)\beta^2}$
18	 M [daN cm/cm]	$w = \frac{Ma^2}{2D}\frac{k}{1 + \mu}\left(1 - \rho^2 - 2\frac{1 + \mu}{1 - \mu}\beta^2 \ln \rho\right)$ $\varphi = \frac{Ma}{D}\frac{k}{1 + \mu}\left(\rho + \frac{1 + \mu}{1 - \mu}\beta^2\frac{1}{\rho}\right)$ $M_r = M\beta^2 k\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\rho^2}\right)$ $M_t = M\beta^2 k\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)$ unde $\beta = \frac{b}{a}$ şi $k = \frac{1}{1 - \beta^2}$

Coeficienţii seriilor Fourier pentru diferite cazuri de încărcare

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Tabela 16. b

Felul de încărcare	Coeficienţii seriei *Fourier*
	$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{4p}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$ $(n = 1, 3, 5 \ldots)$
	$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{2P}{l} \sin \frac{n\pi}{2}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$
	$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin^2 \frac{n\pi}{4}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
	$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{4p}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi d}{l}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
	$a_0 = \frac{2pc}{l},\ a_n = \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n\pi c}{l} \cdot \cos \frac{n\pi d}{l}$ $b_n = \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{n\pi c}{l} \cdot \sin \frac{n\pi d}{l}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
	$a_0 = \frac{4pc}{l},\ a_n = \frac{4p}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{n\pi d}{l};\ b_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
	$a_0 = \frac{P}{2l},\ a_n = \frac{P}{2l} \cos \frac{n\pi d}{l},\ b_n = \frac{P}{2l} \sin \frac{n\pi d}{l}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
	$a_0 = \frac{P}{l},\ a_n = \frac{2P}{l} \cos \frac{n\pi d}{l},\ b_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
	$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{2P}{l} \sin \frac{n\pi d}{l}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

b

Odată determinată săgeata w, rotirile φ_x şi φ_y, momentele încovoietoare M_x şi M_y, momentul de torsiune M_{xy} şi forţele tăietoare T_x şi T_y se obţin cu formulele:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x};\quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y};\\
&M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);\\
&M_{xy} = -(1-\mu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};\\
&T_x = -D \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\
&T_y = -D \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{16.12}$$

12. *Metoda indirectă* constă în alegerea unei funcţii arbitrare pentru w. Introducînd această funcţie în relaţiile (16.3) şi (16.12), se deduc starea de încărcare a plăcii şi starea de eforturi.

Această metodă convine numai în cazuri simple.

13. *Metoda seriilor Fourier simple.* Se presupune că sarcina p poate fi dezvoltată în serie Fourier pe una din direcţii, de exemplu pe axa Ox:

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos \alpha_n x, \tag{16.13}$$

unde:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}. \tag{16.14}$$

Se încearcă o soluţie w de forma:

$$w = \frac{Y_0}{2} + \sum Y_n \cdot \cos \alpha_n x. \tag{16.15}$$

Punînd condiţia ca w, sub forma (16.15), (în care Y_0 şi Y_n sînt funcţii numai de y), să satisfacă ecuaţia diferenţială (16.3), se obţin pentru Y_0 şi Y_n expresii de forma:

$$\left.\begin{aligned}
&Y_0 = \frac{a_0 y^4}{24} + C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4.\\
&Y_n = A_n e^{-\alpha_n y} + B_n e^{\alpha_n y} + C_n \alpha_n y e^{-\alpha_n y} + D_n \alpha_n y e^{\alpha_n y} + \frac{a_n}{\alpha_n^4 D}
\end{aligned}\right\} \tag{16.16}$$

Uneori este util ca Y_n să fie pus sub forma:

$$Y_n = A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \alpha_n y + C_n \alpha_n y \cdot \operatorname{ch} \alpha_n y + D_n \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y + \frac{a_n}{\alpha_n^4 D}. \tag{16.17}$$

Constantele A_n, B_n, C_n, D_n, C_1, C_2, C_3, C_4 se determină prin condiţii la limită, şi anume:

— pentru o margine simplu rezemată $w = 0$, $M_x = 0$ (sau $M_y = 0$);

— pentru o margine încastrată $w = 0$, $\varphi_x = 0$ (sau $\varphi_y = 0$);

— pentru o margine liberă $M_x = 0$ (sau $M_y = 0$) şi $T_x = 0$ (sau $T_y = 0$).

În tabela 16. *b* sînt date dezvoltările în serie *Fourier* pentru cîteva cazuri curente de încărcare.

B. PROBLEME REZOLVATE

16.1. Să se stabilească expresia săgeţii w în cazul unei plăci circulare cu o încărcare conică avînd în centru intensitatea p_0 (Fig 16.1), placa fiind încastrată pe contur.

Rezolvare. Expresia săgeţii w este [formula (16.6)]:

$$w = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + \bar{w}.$$

În cazul de faţă:

$$p = p_0 \frac{a - r}{a} = p_0 - \frac{p_0}{a} r.$$

Pentru aflarea soluţiei particulare $\bar{w}$, se aplică formulele (16.7). În cazul problemei de faţă:

$$\int_0^r pr\,dr = \int_0^r \left(p_0 - \frac{p_0}{a} r\right) r dr = \frac{p_0 r^2}{2} - \frac{p_0 r^3}{3a},$$

$$\overline{M} = -\int_0^r \frac{1}{r}\left[\int_0^r pr\,dr\right] dr = -\int_0^r \left(\frac{p_0 r}{2} - \frac{p_0 r^2}{3a}\right) dr = -\frac{p_0 r^2}{4} + \frac{p_0 r^3}{9a},$$

$$\int_0^r \overline{M} r\,dr = -\int_0^r \left(\frac{p_0 r^2}{4} - \frac{p_0 r^3}{9a}\right) r\,dr = -\frac{p_0 r^4}{16} + \frac{p_0 r^5}{45a},$$

şi, în sfîrşit

$$\bar{w} = -\frac{1}{D}\int_0^r \frac{1}{r}\left[\int_0^r \overline{M} r\,dr\right] dr =$$

$$= \frac{1}{D}\int_0^r \left(\frac{p_0 r^3}{16} - \frac{p_0 r^4}{45a}\right) dr = \frac{1}{D}\left(\frac{p_0 r^4}{64} - \frac{p_0 r^5}{225a}\right).$$

Fig. 16.1

Deci

$$w = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + \frac{p_0 r^4}{64D} - \frac{p_0 r^5}{225aD}.$$

Cum pentru $r = 0$, w şi $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ trebuie să fie cantităţi finite, rezultă $C_3 = 0$ şi $C_4 = 0$. Deci:

$$w = C_1 + C_2 r^2 + \frac{p_0 r^4}{64D} - \frac{p_0 r^5}{225aD}.$$

Marginea plăcii fiind perfect încastrată, rezultă că pentru $r = a$, $w = 0$ şi $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$ sau:

$$C_1 + C_2 a^2 + \frac{p_0 a^4}{64D} - \frac{p_0 a^4}{225D} = 0,$$

$$2C_2 a + \frac{p_0 a^3}{16D} - \frac{p_0 a^3}{45D} = 0.$$

Rezultă:

$$C_2 = -\frac{29 p_0 a^2}{1\,440D}; \quad C_1 = \frac{129 p_0 a^4}{14\,400D}.$$

Atunci:

$$w = \frac{129 p_0 a^4}{14\,400D} - \frac{29 p_0 a^2}{1\,440D} r^2 + \frac{p_0}{64D} r^4 - \frac{p_0 r^5}{22Da},$$

sau notînd:

$$\frac{1}{3} p_0 \pi a^2 = P, \quad \frac{r}{a} = \rho,$$

$$w = \frac{Pa^2}{4\,800\pi D}\left[129 - 290\rho^2 + 225\rho^4 - 64\rho^5\right],$$

(vezi tabela 16. *a*, cazul 4).

16.2. O placă circulară, simplu rezemată, cu diametrul de 5,00 m, este încărcată ca în figura 16.2. Se cere să se afle momentele încovoietoare în centrul plăcii şi la distanţa $a/2$ de centrul plăcii. Se va neglija coeficientul de contracţie transversală. Sarcinile indicate pe desen sînt $p_1 = 200$ daN/m²; $p_2 = 400$ da N/m².

Rezolvare. În tabela 16. *a* se găsesc formulele de calcul pentru sarcina uniform repartizată (cazul 1) şi sarcina conică (cazul 3).

Suprapunînd cele două încărcări şi făcînd $\mu = 0$, se obţine:

$$M_r = \frac{3P_1}{16\pi}(1 - \rho^2) +$$

$$+ \frac{P_2}{240\pi}(71 - 135\rho^2 + 64\rho^3),$$

$$M_t = \frac{P_1}{16\pi}(3 - \rho^2) + \frac{P_2}{240\pi}(71 - 45\rho^2 + 16\rho^3),$$

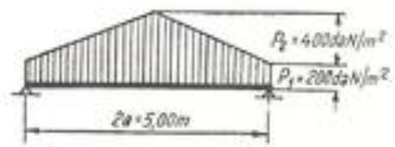


Fig. 16.2

unde P_1 şi P_2 reprezintă încărcări totale pe placă:

$$P_1 = \pi a^2 p_1$$

$$P_2 = \frac{1}{3}\pi a^2 p_2.$$

În centrul plăcii: $\rho = 0$,

$$M_r = M_t = 0{,}059\ P_1 + 0{,}094\ P_2.$$

Cu datele problemei:

$$M_r = M_t = 0{,}059 \cdot 3\,925 + 0{,}094 \cdot 2\,617 = 478 \text{ daNm/m}.$$

La distanţa $r = \frac{a}{2}$ de centrul plăcii găsim $\left[\rho = \frac{1}{2}\right]$

$$M_r = 0{,}0447\ P_1 + 0{,}0598\ P_2,$$

sau, cu datele problemei:

$$M_r = 0{,}0447 \cdot 3\,925 + 0{,}0598 \cdot 2\,617 = 332 \text{ daNm/m}.$$

$$M_t = 0{,}0548\ P_1 + 0{,}0820 P_2 = 0{,}0548 \cdot 3\,925 + 0{,}0820 \cdot 2\,617 = 430 \text{ daNm/m}.$$

16.3. Un castel de apă de formă circulară (Fig. 16.3), avînd diametrul $d_1 = 4{,}00$ m, se reazemă pe teren prin intermediul unei plăci circulare, avînd grosimea $d = 30$ cm, şi diametrul $D = 5{,}00$ m. Ştiind că pereţii castelului transmit o sarcină inelară de 200 kN/m şi că presiunea pe teren este uniformă, se cere să se determine eforturile în placa de fundaţie. (Se va lua $\mu = 0{,}17$ şi, pentru simplificare, secţiunea de beton se va considera ca secţiune omogenă).

Rezolvare. Schema de calcul este cea din figura 16.3:

$$p = \frac{200 \cdot 4{,}00 \cdot \pi}{2{,}5^2 \cdot \pi} = 127{,}5 \text{ kN/m}^2.$$

Pentru rezolvare, se va suprapune cazul unei plăci simplu rezemate pe contur, avînd o sarcină inelară P cu acela al unei plăci simplu rezemate, avînd o sarcină negativă uniform repartizată. Reacţiunile, fiind egale şi de sens contrar, se anulează. Se vor folosi formulele din tabela 16. *a* cazurile de încărcare 1 şi 7 în care:

$$\beta = \frac{4}{5} = 0{,}8, \quad \ln 0{,}8 = -0{,}2231.$$

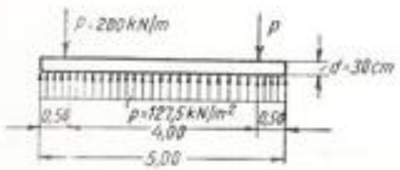


Fig. 16.3

Astfel pentru:

$$\rho = 0,\ M_r = M_t = \frac{200 \cdot 2{,}5}{4} \cdot 0{,}8[0{,}83 \cdot 0{,}36 + 2 \cdot 1{,}17 \cdot 0{,}2231] - \frac{2\,510}{16\pi} 3{,}17 = -76{,}3 \frac{\text{kNm}}{\text{m}};$$

$$\rho = 0{,}8,\ M_r = \frac{200 \cdot 2{,}5}{4} \cdot 0{,}80[0{,}83 \cdot 0{,}36 + 2 \cdot 1{,}17 \cdot 0{,}2231] - \frac{2\,510}{16\pi} 3{,}17 \cdot 0{,}36 = +25{,}0 \frac{\text{kNm}}{\text{m}};$$

$$M_t = \frac{200 \cdot 2{,}5}{4} \cdot 0{,}80[0{,}83 \cdot 0{,}36 + 2 \cdot 1{,}17 \cdot 0{,}2231] - \frac{2\,510}{16\pi}[3{,}17 - 1{,}51 \cdot 0{,}64] = -28{,}0 \frac{\text{kNm}}{\text{m}};$$

$$\rho = 1,\ M_r = 0;$$

$$M_t = \frac{200 \cdot 2{,}5}{4} \cdot 0{,}80[0{,}83(2 - 0{,}64 \cdot 2)] - \frac{2\,510}{16\pi}(3{,}17 - 1{,}51) = -23{,}0 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}.$$

Momentele maxime sînt în centrul plăcii.

Considerînd secţiunea omogenă, rezultă:

$$W = \frac{100 \cdot 30^2}{6} = 15\,000 \text{ cm}^3;$$

$$\sigma = \frac{763\,000}{15\,000} = 50{,}86 \text{ daN/cm}^2.$$

16.4. Să se determine săgeata w a unei plăci încărcate cu o sarcină conică parţială avînd la centru intensitatea maximă p_0 (Fig. 16.4, *a*).

Aplicaţie. $a = 2$ m; $b = 1$ m; $p_0 = 900$ daN/m²; $\mu = 0$.

Rezolvare. Acest caz de încărcare nu se găseşte direct în tabela 16, *a*. Totuşi, el poate fi rezolvat uşor cu ajutorul tabelei, combinînd cazurile 3, 11, 15 şi 17 în modul următor:

Se calculează porţiunea centrală, încărcată conic ca o placă circulară (Fig. 16. 4, *b*). Pentru a restabili continuitatea în lungul cercului de rezemare, cerc care are raza b, se introduce atît la periferia plăcii rezemate, cît şi la marginea interioară a plăcii inelare un moment incovoietor X. Valoarea acestui moment va fi determinată scriind condiţia de continuitate. Dacă se notează cu φ_1 unghiul de rotire pe reazem pentru placa centrală încărcată conic, cu φ_2 unghiul de rotire la marginea interioară a plăcii inelare, atunci

Fig. 16.4, *a*

Fig. 16.4, *b*

cînd este solicitată de încărcarea T, pe această margine, cu φ_2 unghiul de rotire al primei plăci cînd este acționată de momentul X și cu φ_4 unghiul de rotire al celei de-a doua plăci, cînd este acționată de momentul X (Fig. 16.4, *b*), condiția de continuitate se scrie:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_4.$$

Folosind tabela 16. *a*, cazurile 3, 11, 15 și 17 se găsește, notînd cu P sarcina totală pe placă:

$$\varphi_1 = \frac{Pb}{240\pi D}\left[\frac{71 + 29\mu}{1 + \mu} - 45 + 16\right] = \frac{7Pb}{40\pi D(1 + \mu)}, \quad (\text{cazul } 3,\ \rho = 1)$$

$$\varphi_2 = -\frac{Xb}{D(1 + \mu)}, \quad (\text{cazul } 11,\ M = -X,\ \rho = 1)$$

$$\varphi_3 = \frac{Pa^2}{4\pi bD}\beta\left[K\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) - \beta \ln \beta\right], \quad \left(\text{cazul } 15,\ \rho = \beta,\ P \text{ înlocuit prin } \frac{P}{2\pi b}\right)$$

$$\varphi_4 = \frac{Xa}{D}K_1\left(\frac{1}{\beta} - \beta\right), \quad (\text{cazul } 17,\ M = X,\ \rho = \beta).$$

Relația de continuitate se scrie:

$$\frac{7Pb}{40\pi D(1 + \mu)} - \frac{Xb}{D(1 + \mu)} = \frac{Pa^2}{4\pi bD}\beta\left[K\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) - \beta \ln \beta\right] + \frac{Xa}{D}K_1\left(\frac{1}{\beta} - \beta\right).$$

Din această ecuație se deduce necunoscuta X. Pentru cazul aplicației:

$$P = \frac{\pi b^2 p_0}{23} = \frac{3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 900}{3} = 942 \text{ daN}, \quad \beta = 0{,}5, \quad \mu = 0,$$

$$K = \beta^2 \frac{1 + (1 + \mu)\ln \beta}{1 - \mu + (1 + \mu)\beta^2} = 0{,}5^2 \frac{1 + \ln 0{,}5}{1 + 0{,}5^2} = 0{,}0614,$$

$$K_1 = \frac{\beta^2}{1 - \mu + (1 + \mu)\beta^2} = \frac{0{,}5^2}{1 + 0{,}5^2} = 0{,}20,$$

$$\frac{7Pb}{40\pi(1 + \mu)} = \frac{7 \cdot 942 \cdot 1}{40 \cdot 3{,}14} = 52{,}5, \quad \frac{b}{1 + \mu} = 1,$$

$$\frac{Pa^2}{4\pi b}\beta\left[K\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) - \beta \ln \beta\right] =$$

$$= \frac{942 \cdot 2^2}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1}\, 0{,}5\left[0{,}0614\left(0{,}5 - \frac{1}{0{,}5}\right) - 0{,}5 \ln 0{,}5\right] = 38{,}17,$$

$$aK_1\left(\frac{1}{\beta} - \beta\right) = 2 \cdot 0{,}20\left(\frac{1}{0{,}5} - 0{,}5\right) = 0{,}600.$$

Ecuația de continuitate se scrie:

$52{,}5 - X = 38{,}17 + 0{,}6\,X$ sau $1{,}6\,X = 13{,}65$, de unde $X = 8{,}96$ daNm/m.

Odată determinat X, săgețile se obțin suprapunînd efectele cazurilor 3,11, 15, 17. Rezultă:

a) Regiunea interioară (încărcată) notînd $\rho = \frac{r}{b}$ și w_0 săgeata plăcii la distanța $r = b$ de centru:

$$w = w_1 - Xw_2 = \frac{Pb^2}{4\,800\pi D}\left[\frac{3(183 + 43\mu)}{1 + \mu} - \frac{10(71 + 29\mu)}{1 + \mu}\rho^2 + 225\rho^4 - 64\rho^5\right] -$$

$$- \frac{Xb^2}{2D(1 + \mu)}(1 - \rho^2) + w_0.$$

b) Regiunea exterioară (neîncărcată) corespunzătoare la $\beta \leqslant \rho \leqslant 1$, unde $\rho = \frac{r}{a}$:

$$w = w_3 + Xw_4 = \frac{Pa^2}{16\pi bD}\beta[(1 + 2K)(1 - \rho^2) + 4K \ln \rho + 2\rho^2 \ln \rho) +$$

$$+ \frac{Xa^2}{2D}K_1(-1 + \rho^2 - 2 \ln \rho).$$

Cu valori numerice rezultă:

Regiunea interioară $\left(\rho = \frac{r}{b}\right)$:

$$w = \frac{1}{D}(20{,}04 - 40{,}1\rho^2 + 14{,}1\rho^4 - 4\rho^5) + w_0.$$

Regiunea exterioară $\left(\rho = \frac{r}{a}\right)$:

$$w = \frac{1}{D}[81{,}8(1 - \rho^2) - 33{,}9 \ln \rho + 150\,\rho^2 \ln \rho].$$

Săgeata w_0 din prima formulă se determină făcînd $\rho = 0{,}5$ în formula a doua:

$$w_0 = \frac{1}{D}[81{,}8(1 - 0{,}5^2) - 33{,}9 \ln 0{,}5 + 150 \cdot 0{,}5^2 \ln 0{,}5] = \frac{88{,}7}{D}.$$

16.5. Să se stabilească expresia săgeții w, în cazul unei plăci inelare (Fig. 16.5) de grosime constantă, simplu rezemată la periferie și liberă la marginea interioară. Placa este încărcată cu un moment radial M, uniform distribuit pe conturul exterior.

Rezolvare. Expresia săgeții (formula 16.6):

$$w = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + \bar{w}.$$

Din formula (16.8) rezultă: $\bar{w} = 0$.

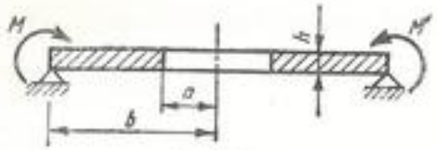


Fig. 16.5

Din relațiile (16.9) se calculează:

$$T_r = -D\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right] = -4DC_4\frac{1}{r},$$

$$M_r = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) = -D\left[2C_2(1+\mu) - \frac{C_3}{r^2}(1-\mu) + 2C_4(1+\mu)\ln r + C_4(3+\mu)\right].$$

Pentru: $r = b$; $T_r = 0$; $M_r = M$ și $w = 0$.
Deci:

$$C_4 = 0; \quad -D\left[2C_2(1+\mu) - \frac{C_3}{b^2}(1-\mu)\right] = M.$$

$$C_1 + C_2 b^2 + C_3 \ln b = 0.$$

Pentru: $r = a$, $M_r = 0$

$$-D\left[2C_2(1+\mu) - \frac{C_3}{a^2}(1-\mu)\right] = 0.$$

Se notează $b = a\beta$ și se rezolvă sistemul:

$$C_3 = -\frac{M}{D}\cdot\frac{a^2}{1-\mu}\cdot\frac{\beta^2}{\beta^2-1}, \quad C_2 = -\frac{M}{2D}\cdot\frac{\beta^2}{(\beta^2-1)(1+\mu)}.$$

$$C_1 = \frac{M}{D}\frac{b^2}{\beta^2-1}\left[\frac{\beta^2}{2(1+\mu)} + \frac{\ln b}{1-\mu}\right].$$

Deci:

$$w = \frac{Ma^2}{2D}\frac{1}{(\beta^2-1)(1+\mu)}\left[1 - \frac{r^2}{b^2} - 2\frac{1+\mu}{1-\mu}\beta^2\ln\frac{r}{b}\right].$$

16.6. Să se determine eforturile unitare la marginea interioară a capacului de vizitare rezemat ca în figura 16.6, *a*, ținînd seama că la montaj, în bulonul de legătură, ia naștere o forță de prestrîngere $P = 3\,300$ daN.

Rezolvare. Capacul este o placă inelară rezemată pe conturul exterior și strînsă pe conturul interior de bulonul considerat rigid, fixat de o traversă elastică.

La montaj, datorită prestrîngerii, placa și traversa se deformează ca în figura 16.6, *a* (linie plină), iar la aplicarea presiunii p, acestea iau forma desenată cu linie întreruptă. Schema de calcul este prezentată în figura 16.6, *c*.

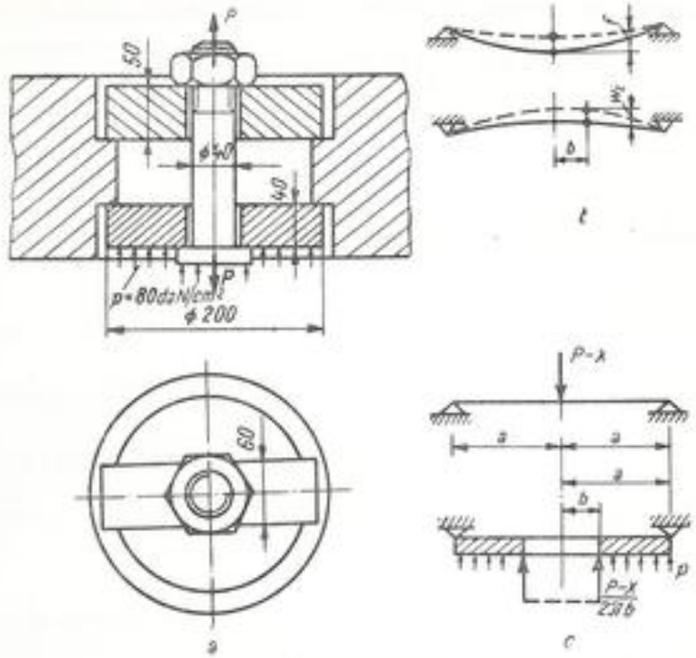


Fig. 16.6

Valoarea forței de prestrîngere X se determină egalînd deformația suplimentară a conturului interior al plăcii, w_i, cu săgeata mijlocului traversei f, după aplicarea forței uniform distribuite:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{2{,}1\cdot 10^6\cdot 4^3}{12(1-0{,}3^2)} = 12{,}3\cdot 10^6 \text{ daNcm},$$

$$I = \frac{6\cdot 5^3}{12} = 62{,}5 \text{ cm}^4,$$

$$f = \frac{X(2a)^3}{48EI} = \frac{X\cdot 20^3}{48\cdot 2{,}1\cdot 10^6\cdot 62{,}5} = 1{,}27\cdot 10^{-6}\,X.$$

Expresia săgeții plăcii se determină prin metoda suprapunerii efectelor (tabela 16. *a*, pozițiile 12 și 14):

$$r = b;\ \rho = \beta = \frac{b}{a} = \frac{2}{10} = 0{,}2;\ \ln\rho = \ln\beta = -1{,}61;$$

— săgeata w_i' produsă de sarcina uniform distribuită:

$$k_i' = \beta^2\left[3 + \mu + 4(1+\mu)\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\ln\beta\right] =$$

$$= 0{,}2^2\left[3 + 0{,}3 - 4(1+0{,}3)\frac{0{,}2^2}{1-0{,}2^2}1{,}61\right] = 0{,}118,$$

$$w_i' = \frac{pa^4}{64D}\left\{\frac{2}{1+\mu}[(3+\mu)(1-2\beta^2) + k_i'](1-\rho^2) - (1-\rho^4) -\right.$$

$$\left. - \frac{4}{1-\mu}k_i'\ln\rho - 8\beta^2\rho^2\ln\rho\right\} =$$

$$= \frac{80\cdot 10^4}{64\cdot 12{,}3\cdot 10^6}\left\{\frac{2}{1+0{,}3}[(3+0{,}3)(1-2\cdot 0{,}2^2) + 0{,}118](1-0{,}2^2) -\right.$$

$$\left. - (1-0{,}2^4) + \frac{4}{1-0{,}3}0{,}118\cdot 1{,}61 + 8\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}2^2\cdot 1{,}61\right\} = 0{,}00484 \text{ cm};$$

— săgeata produsă de sarcina $\frac{X}{2\pi b}$ distribuită liniar, w_i'':

$$k_i'' = (1+\mu)\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\ln\beta = -(1+0{,}3)\frac{0{,}2^2}{1-0{,}2^2}1{,}61 = -0{,}087,$$

$$w_i'' = \frac{\frac{X}{2\pi b}a^3}{8D}\beta\left[\frac{3+\mu-2k_i''}{1+\mu}(1-\rho^2) + 4\frac{k_i''}{1-\mu}\ln\rho + 2\rho^2\ln\rho\right] =$$

$$= \frac{10^3X}{2\pi\cdot 2\cdot 8\cdot 12{,}3\cdot 10^6}0{,}2\left[\frac{3+0{,}3+2\cdot 0{,}087}{1+0{,}3}(1-0{,}2^2) - 4\frac{0{,}087}{1-0{,}3}1{,}61 -\right.$$

$$\left. - 2\cdot 0{,}2^2\cdot 1{,}61\right] = 0{,}264\cdot 10^{-6}X,$$

$$f = w_i' - w_i''; \quad 1{,}27\cdot 10^{-6}X = 0{,}00484 - 0{,}264\cdot 10^{-6}X$$

$$X = 3\,160 \text{ daN}.$$

Momentul tangenţial pe conturul interior se calculează însumînd momentul M_{ti}' produs de acţiunea presiunii p şi M_{ti}'' datorit sarcinii $P - X$ transmisă de bulon:

$$M_{ti} = M_{ti}' + M_{ti}'';$$

$$M_{ti}' = \frac{pa^2}{16}\left[2(1-\mu)(1-2\beta^2) + (1+3\mu)(1-\rho^2) + k_i'\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right) + 4(1+\right.$$

$$\left. + \mu)\beta^2\ln\rho\right] = \frac{80\cdot 10^2}{16}\left[2(1-0{,}3)(1-2\cdot 0{,}2^2) + (1+3\cdot 0{,}3)(1-0{,}2^2) +\right.$$

$$\left. + 0{,}118\left(1+\frac{1}{0{,}2^2}\right) - 4(1+0{,}3)\cdot 0{,}2^2\cdot 1{,}61\right] = 2\,920 \text{ daNcm/cm};$$

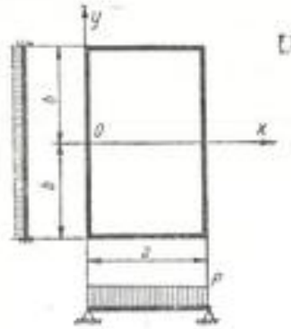


Fig. 16.7, *a*

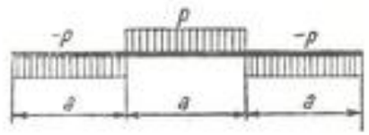


Fig. 16.7, *b*

$$M_{ti}'' = \frac{\frac{P-X}{2\pi b}}{2}\beta\left[1-\mu-k_i''\left(\frac{1}{\rho^2}+1\right) - (1+\mu)\ln\rho\right] =$$

$$= \frac{\frac{3\,300-3\,160}{2\pi 2}}{2}0{,}2\left[1-0{,}3+0{,}087\left(\frac{1}{0{,}2^2}+1\right) + (1+0{,}3)1{,}61\right] = 33{,}6\,\frac{\text{daN cm}}{\text{cm}},$$

$$M_{ti} = 2\,920 + 33{,}6 = 2\,953{,}6 \text{ daNcm/cm},$$

$$\sigma_{ri} = \frac{6M_{ti}}{h^2} = \frac{2\,953{,}6\cdot 6}{4^2} = 1\,110 \text{ daN/cm}^2.$$

16.7. Se consideră o placă dreptunghiulară de dimensiuni a şi $2b$ încărcată cu o sarcină uniform distribuită p. Laturile de lungime a sînt încastrate, iar cele de lungime $2b$ sînt simplu rezemate. Se cere să se determine săgeata w într-un punct oarecare al plăcii şi să se deducă apoi expresiile momentelor încovoietoare M_x şi M_y la mijlocul plăcii (Fig. 16.7, *a*).

Rezolvare. Se aplică metoda seriilor *Fourier* simple utilizînd axele din figura 16.7, *a*. Se dezvoltă sarcina $p(x)$ în serie *Fourier* pe direcţia Ox, folosind cazul I din tabela 16. *b*, dat fiind că o grindă simplu rezemată poate fi asimilată cu o grindă de lungime infinită, acţionată alternativ de sarcini uniform distribuite, pozitive şi negative (Fig. 16.7, *b*). Se obţine:

$$p(x) = \frac{4p}{\pi}\sum\frac{1}{n}\sin\alpha_n x,$$

unde:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 3, 5 \ldots).$$

Atunci w va fi de forma:

$$w = \Sigma Y_n \sin_n \alpha_n x.$$

Folosind pentru Y_n forma (16.17) rezultă:

$$Y_n = A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \alpha_n y + C_n \alpha_n y \cdot \operatorname{ch} \alpha_n y + D_n \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y + \frac{a_n}{\alpha_n^4 D}.$$

Din cauza simetriei, faţă de Ox, termenii antisimetrici $B_n \operatorname{sh} \alpha_n y$ şi $C_n \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y$ sînt nuli, deci $B_n = C_n = 0$. Rezultă:

$$Y_n = A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + D_n \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y + \frac{a_n}{\alpha_n^4 D}.$$

Pentru $y = b$, rezultă $Y_n = 0$ şi $Y_n' = 0$; deci:

$$A_n \operatorname{ch} \alpha_n b + D_n \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n b + \frac{a_n}{\alpha_n^4 D} = 0,$$

$$\alpha_n A_n \operatorname{sh} \alpha_n b + D_n \alpha_n [\operatorname{sh} \alpha_n b + \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n b] = 0.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuaţii se găseşte:

$$A_n = -\frac{\operatorname{sh} \alpha_n b + \alpha_n b \cdot \operatorname{ch} \alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b + \alpha_n b} \cdot \frac{a_n}{\alpha_n^4 D},$$

$$D_n = \frac{\operatorname{sh} \alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b + \alpha_n b} \cdot \frac{a_n}{\alpha_n^4 D}.$$

Pentru cazul încărcării uniform distribuite, $a_n = \frac{4p}{n\pi}$ şi obţinem:

$$A_n = -\frac{1 + \alpha_n b \cdot \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \cdot \frac{4pb^4}{(\alpha_n b)^4 D\pi},$$

$$D_n = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \cdot \frac{4pb^4}{(\alpha_n b)^4 \pi D}.$$

Rezultă:

$$w = \frac{4pb^4}{\pi D} \Sigma \frac{1}{(\alpha_n b)^4} \left[-\frac{1 + \alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \operatorname{ch} \alpha_n y + \frac{1}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y + 1 \right] \sin \alpha_n x.$$

Se calculează apoi:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{4pb^2}{\pi D} \Sigma \frac{1}{(\alpha_n b)^2} \left[-\frac{1 + \alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \operatorname{ch} \alpha_n y + \frac{1}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y + 1 \right] \sin \alpha_n x,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{4pb^2}{\pi D} \Sigma \frac{1}{(\alpha_n b)^2} \left[\frac{1 - \alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \operatorname{ch} \alpha_n y + \frac{1}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \cdot \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y \right] \sin \alpha_n x.$$

În mijlocul plăcii $\left(x = \frac{a}{2},\ y = 0\right)$ se obţine:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{4pb^2}{\pi D} \Sigma \frac{1}{(\alpha_n b)^2} \left[\frac{1 + \alpha_n b \cdot \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} - 1 \right] \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{4pb^2}{\pi D} \Sigma \frac{1}{(\alpha_n b)^2} \left[\frac{1 - \alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \right] \sin \frac{n\pi}{2}; \quad (n = 1, 3, 5 \ldots).$$

Momentele încovoietoare la mijlocul plăcii vor fi:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{4pb^2}{\pi} \Sigma \frac{1}{(\alpha_n b)^2} \left[1 - \frac{1 - \alpha_n b \cdot \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} + \right.$$

$$\left. + \mu \frac{\alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b - 1}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \right] \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \frac{4pb^2}{\pi} \Sigma \frac{1}{(\alpha_n b)^2} \left[\frac{\alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b - 1}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} + \right.$$

$$\left. + \mu \left(1 - \frac{1 - \alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \right) \right] \sin \frac{n\pi}{2}.$$

16.8. Se consideră o placă dreptunghiulară de dimensiuni $2a$ şi $2b$ încărcată cu o sarcină uniform distribuită p. Laturile de lungime $2a$ sînt simplu rezemate, iar laturile de lungime $2b$ sînt încastrate. Se cere să se determine săgeata într-un punct oarecare al plăcii şi expresia ei în mijloc (Fig. 16.8, *a*).

Rezolvare. Ca şi în problema 16.7, se alege originea sistemului de axe în mijlocul laturii de lungime $2b$, axa Oy în direcţia acestei laturi şi Ox coincizînd cu axa de simetrie a plăcii. Se aplică metoda seriilor *Fourier* simple. Se dezvoltă sarcina $p(x)$ în serie *Fourier* pe direcţia axei Ox. Deoarece o grindă încastrată la ambele extremităţii poate fi imaginată ca o grindă de lungime infinită acţionată de o sarcină uniform distribuită p şi de o serie de sarcini concentrate $P = 2pa$ la distanţe egale $2a$ (Fig. 16.8, *b*), dezvoltarea în serie *Fourier* se poate obţine în modul următor:

Pentru sarcina uniform distribuită, această dezvoltare se reduce la o constantă p.

Fig. 16.8. *a*

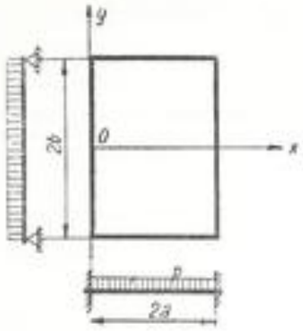
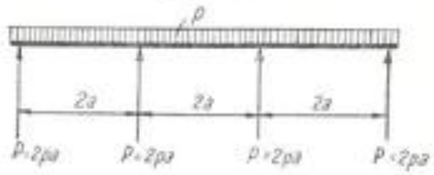


Fig. 16.8 *b*.



Pentru sarcinile concentrate se folosește tabela 16. *b*, cazul 7 în care se face $P = -2pa$, $d = 0$, $l = a$. Se obține:

$$-\frac{2pa}{2a} - \frac{2pa}{2a}\Sigma\cos\frac{n\pi x}{a} = -p - p\,\Sigma\cos\alpha_n x.$$

Dezvoltarea în serie a sarcinii $p(x)$ va fi atunci:

$$p(x) = p - p - p\,\Sigma\cos\alpha_n x = -p\,\Sigma\cos\alpha_n x,$$

unde $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$. Se notează $a_n = -p$ (coeficientul general al seriei *Fourier*). Săgeata w va fi de forma:

$$w = \Sigma\, Y_n \cos\alpha_n x,$$

unde

$$Y_n = A_n \operatorname{ch}\alpha_n y + B_n \operatorname{sh}\alpha_n y + C_n\alpha_n y \operatorname{ch}\alpha_n y + D_n\alpha_n y \operatorname{sh}\alpha_n y + \frac{a_n}{\alpha_n^4 D}.$$

Din cauza simetriei față de axa Ox, termenii antisimetrici $B_n \operatorname{sh}\alpha_n y$ și $C_n\alpha_n y \operatorname{ch}\alpha_n y$ sînt nuli; deci $B_n = C_n = 0$. Rezultă:

$$Y_n = A_n \operatorname{ch}\alpha_n y + D_n\alpha_n y \operatorname{sh}\alpha_n y + \frac{a_n}{\alpha_n^4 D}.$$

Pentru $y = b$, $Y_n = 0$ și $M_y = 0$.
Dar:

$$M_y = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = -D\Sigma\,[Y_n'' - \mu\alpha_n^2 Y_n]\cos\alpha_n x = 0.$$

Această egalitate trebuind să aibă loc pentru orice valoare a lui x rezultă:

$$Y_n'' - \mu\,\alpha_n^2 Y_n = 0.$$

Cum însă $Y_n = 0$, conform primei condiții, rezultă $Y_n'' = 0$. Dar:

$$Y_n''' = \alpha_n^2 A_n \operatorname{ch}\alpha_n y + D_n\alpha_n^2[2\operatorname{ch}\alpha_n y + \alpha_n y \operatorname{sh}\alpha_n y].$$

Rezultă atunci condiția:

$$A_n \operatorname{ch}\alpha_n b + D_n[2\operatorname{ch}\alpha_n b + \alpha_n b \operatorname{sh}\alpha_n b] = 0.$$

Condiția ca $Y_n = 0$ pentru $y = b$ se scrie la fel ca în problema 16.7:

$$A_n \operatorname{ch}\alpha_n b + D_n\alpha_n b \cdot \operatorname{sh}\alpha_n b + \frac{a_n}{\alpha_n^4 D} = 0.$$

Rezolvînd sistemul în funcție de A_n și D_n se obține:

$$A_n = -\frac{2 + \alpha_n b \cdot \operatorname{th}\alpha_n b}{2\operatorname{ch}\alpha_n b}\cdot\frac{a_n}{\alpha_n^4 D}$$

$$D_n = \frac{1}{2\operatorname{ch}\alpha_n b}\cdot\frac{a_n}{\alpha_n^4 D}.$$

Ținînd seama de valoarea $a_n = -p$ rezultă:

$$A_n = \frac{pb^4}{D}\cdot\frac{2 + \alpha_n b \cdot \operatorname{th}\alpha_n b}{2\operatorname{ch}\alpha_n b}\cdot\frac{1}{(\alpha_n b)^4},$$

$$D_n = -\frac{pb^4}{D}\cdot\frac{1}{2\operatorname{ch}\alpha_n b}\cdot\frac{1}{(\alpha_n b)^4}.$$

Atunci:

$$w = \frac{pb^4}{D}\Sigma\frac{1}{(\alpha_n b)^4}\left[\frac{2 + \alpha_n b \cdot \operatorname{th}\alpha_n b}{2\operatorname{ch}\alpha_n b}\operatorname{ch}\alpha_n y - \frac{1}{2\operatorname{ch}\alpha_n b}\alpha_n y \operatorname{sh}\alpha_n y - 1\right]\cos\alpha_n x.$$

La mijlocul plăcii $x = a$ iar $y = 0$ și rezultă:

$$w_{max} = \frac{pb^4}{D}\Sigma\frac{1}{(\alpha_n b)^4}\left[\frac{2 + \alpha_n b \cdot \operatorname{th}\alpha_n b}{2\operatorname{ch}\alpha_n b} - 1\right]\cos n\pi.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

16.9. Fundația unui turn este alcătuită dintr-o placă circulară, avînd dimensiunile din figura 16.9. Turnul se reazemă pe o suprafață inelară pe care exercită o presiune de 9 kN/m². Reacțiunile terenului se vor considera uniform distribuite. Se cere să se afle momentul încovoietor în mijlocul plăcii. Se va lua $\mu = 0{,}17$.

Răspuns. $M_r = M_t = -5{,}0$ kNm/m.

16.10. Un rezervor de apă este executat în jurul unui coș de fabrică. El se sprijină pe o placă inelară, de beton armat de 30 cm grosime, avînd $D_{int} = 3{,}00$ m și $D_{ext} = 6{,}00$ m. Apa în rezervor are o înălțime de maximum 2,20 m. Pereții exteriori ai rezervorului transmit plăcii o sarcină $P = 10$ kN/m

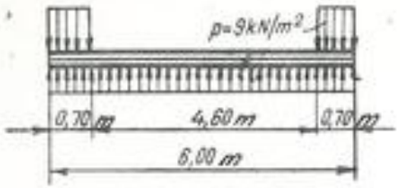


Fig. 16.9

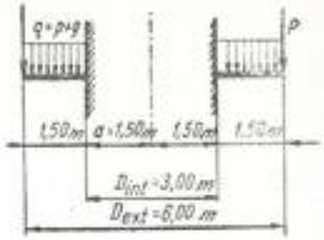


Fig. 16.10

(Fig. 16.10). Se cere să se determine eforturile unitare pe latura încastrată. Pentru determinarea eforturilor de compresiune din beton se va considera că secţiunea este aproximativ omogenă.

Se dau:

— greutatea specifică a betonului armat: $\gamma = 25$ kN/m³;

— coeficientul de contracţie transversală: $\mu = \frac{1}{6}$.

Răspuns. $\sigma_b = 48$ daN/cm².

16.11. Să se determine momentele încovoietoare într-o placă inelară încastrată la periferie şi liberă la marginea interioară. Placa are o balustradă înaltă de 1,00 m şi este încărcată cu oameni (500 da N/m²) care împing balustrada cu o forţă orizontală $H = 100$ daN/m (Fig. 16.11). Ştiind că grosimea plăcii este de 10 cm, greutatea specifică a betonului armat este $\gamma = 2\,400$ daN/m³, greutatea balustradei de 80 daN/m, iar coeficientul de contracţie transversală al betonului armat este $\mu = \frac{1}{6}$, se cere să se determine momentele încovoietoare în secţiunea de încastrare.

Răspuns. $M_r = -1040$ daNm/m,

$M_t = -175$ daNm/m.

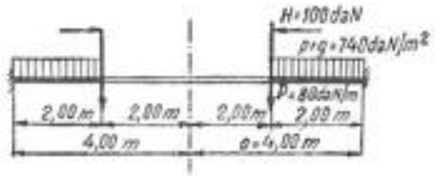


Fig. 16.11

CAPITOLUL **17**

INVELIŞURI DE ROTAŢIE CU PEREŢI SUBŢIRI

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. Învelişurile de rotaţie au profilul determinat de o curbă meridiană, iar secţiunile transversale pe axa longitudinală sînt cercuri.

2. În cadrul acestui capitol se tratează numai probleme rezolvabile prin *teoria de membrană sau teoria fără momente a învelişurilor*. Relaţiile stabilite prin această teorie se pot aplica numai în următoarele ipoteze:

— grosimea învelişului este mică în raport cu razele principale de curbură; ca urmare, eforturile unitare sînt constante pe grosime;

— nu există salturi bruşte de grosime a peretelui şi nici consolidări rigide;

— solicitarea nu se face prin forţe sau cupluri concentrate.

3. Izolînd un element din înveliş prin patru secţiuni ca în figura 17. *a*, ecuaţiile de echilibru duc la următoarele relaţii:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h}; \tag{17.1}$$

$$\sigma_1 = \pm \frac{P}{2\pi r h \sin\varphi},^{*} \tag{17.2}$$

în care: σ_1 este efortul unitar meridian;

σ_2 — efortul unitar circumferenţial;

ρ_1 — prima rază de curbură principală (meridiană);

ρ_2 — a doua rază de curbură principală;

r — raza paralelului;

h — grosimea peretelui învelişului;

p — componenta pe normala la suprafaţă a solicitării exterioare (constantă pe un paralel şi pozitivă cînd este dirijată către convexitatea suprafeţei);

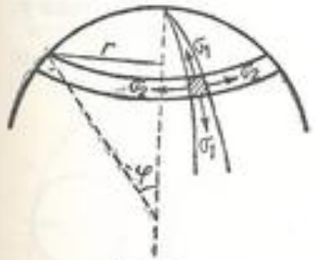


Fig. 17. *a*

* Semnul plus se ia pentru întindere, iar minus pentru compresiune.

P este proiecţia pe axa de rotaţie a sarcinii totale ce acţionează asupra porţiunii de înveliş situată deasupra sau dedesubtul paralelului considerat.

4. Dacă pe o suprafaţă acţionează o presiune constantă, atunci, independent de forma suprafeţei, proiecţia pe o direcţie dată a rezultantei forţelor de presiune este egală cu produsul dintre presiunea p şi aria proiecţiei suprafeţei pe un plan normal pe direcţia dată.

5. Dacă pe o suprafaţă oarecare acţionează presiunea unui lichid, care are un nivel liber, atunci componenta verticală a rezultantei forţelor de presiune este egală cu greutatea lichidului din volumul situat deasupra suprafeţei.

B. PROBLEME REZOLVATE

17.1. Să se determine eforturile unitare în pereţii unui rezervor cilindric, cu diametrul $d = 2{,}50$ m, ştiind că grosimea tablei este $h = 10$ mm, iar presiunea interioară este $p = 15$ daN/cm² (Fig. 17.1).

Rezolvare. Se aplică formula (17.1) în care:

$$\rho_1 = \infty,$$

$$\rho_2 = \frac{2{,}50}{2} = 1{,}25 \text{ m} = 125 \text{ cm} = r;$$

$$P = pA = 15 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 250^2}{4} = 736\,311 \text{ daN};$$

$$h = 1 \text{ cm}; \quad p = 15 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Rezultă:

$$\sigma_2 = \frac{p\rho_2}{h} = \frac{15 \cdot 125}{1} = 1\,875 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2};$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{2\pi r h \sin\varphi} = \frac{736\,311}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 125 \cdot 1} = 937{,}5 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

17.2. Un rezervor sferic de rază R este umplut cu un gaz la presiunea p. Se cere să se găsească eforturile unitare în pereţii rezervorului.

Rezolvare. Se aplică formula (17.1) în care $\rho_1 = \rho_2 = R$. Din motive de simetrie $\sigma_1 = \sigma_2$.

Atunci:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{p\rho}{2h} = \frac{pR}{2h}.$$

Observaţie. Dacă nu se ţinea seamă de simetrie, se putea aplica formula (17.2) în care $P = p\pi r^2$, r fiind raza paralelului.

Rezultă:

$$\sigma_1 = \frac{p\pi r^2}{2\pi r h \sin\varphi} = \frac{pr}{2h \sin\varphi} = \frac{pR}{2h}, \text{ căci } \frac{r}{\sin\varphi} = R.$$

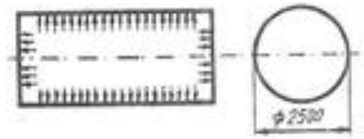


Fig. 17.1

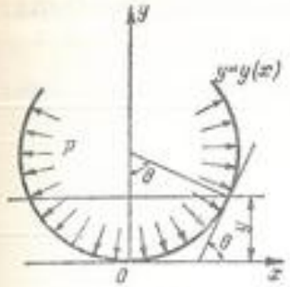


Fig. 17.3

17.3. Să se găsească ecuaţia generatoarei suprafeţei unui vas de rotaţie cu pereţi subţiri de grosime constantă h, solicitat de presiunea interioară $p = \text{const.}$, astfel ca efortul unitar $\sigma_1 = \text{const.}$

Rezolvare. Conform relaţiei (17.2) şi figurii 17.3:

$$\sigma_1 = \frac{P}{2\pi x h \sin\theta},$$

unde:

$$\sin\theta = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

şi

$$P = p\pi x^2.$$

Rezultă:

$$\sigma_1 = \frac{p\pi x^2}{2\pi x h y'^2}\sqrt{1 + y'^2},$$

$$\frac{x\sqrt{1 + y'^2}}{y'} = \sigma_1 \frac{2h}{p} = A = \text{ct},$$

$$y'^2 = \frac{x^2}{A^2 - x^2}; \quad y' = \pm\frac{x}{\sqrt{A^2 - x^2}}\,dy = \pm\frac{x\,dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

Integrînd ecuaţia diferenţială şi punînd condiţia ca la $x = 0$; $y = 0$, se obţine ecuaţia curbei sub forma:

$$x^2 + y^2 - 2Ay = 0,$$

care este ecuaţia unui cerc cu centrul pe axa Oy, de rază A şi trecînd prin origine.

Rezultă că vasul corespunzător este o sferă de rază $R = A$ pentru care $\sigma_1 = \frac{pR}{2h} = \text{const.}$, rezultat cunoscut de la problema precedentă.

17.4. Să se determine eforturile unitare într-o placă subţire emisferică, de rază R şi grosime h aşezată ca în figura 17.4, *a*, sub acţiunea greutăţii proprii. Să se construiască diagramele eforturilor unitare σ_1 şi σ_2. Placa este rezemată pe suprafaţa de jos.

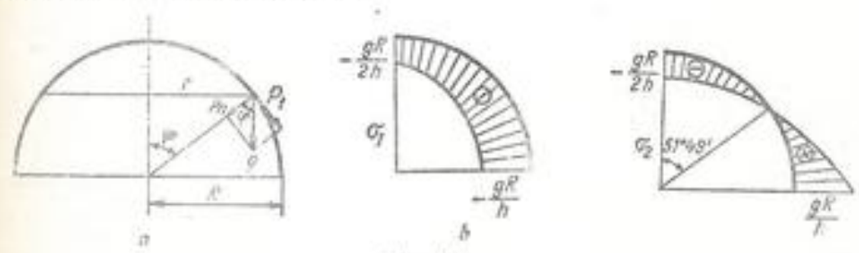


Fig. 17.4

Rezolvare. Notînd cu g greutatea unității de suprafață a plăcii, rezultă:

$$p_n = -g\cos\varphi.$$

Greutatea calotei mărginite de paralelul corespunzător unghiului φ este:

$$P = g2\pi R(R - R\cos\varphi) = 2\pi R^2 g(1 - \cos\varphi).$$

Deoarece $\rho_1 = \rho_2 = R$; $r = R\sin\varphi$;

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi r h\sin\varphi} = -\frac{2\pi R^2 g(1-\cos\varphi)}{2\pi R h\sin^2\varphi} = -\frac{gR}{h(1+\cos\varphi)}.$$

$$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{R} = -\frac{g\cos\varphi}{h}.$$

Rezultă:

$$\sigma_2 = -\frac{gR}{h}\,\frac{\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1}{1+\cos\varphi}.$$

În figura 17.4, *b* și 17.4, *c* sînt date diagramele de variație a eforturilor unitare σ_1 și σ_2.

17.5. Să se calculeze eforturile unitare într-un punct situat la distanța z sub baza mică a unui rezervor în formă de trunchi de con ca în figura 17.5, sub acțiunea greutății proprii.

Aplicație numerică: $r = 2$ m; $R = 8$ m; $h = 8$ cm; $H = 8$ m; $\gamma = 2\,400$ daN/m³.

Rezolvare. Din figura 17.5 rezultă:

$$x = z\,\mathrm{tg}\,\alpha + r;$$

$$\rho_1 = \infty;\ \rho_2 = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{z\,\mathrm{tg}\,\alpha + r}{\cos\alpha}.$$

Greutatea învelișului tronconic de deasupra paralelului de cotă z este:

$$P = \gamma h\pi(x+r)\frac{z}{\cos\alpha} = \gamma h\pi(z\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2r)\frac{z}{\cos\alpha}.$$

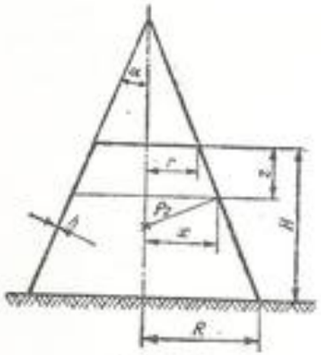


Fig. 17.5

Din formula (17.2) rezultă:

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi x h\cos\alpha} =$$

$$= -\frac{\gamma\pi h(z\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2r)\frac{z}{\cos\alpha}}{2\pi h(z\,\mathrm{tg}\,\alpha + r)\cos\alpha} = -\frac{\gamma(z\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2r)z}{2(z\,\mathrm{tg}\,\alpha + r)\cos^2\alpha}.$$

$$p_n = -g\cos\varphi = -\gamma h\sin\alpha.$$

Din relația (17.1):

$$\sigma_2 = \frac{p_n\rho_2}{h} = -\frac{\gamma h\sin\alpha(z\,\mathrm{tg}\,\alpha + r)}{h\cos\alpha} =$$

$$= -\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha(z\,\mathrm{tg}\,\alpha + r).$$

Rezultă că σ_1 și σ_2 nu depind de grosimea h a peretelui.

Eforturile unitare maxime apar la $z = H$:

$$\sigma_{1\,max} = -\frac{\gamma(H\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2r)H}{2(H\,\mathrm{tg}\,\alpha + r)\cos^2\alpha} = -\frac{\gamma H(R+r)}{2R\cos^2\alpha};$$

$$\sigma_{2\,max} = -\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha(H\,\mathrm{tg}\,\alpha + r) = -\gamma R\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Pentru exemplul numeric:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{R-r}{H} = \frac{8-2}{8} = 0{,}75;\quad \alpha = 36°55';$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = 0{,}8;$$

$$\sigma_{1\,max} = -\frac{2\,400\cdot 8(8+2)}{2\cdot 8\cdot 0{,}64} = -18\,750\ \mathrm{daN/m^2} = -1{,}875\ \mathrm{daN/cm^2};$$

$$\sigma_{2\,max} = -2\,400\cdot 8\cdot 0{,}75 = -14\,400\ \mathrm{daN/m^2} = -1{,}44\ \mathrm{daN/cm^2}.$$

17.6. Să se determine eforturile unitare într-o cupolă emisferică încărcată cu zăpadă (Fig. 17.6, *a*).

Rezolvare. Încărcarea cu zăpadă poate fi schematizată printr-o sarcină q, uniform distribuită pe proiecția orizontală a suprafeței.

Unui element de suprafață al sferei, de arie egală cu unitatea (Fig. 17.6, *b*), îi corespunde în proiecție orizontală un element de arie $\cos\varphi$. Rezultă pentru unitatea de suprafață a sferei o sarcină distribuită verticală:

$$p = q\cos\varphi.$$

Atunci $p_n = -p\cos\varphi = -q\cos^2\varphi$ (presiunea este negativă cînd acționează pe fața convexă a suprafeței);

$$P = q\pi r^2 = q\pi R^2\sin^2\varphi;$$

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi R h\sin^2\varphi} = -\frac{qR}{2h}.$$

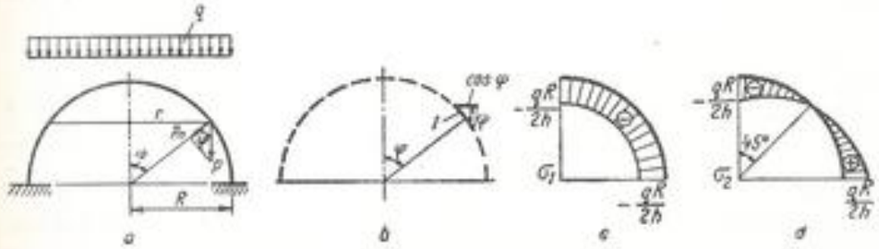


Fig. 17.6

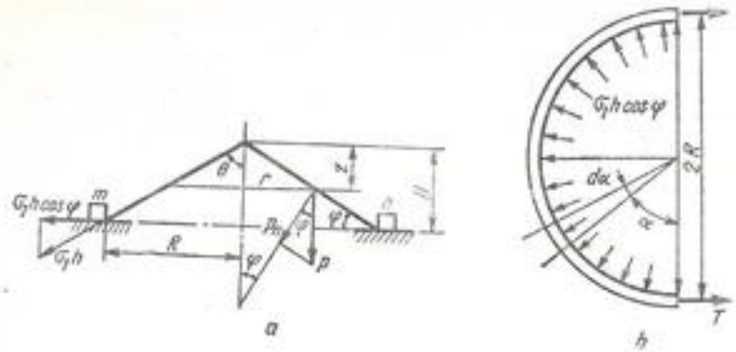


Fig. 17.7

Deoarece $\rho_1 = \rho_2 = R$, relaţia (17.1) devine:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{R} = -\frac{q\cos^2\varphi}{h}$$

$$\sigma_2 = -\frac{qR}{h}\cos^2\varphi - \sigma_1 = -\frac{qR}{2h}(2\cos^2\varphi - 1) = -\frac{qR}{2h}\cos 2\varphi.$$

Diagramele de variaţie a eforturilor unitare σ_1 şi σ_2 sînt date în figura 17.6, *c* şi *d*.

17.7. Să se determine eforturile unitare într-o placă subţire conică aşezată ca în figura 17.7, *a* şi încărcată cu zăpadă, precum şi efortul de compresiune în inelul de sprijin *mn*.

Rezolvare. La fel ca la problema precedentă, $p = q\cos\varphi = q\sin\theta$ şi $p_n = -q\cos^2\varphi = -q\sin^2\theta$. Deoarece $r = z\,\mathrm{tg}\,\theta$ şi $P = \pi r^2 q = q\cdot\pi z^2\,\mathrm{tg}^2\theta$, din relaţia (17.2) rezultă:

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi r h\sin\varphi} = -\frac{q\pi z^2\,\mathrm{tg}^2\theta}{2\pi z\,\mathrm{tg}\,\theta h\cos\theta} = -\frac{q\sin\theta}{2h\cos^2\theta}z.$$

Întrucît $\rho_1 = \infty$ şi $\rho_2 = \frac{r}{\sin\varphi} = \frac{z\,\mathrm{tg}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{z\sin\theta}{\cos^2\theta}$, se obţine din relaţia (17.1):

$$\sigma_2 = p_n\frac{\rho_2}{h} = -q\sin^2\theta\,\frac{z\sin\theta}{h\cos^2\theta} = -\frac{q\sin^3\theta}{h\cos^2\theta}z.$$

Pentru $z = H$:

$$\sigma_{1\,max} = -\frac{qH\sin\theta}{2h\cos^2\theta};\quad \sigma_{2\,max} = -\frac{qH\sin^3\theta}{h\cos^2\theta}.$$

Deoarece suprafaţa de sprijin este orizontală, iar efortul pe unitatea de lungime $|\sigma_1|_{max}h$ este oblic faţă de planul orizontal, componenta sa orizontală $|\sigma_1|_{max}h\cos\varphi$ trebuie preluată de inelul *mn*. Neglijînd deformaţiile

plăcii conice şi ale inelului, efortul T se calculează scriind echilibrul unei jumătăţi de inel (Fig. 17.7, *b*):

$$2T = \int_0^\pi |\sigma_1|_{max}\,h\cos\varphi\cdot R\,d\alpha\cdot\sin\alpha;$$

$$T = |\sigma_1|_{max}hR\cos\varphi = |\sigma_1|_{max}hR\sin\theta = \frac{qH\sin\theta}{2h\cos^2\theta}hR\sin\theta = \frac{q}{2}HR\,\mathrm{tg}^2\theta$$

$$T = \frac{qR^2}{2}\mathrm{tg}\,\theta.$$

17.8. Să se determine eforturile unitare într-o placă subţire emisferică, de rază $R = a$, cu axa verticală şi concavitatea în sus, sub acţiunea greutăţii proprii, în următoarele cazuri:

a) este sprijinită pe un plan orizontal (Fig. 17.8, *a*);
b) este sprijinită pe un inel superior (Fig. 17.8, *b*);
c) este sprijinită pe un inel situat pe un paralel oarecare (Fig. 17.8, *c*).

Rezolvare. a) Greutatea proprie a calotei sferice superioare este:

$$P_\varphi = 2\pi g a^2\cos\varphi.$$

Din relaţia (17.2) rezultă, înlocuind $r = a\sin\varphi$:

$$\sigma_1 = -\frac{P_\varphi}{2\pi r h\sin\varphi} = -\frac{ga}{h}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi},$$

iar din relaţia (17.1) se obţine:

$$\sigma_2 = -\frac{ga\cos\varphi}{h} + \frac{ga}{h}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{ga}{h}\frac{\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi}. \qquad (1)$$

b) Se observă că dacă se răstoarnă cupola atîrnată, se obţine o cupolă emisferică rezemată pe un cerc mare, solicitată de greutatea proprie. Prin răsturnarea cupolei, se modifică numai semnul eforturilor obţinute la problema 17.4:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{ga}{(1+\cos\varphi)h}\\ \sigma_2 &= \frac{ga}{h}\,\frac{\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1}{1+\cos\varphi}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

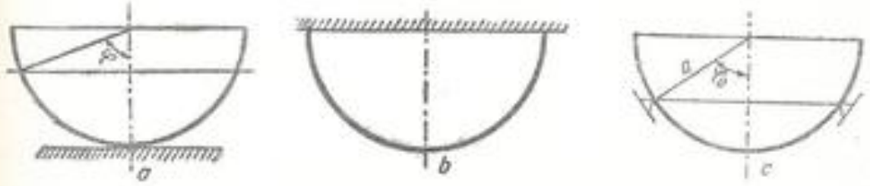


Fig. 17.8

c) Va trebui în prealabil să se calculeze reacţiunea de-a lungul inelului de reazem definit prin unghiul φ_0.

Pentru întreaga emisferă se obţine: $P_\varphi = 2\pi g a^2$.

Dacă se taie acum cupola cu un plan orizontal definit de un unghi $\varphi > \varphi_0$, se obţine, întocmai ca la punctul *a*) de mai sus:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{ga}{h}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \\ \sigma_2 &= +\frac{ga}{h}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} \end{aligned}\right\}(\varphi \geqslant \varphi_0) \qquad (3)$$

Cînd $\varphi < \varphi_0$ eforturile unitare datorite numai reacţiunii reazemului au valoarea:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = -\frac{P}{2\pi a h \sin^2\varphi} = -\frac{2\pi g a^2}{2\pi a h \sin^2\varphi} = -\frac{ga}{h\sin^2\varphi}. \qquad (4)$$

Eforturile unitare reale se determină prin suprapunerea efectelor, adică însumînd algebric eforturile unitare (3) şi (4):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{ga}{h}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} - \frac{ga}{h\sin^2\varphi} = -\frac{ga(1+\cos\varphi)}{h\sin^2\varphi} = -\frac{ga}{(1-\cos\varphi)h} \\ \sigma_2 &= \frac{ga}{h}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{ga}{h\sin^2\varphi} = \frac{ga(1-\cos\varphi+\cos^2\varphi)}{h(1-\cos\varphi)} = \\ &= \frac{ga}{h}\left(\frac{1}{1-\cos\varphi} - \cos\varphi\right). \end{aligned}\right\}(\varphi \leqslant \varphi_0) \qquad (5)$$

17.9. Să se dimensioneze un rezervor conic suspendat, plin cu lichid de greutate specifică γ, ştiind că: înălţimea sa este $l = 3$ m; unghiul la vîrf $2\alpha = 90°$; rezistenţa admisibilă a tablei $\sigma_a = 1\,000$ daN/cm² şi $\gamma = 10^{-3}$ daN/cm³ (Fig. 17.9).

Rezolvare. În acest caz, meridianul este o linie dreaptă şi $\rho_1 = \infty$.

Ecuaţia (17.1) se reduce la:

$$\sigma_2 = \frac{p \cdot \rho_2}{h}.$$

Presiunea la o înălţime y de la fundul vasului are valoarea:

$$p = \gamma(l - y).$$

Raza de curbură ρ_2 măsurată pe normala la perete este:

$$\rho_2 = AB = \frac{AC}{\cos\alpha} = \frac{y\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha}; \quad \sigma_2 = \frac{\gamma(l-y)}{h}\cdot\frac{y\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{h\cos\alpha}\,y(l-y).$$

Efortul unitar σ_2 va fi maxim acolo unde produsul:

$$y(l-y) \text{ este maxim, adică la } y = l - y = \frac{l}{2}.$$

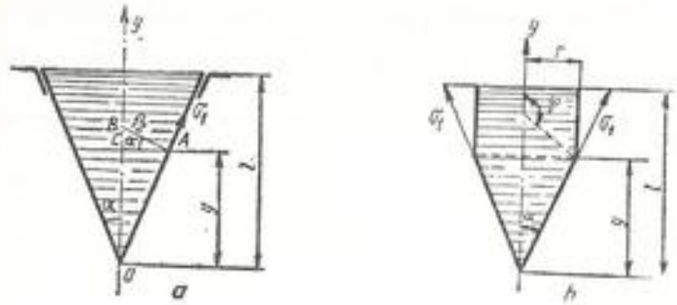


Fig. 17.9

Valoarea maximă este:

$$\sigma_{2\max} = \frac{\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{h\cos\alpha}\cdot\frac{l^2}{4}. \qquad (1)$$

Pentru a calcula efortul σ_1 se aplică formula (17.2) în care P este greutatea conului situat sub paralelul de rază r şi a cilindrului de deasupra lui (Fig. 17.9, *b*):

$$P = \gamma\left[\frac{\pi r^2 y}{3} + \pi r^2(l-y)\right] = \frac{\gamma\pi r^2}{3}(3l - 2y).$$

Deoarece $r = y\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $P = \dfrac{\gamma\pi y^2\mathrm{tg}^2\alpha}{3}(3l - 2y)$,

$$\sigma_1 = \frac{P}{2\pi r h \sin\varphi}.$$

În cazul de faţă, $\sin\varphi = \cos\alpha$ (Fig. 17.9, *b*), deci:

$$\sigma_1 = \frac{\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{6h\cos\alpha}\,y(3l - 2y).$$

Maximul are loc cînd $y = \dfrac{3}{4}l$, după cum se poate verifica uşor anulînd derivata.

Valoarea acestui maxim este:

$$\sigma_{1\max} = \frac{3\gamma l^2\mathrm{tg}\,\alpha}{16h\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Se vede că $\sigma_{2\max} > \sigma_{1\max}$.

Rezultă că $\sigma_{2\max}$ este efortul unitar defavorabil; deci dimensionarea se va face folosind formula (1), dacă se admite teoria I de rezistenţă:

$$h_{necesar} = \frac{\gamma l^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4\sigma_a\cos\alpha} = \frac{10^{-3}\cdot 1\cdot 300^2}{4\cdot 1\,000\,\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}0319 \text{ cm} \approx 0{,}32 \text{ mm}.$$

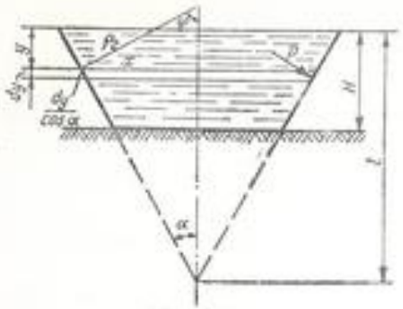


Fig. 17.10

Observare. În practică se foloseşte o grosime mult mai mare, din cauza îmbinărilor, a pericolului de coroziune etc.

17.10. Să se determine eforturile unitare în pereţii unui rezervor tronconic plin cu lichid de greutate specifică γ şi rezemat pe baza mică (Fig. 17.10).

Aplicaţie numerică: $\gamma = 8$ kN/m³; $h = 6$ mm; $\alpha = 30°$; $H = 4$ m; $l = 12$m.

Rezolvare. La adîncimea y presiunea este:

$$p = \gamma y;$$

$$x = (l - y)\ \mathrm{tg}\ \alpha;$$

$$P = \int_0^y p 2\pi x \frac{dy}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = 2\pi\gamma\,\mathrm{tg}^2\alpha \int_0^y (l - y)\ y\ dy;$$

$$P = \frac{\pi\gamma}{3}\mathrm{tg}^2\alpha(3l - 2y)y^2.$$

Rezultă:

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi x h \cos\alpha} = -\frac{\frac{\pi\gamma}{3}\mathrm{tg}^2\alpha(3l - 2y)y^2}{2\pi(l - y)\,\mathrm{tg}\,\alpha \cdot h \cos\alpha},$$

$$\sigma_1 = -\frac{\gamma \sin\alpha}{6h\cos^2\alpha} \cdot \frac{(3l - 2y)y^2}{l - y}.$$

Anulînd derivata $\frac{d\sigma_1}{dy} = 0$, rezultă că la $y = 0{,}579\ l$:

$$\sigma_{1\,max} = -0{,}244\,\frac{\gamma l^2 \sin\alpha}{h\cos^2\alpha}.$$

Deoarece:

$$\rho_1 = \infty;\quad \rho_2 = \frac{x}{\sin\varphi} = \frac{(l - y)\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{(l - y)\sin\alpha}{\cos^2\alpha},$$

din relaţia (17.1) se obţine:

$$\sigma_2 = \frac{p\rho_2}{h} = \frac{\gamma y}{h}\frac{(l - y)\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\gamma\sin\alpha}{h\cos^2\alpha}(l - y)y.$$

La

$$y = \frac{l}{2};\quad \sigma_{2\,max} = 0{,}25\,\frac{\gamma l^2 \sin\alpha}{h\cos^2\alpha}.$$

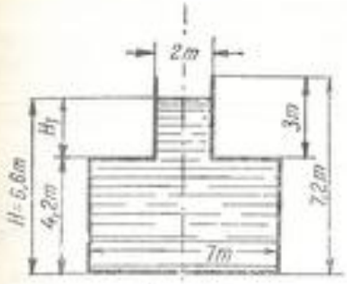


Fig. 17.11

În cazul aplicaţiei numerice, eforturile unitare sînt maxime la baza vasului, deoarece $H < 0{,}5l \cdot \mathrm{Cu}\ l = 3H$:

$$\sigma_{1H} = -\frac{7}{12}\frac{\gamma H^2}{h}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$= -\frac{7 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 400^2 \cdot 0{,}5}{12 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}75} = -83\ \mathrm{daN/cm^2},$$

$$\sigma_{2H} = 2\,\frac{\gamma H^2}{h}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{24}{7}\,83 = 284\ \mathrm{daN/cm^2}.$$

17.11. Un rezervor descoperit, alcătuit din doi cilindri avînd forma din figura 17.11, este umplut cu petrol pînă la înălţimea $H = 6{,}6$ m. Se dă greutatea specifică a petrolului $\gamma = 0{,}93$ daN/dm³. Să se determine grosimea necesară a tablei dacă $\sigma_a = 800$ daN/cm².

Rezolvare. În acest caz, pentru fiecare cilindru în parte, $\rho_1 = \infty$, deci formula (17.1) devine:

$$\frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h};$$

$$h = \frac{p\rho_2}{\sigma_a} = \frac{pd_2}{2\sigma_a}.$$

Presiunea maximă se exercită la partea inferioară a rezervorului de diametru $d = 7$ m.

$$p = \gamma H = 0{,}93 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}6 \cdot 10^3 = 0{,}612\ \mathrm{daN/cm^2},$$

$$h = \frac{0{,}612 \cdot 700}{2 \cdot 800} = 0{,}267\ \mathrm{cm} \simeq 0{,}27\ \mathrm{cm}.$$

Se observă că efortul unitar σ_1 este nul în porţiunea superioară a rezervorului, întrucît nu există forţe verticale.

În porţiunea inferioară (acolo unde diametrul este de 7 m), ia naştere un efort unitar σ_1, datorită întinderii rezervorului de către presiunea de jos în sus, exercitată asupra coroanei circulare orizontale.

Presiunea de jos în sus este:

$$p_1 = \gamma \cdot H_1 = 0{,}93 \cdot 10^{-3} \cdot (6{,}6 - 4{,}2) \cdot 10^3 = 0{,}223\ \mathrm{daN/cm^2}.$$

Forţa de întindere în partea inferioară a rezervorului este:

$$F = p_1\,\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 0{,}223 \cdot \frac{3{,}14(700^2 - 200^2)}{4} = 78\,500\ \mathrm{daN}.$$

Efortul unitar este:

$$\sigma_1 = \frac{F}{\pi D h}.$$

de unde rezultă al doilea calcul pentru h:

$$h = \frac{F}{\pi D \sigma_a} = \frac{78\,500}{3{,}14 \cdot 700 \cdot 800} = 0{,}45 \text{ cm} > 0{,}27 \text{ cm}.$$

În practică se folosește o grosime mai mare, din cauza îmbinărilor, a pericolului de coroziune etc.

17.12. Un rezervor cilindric suspendat, avînd fundul sferic, este umplut cu un lichid de greutate specifică γ. Să se determine eforturile unitare maxime σ_1 și σ_2 în porțiunea cilindrică și sferică, precum și efortul de compresiune în inelul mn (Fig. 17.12, *a*).

Rezolvare. 1) Eforturile unitare maxime ce se dezvoltă în porțiunea cilindrică se obțin în felul următor:

Pentru efortul unitar σ_2 se aplică formula generală (17.1) unde $\rho_1 = \infty$ și $\rho_2 = r$. Formula devine deci:

$$\sigma_2 = \frac{pr}{h} = \frac{\gamma H r}{h},$$

unde $p = \gamma H$ este presiunea la partea de jos a cilindrului.

Efortul unitar după generatoare se obține scriind ecuația de echilibru pe verticală, ținînd seama de forțele exterioare (greutatea lichidului din rezervor) și de forțele interioare:

$$G - 2\pi r h \sigma_1 = 0; \quad \sigma_1 = \frac{G}{2\pi r h}, \text{ unde } G = \left[\pi r^2 H + \pi\left(\frac{2}{3}R^3 - R^2 l + \frac{l^3}{3}\right)\right]\gamma.$$

2) În porțiunea sferică a rezervorului, eforturile unitare maxime sînt egale $\sigma_1 = \sigma_2$ și au valoarea:

$$\sigma = \frac{pR}{2h} = \frac{\gamma H_1 R}{2h}.$$

Dacă se izolează inelul mn (Fig. 17.12, *b*), asupra lui acționează două eforturi de întindere N și T (ambele se calculează raportîndu-le la unitatea de lungime a conturului)

$$N = \sigma_1 h = \frac{G}{2\pi r}; \quad T = \frac{N}{\sin\alpha} = \frac{G}{2\pi r \sin\alpha}.$$

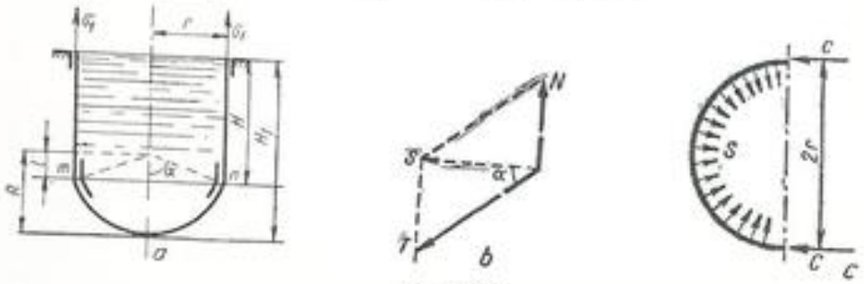


Fig. 17.12

Ele dau o rezultantă orizontală S dirijată către interiorul rezervorului (Fig. 17.12, *b*):

$$S = T \cos\alpha = \frac{G}{2\pi r} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Datorită acestor eforturi S, în inelul mn apar eforturile de compresiune C (Fig. 17.12, *c*), a căror valoare este dată de relația:

$$2C = S \cdot 2r,$$

de unde

$$C = S \cdot r = \frac{G}{2\pi} \operatorname{ctg} \alpha.$$

17.13. Să se calculeze eforturile unitare în partea emisferică a vasului cu pereți subțiri din figura 17.13, *a*, plin cu un lichid de greutate specifică γ.

Rezolvare. Din figura 17.13, *a* rezultă:

$$x = R \sin\theta; \; y = R(1 - \cos\theta);$$

$$dy = R \sin\theta \, d\theta.$$

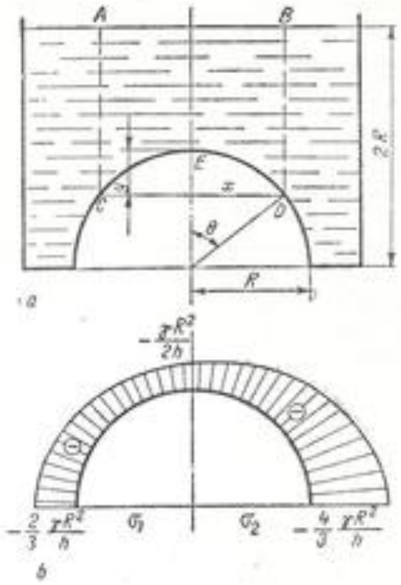


Fig. 17.13

Volumul calotei sferice CED este:

$$V_y = \int_0^y \pi x^2 dy = \pi R^3 \int_0^\theta \sin^3\theta \, d\theta = \frac{\pi R^3}{3}(\cos^3\theta - 3\cos\theta + 2).$$

Greutatea coloanei de lichid $ACEDB$ este:

$$P = \gamma\left[\pi x^2(2R - R\cos\theta) - \frac{\pi R^3}{3}(\cos^3\theta - 3\cos\theta + 2)\right],$$

$$P = \frac{2\pi}{3}\gamma R^3(1 - \cos\theta)(2 + 2\cos\theta - \cos^2\theta).$$

Rezultă, din relația (17.2):

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi x h \sin\theta} = -\frac{\frac{2\pi}{3}\gamma R^3(1 - \cos\theta)(2 + 2\cos\theta - \cos^2\theta)}{2\pi R h(1 - \cos^2\theta)},$$

$$\sigma_1 = -\frac{\gamma R^2}{3h}\,\frac{2 + 2\cos\theta - \cos^2\theta}{1 + \cos\theta}.$$

La nivelul CD: $p = -\gamma(2R - R\cos\theta)$.

Din relaţia (17.1):

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{R} = -\frac{\gamma R}{h}(2 - \cos\theta).$$

Înlocuind pe σ_1, se obţine:

$$\sigma_2 = -\frac{\gamma R^2}{3h}\,\frac{4 + \cos\theta - 2\cos^2\theta}{1 + \cos\theta}.$$

În figura 17.13, *b* sînt date diagramele de variaţie a eforturilor unitare σ_1 şi σ_2.

17.14. Să se calculeze eforturile unitare într-un vas cu pereţi subţiri suspendat, de forma unui paraboloid, plin cu lichid de greutate specifică γ (Fig. 17.14).

Rezolvare. În sistemul de axe Oxy (Fig. 17.14), ecuaţia generatoarei este:

$$y = \frac{b}{a^2}x^2.$$

Volumul părţii inferioare a vasului pînă la cota y este:

$$V = \int_0^y \pi x^2\,dy = \frac{\pi a^2}{2b}y^2.$$

Greutatea volumului de lichid $ACODB$ este:

$$P = \gamma\left[\frac{\pi a^2}{2b}y^2 + \pi x^2(b - y)\right] = \gamma\frac{\pi a^2}{2b}y(2b - y);$$

$$\sin\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}} = 2\sqrt{by}(a^2 + 4by)^{-1/2};$$

$$\rho_2 = \frac{x}{\sin\theta} = \frac{a}{2b}(a^2 + 4by)^{1/2}.$$

Neglijînd presiunea atmosferică pe suprafaţa lichidului:

$$\sigma_1 = \frac{P}{2\pi x h\sin\theta} = \frac{\gamma\frac{\pi a^2}{2b}y(2b - y)}{2\pi a\sqrt{\frac{y}{b}}\,h2\sqrt{by}(a^2 + 4by)^{-1/2}} = \frac{\gamma a}{8bh}(2b - y)(a^2 + 4by)^{1/2}.$$

Anulînd derivata:

$$\frac{d\sigma_1}{dy} = \frac{\gamma a}{8hb}\left[-\sqrt{a^2 + 4by} + (2b - y)\frac{2b}{\sqrt{a^2 + 4by}}\right] = 0,$$

rezultă că la $y = \frac{b}{6}\left(4 - \frac{a^2}{b^2}\right)$ se obţine:

$$\sigma_{1\,max} = \frac{\gamma a}{48\sqrt{3}\,b^2h}(8b^2 + a^2)^{3/2}.$$

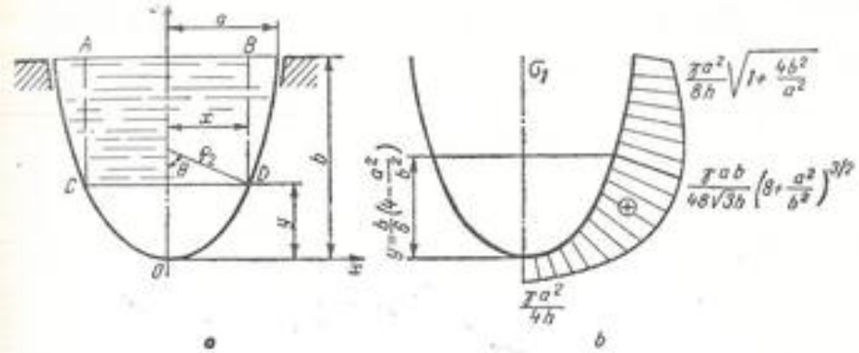


Fig. 17.14, *a*, *b*

În figura 17.14, *b* este dată diagrama de variaţie a lui σ_1 pe generatoare.

Raza de curbură ρ_1 se determină cu relaţia:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\frac{2b}{a^2}}{\left(1 + \frac{4b^2}{a^4}x^2\right)^{3/2}},$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2ba}(a^2 + 4by)^{3/2}.$$

Din relaţia (17.1), înlocuind şi $p = \gamma(b - y)$ rezultă:

$$\sigma_2 = \rho_2\left(\frac{p}{h} - \frac{\sigma_1}{\rho_1}\right) = \frac{a}{2b}(a^2 + 4by)^{1/2}\left[\frac{\gamma(b - y)}{h} - \frac{\frac{\gamma a}{8bh}(2b - y)(a^2 + 4by)^{1/2}}{\frac{1}{2ba}(a^2 + 4by)^{3/2}}\right],$$

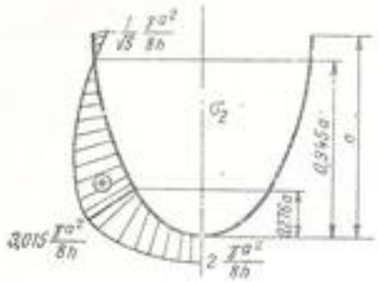
$$\sigma_2 = \frac{\gamma a}{8bh}[2a^2b + (16b^2 - 3a^2)y - 16by^2](a^2 + 4by)^{-1/2},$$

$$\text{la: } y = 0;\ \sigma_2 = \frac{\gamma a^2}{4h},$$

$$\text{la: } y = b;\ \sigma_2 = -\frac{\gamma a^2}{8h}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4b^2}{a^2}}}.$$

Pentru cazul particular $a = b$:

$$\sigma_2 = \frac{\gamma\sqrt{a}}{8h}\,\frac{2a^2 + 13ay - 16y^2}{\sqrt{a + 4y}}$$



c

Fig. 17.14, c

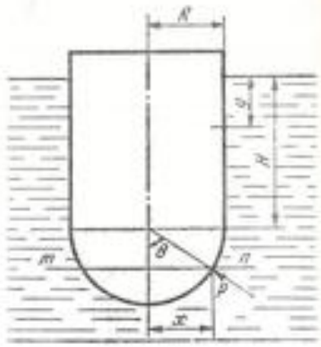


Fig. 17.15

Anulînd derivata $\frac{d\sigma_2}{dy} = 0$, rezultă că la $y = 0{,}276\ a$ efortul unitar σ_2 are un maxim:

$$\sigma_{2\,max} = 3{,}015\,\frac{\gamma a^2}{8h}.$$

Efortul unitar $\sigma_2 = 0$ pentru $y = 0{,}945\ a$.

În figura 17.14, *c* este dată diagrama de variaţie a lui σ_2, pentru acest caz particular.

17.15. Un vas cu pereţi subţiri format dintr-o parte cilindrică şi una emisferică (Fig. 17.15) este ţinut cufundat într-un lichid de greutate specifică γ. Să se determine eforturile unitare din vas.

Rezolvare. Se va nota $\frac{H}{R} = \lambda$.

1) Pentru partea emisferică, la nivelul *mn*:

$$p = \gamma(H + R\cos\theta) = \gamma R(\lambda + \cos\theta); \quad x = R\sin\theta.$$

Rezultanta forţelor de presiune pe calota sferică limitată de paralela la *mn* este:

$$P = \int_0^\theta p\,2\pi x R\,d\theta\cos\theta = \int_0^\theta \gamma R(\lambda + \cos\theta)\,2\pi R^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta,$$

$$P = \frac{\gamma\pi R^3}{3}(1 - \cos\theta)[(3\lambda + 2)(1 + \cos\theta) + 2\cos^2\theta],$$

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi x h\sin\theta} = -\frac{\frac{\gamma\pi R^3}{3}(1 - \cos\theta)[(3\lambda + 2)(1 + \cos\theta) + 2\cos^2\theta]}{2\pi h R\sin^2\theta},$$

$$\sigma_1 = -\frac{\gamma R^2}{6h}\,\frac{(3\lambda + 2)(1 + \cos\theta) + 2\cos^2\theta}{1 + \cos\theta}.$$

La: $\theta = 0$; $\sigma_1 = -\frac{\gamma R^2}{2h}(\lambda + 1)$. La: $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\sigma_1 = -\frac{\gamma R^2}{2h}\left(\lambda + \frac{2}{3}\right)$.

Din relaţia (17.1) rezultă:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{R} = -\frac{\gamma R(\lambda + \cos\theta)}{h},$$

$$\sigma_2 = -\frac{\gamma R^2}{h}(\lambda + \cos\theta) + \frac{\gamma R^2}{6h}\,\frac{(3\lambda + 2)(1 + \cos\theta) + 2\cos^2\theta}{1 + \cos\theta} =$$

$$= -\frac{\gamma R^2}{6h}\,\frac{4\cos^2\theta + (3\lambda + 4)\cos\theta + 3\lambda - 2}{1 + \cos\theta}.$$

Pentru $\theta = 0$; $\sigma_2 = -\frac{\gamma R^2}{2h}(\lambda + 1)$,

iar pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\sigma_2 = -\frac{\gamma R^2}{2h}\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)$.

2) Pentru partea cilindrică:

$$\sigma_1 = -\frac{\gamma R^2}{2h}\left(\lambda + \frac{2}{3}\right) = \text{const.}$$

Deoarece $\rho_1 = \infty$; $\rho_2 = R$, din relaţia (17.2) rezultă:

$$\sigma_2 = \frac{pR}{h} = \gamma\frac{R}{h}y.$$

17.16. Să se determine eforturile unitare într-un înveliş sferic cu pereţi subţiri, de greutate specifică γ, care se roteşte în jurul unei axe verticale cu viteză unghiulară constantă ω (Fig. 17.16). Care este volumul vasului după deformaţie?

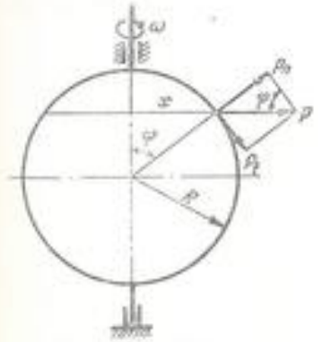


Fig. 17.16

Rezolvare.

$$p = \frac{\gamma}{g}hx\omega^2,$$

unde h este grosimea peretelui,

$$x = R\sin\varphi;$$

$$p_n = p\sin\varphi = \frac{\gamma}{g}hR\omega^2\sin^2\varphi;$$

$$\sigma_1 = 0;$$

$$\sigma_2 = \frac{p_n R}{h} = \frac{\gamma}{g}\omega^2R^2\sin^2\varphi.$$

Deformaţiile specifice pe direcţiile paralelului şi meridianului sînt:

$$\varepsilon_1 = -\mu\frac{\sigma_2}{E}\ ;\ \ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E}.$$

Deformaţia volumică specifică este aproximativ:

$$\varepsilon_v = 2\varepsilon_2 + \varepsilon_1 = \frac{2-\mu}{E}\sigma_2 = \frac{2-\mu}{E}\frac{\gamma}{g}\omega^2R^2\sin^2\varphi,$$

$$V = \int_0^\pi \pi x^2 \sin\varphi\, R\,d\varphi = \pi R^3\int_0^\pi \sin^3\varphi\, d\varphi,$$

$$\Delta V = \varepsilon_v V = \frac{\gamma}{g}\frac{2-\mu}{E}\omega^2\pi R^5\int_0^\pi \sin^3\varphi\, d\varphi = \frac{16}{15}\frac{\gamma}{g}\frac{2-\mu}{E}\omega^2\pi R^5.$$

Volumul vasului după deformaţie va fi:

$$V_1 = V_0 + \Delta V = \frac{4}{3}\pi R^3\left[1 + \frac{4}{5}\frac{2-\mu}{E}\frac{\gamma}{g}R^2\omega^2\right].$$

17.17. Se dă o bară absolut rigidă şi o ţeavă subţire elastică, al cărei diametru interior e mai mic cu 2Δ decît diametrul barei. Ţeava e încălzită şi introdusă pe bară (Fig. 17.17, *a*). La răcire, în ţeavă apar eforturi unitare circumferenţiale, iar în prezenţa frecării — eforturi unitare axiale. Să se determine mărimea şi legea de distribuţie a eforturilor unitare în ţeavă.

Rezolvare. Notînd cu p presiunea de contact şi cu N forţa axială din ţeavă:

$$\sigma_1 = \frac{N}{2\pi Rh}\ ;\ \ \sigma_2 = \frac{pR}{h},$$

unde h este grosimea peretelui ţevii. Deformaţia specifică radială:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta}{R} = \frac{1}{Eh}(\sigma_2 - \mu\sigma_1) = \frac{1}{Eh}\left(pR - \mu\frac{N}{2\pi R}\right).$$

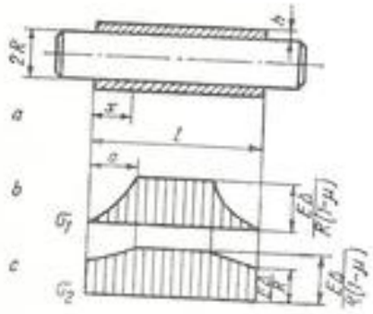


Fig. 17.17

Într-o secţiune x, forţa axială este:

$$N = \int_0^x fp2\pi R\,dx,$$

unde f este coeficientul de frecare.

Rezultă:

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{1}{Eh}\left(pR - \mu f\int_0^x p\,dx\right).$$

Derivînd în raport cu x:

$$0 = \frac{dp}{dx} - \frac{\mu f}{R}p.$$

De unde:

$$p = p_0 e^{\frac{\mu f}{R}x}.$$

Constanta p_0 reprezintă presiunea de contact la capătul ţevii:

$$p_0 = \frac{Eh}{R^2}\Delta.$$

Rezultă:

$$p = \frac{Eh\Delta}{R^2}e^{\frac{\mu f}{R}x}\ ;\ \ \sigma_2 = \frac{E\Delta}{R}e^{\frac{\mu f}{R}x}\ ;$$

$$N = \frac{2\pi Eh\Delta}{\mu}\left(e^{\frac{\mu f}{R}x} - 1\right);\ \ \sigma_1 = \frac{E\Delta}{R\mu}\left(e^{\frac{\mu f}{R}x} - 1\right);$$

astfel că eforturile unitare cresc de la capătul spre mijlocul ţevii. Această creştere este întreruptă în secţiunea a în care deformaţia axială datorită eforturilor unitare σ_1 şi σ_2 devine egală cu deformaţia axială iniţială a ţevii, care este tot $\frac{\Delta}{R}$ ca şi cea radială:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) = \frac{\Delta}{\mu R}\left[(1-\mu^2)e^{\frac{\mu f}{R}x} - 1\right].$$

La $x = a$; $\varepsilon_1 = \frac{\Delta}{R}$, rezultă: $a = \frac{R}{\mu f}\ln\frac{1}{1-\mu}$.

Pentru $x > a$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\Delta}{R} = \text{const.}$ şi avem:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{E\Delta}{R(1-\mu)}.$$

În figurile 17.17, *b* şi 17.17, *c* sînt date diagramele de variaţie ale eforturilor unitare σ_1 şi σ_2 în lungul ţevii.

17.18. Să se calculeze eforturile unitare maxime în pereţii rezervorului din figura 17.18 plin cu lichid de greutate specifică $\gamma = 9$ kN/m³. Se dau: $h = 4$ mm; $R = 4$ m. Să se facă verificarea după teoria a III-a de rezistenţă, dacă $\sigma_a = 1\,000$ daN/cm².

Rezolvare. La adîncimea y:

$$p = \gamma y = \gamma R\sin\theta;$$

$$x = R\cos\theta.$$

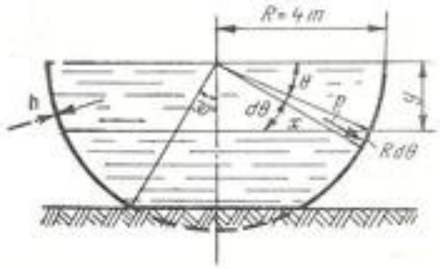


Fig. 17.18

$$P = \int_0^\theta p \cdot 2\pi x \cdot R d\theta \cdot \sin\theta = 2\pi\gamma R^2 \int_0^\theta \sin^2\theta \cos\theta d\theta = \frac{2}{3}\gamma\pi R^3 \sin^3\theta,$$

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi x h \cos\theta} = \frac{-\frac{2}{3}\gamma\pi R^3 \sin^3\theta}{2\pi R h \cos^2\theta} = -\frac{\gamma R^2}{3h}\sin\theta \operatorname{tg}^2\theta.$$

Din relaţia (17.1) rezultă:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{R} = \frac{\gamma R \sin\theta}{h},$$

$$\sigma_2 = \frac{\gamma R^2 \sin\theta}{h} + \frac{\gamma R^2}{3h}\sin\theta \operatorname{tg}^2\theta = \frac{\gamma R^2}{3h}\sin\theta(3 + \operatorname{tg}^2\theta).$$

Efortul unitar echivalent, după teoria a 3-a de rezistenţă, este dat de relaţia:

$$\sigma_{ech3} = \sigma_2 - \sigma_1 = \frac{\gamma R^2}{3h}\sin\theta(3 + 2\operatorname{tg}^2\theta).$$

La $\theta = 60°$:

$$\sigma_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\gamma R^2}{h} = -0{,}866\frac{0{,}9 \cdot 10^{-4} \cdot 16 \cdot 10^4}{0{,}4} = -312 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \sqrt{3}\frac{\gamma R^2}{h} = 1{,}73\frac{0{,}9 \cdot 10^{-4} \cdot 16 \cdot 10^4}{0{,}4} = 623 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{ech3} = \sigma_2 - \sigma_1 = 935 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

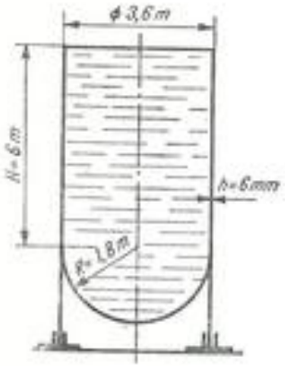


Fig. 17.19

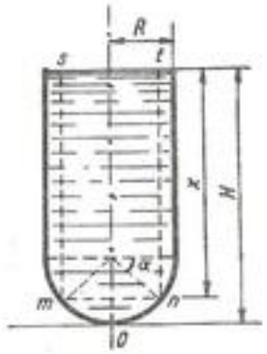


Fig. 17.20

C. PROBLEME NEREZOLVATE

17.19. Un rezervor cilindric de diametru $2R = 3{,}6$ m, cu fundul de formă emisferică, este plin cu apă pînă la cota $H = 6$ m (Fig. 17.19). Grosimea pereţilor este $h = 6$ mm. Să se determine efortul unitar maxim din partea cilindrică şi din cea sferică a rezervorului.

Răspuns:

$$\sigma_{max\ cil} = 144 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{max\ sf} = 93{,}6 \text{ daN/cm}^2.$$

17.20. Să se determine eforturile unitare în punctele *mn* ale rezervorului cilindric cu fundul emisferic, plin cu un lichid de greutate specifică γ (Fig. 17.20).

Răspuns. $\sigma_1 = \frac{\gamma R}{h}\left(\frac{H - R}{2} + \frac{R}{3}\frac{1 - \sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}\right),$

$$\sigma_2 = \frac{\gamma R}{h}\left(\frac{H - R}{2} + \frac{R}{3}\frac{\sin^3\alpha + 3\sin\alpha\cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha}\right).$$

CAPITOLUL 18

INCOVOIEREA ŞI RĂSUCIREA PROFILELOR SUBŢIRI

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. Spre deosebire de barele ale căror secţiuni au toate dimensiunile de acelaşi ordin de mărime, barele ale căror secţiuni sînt profile subţiri au grosimea mică faţă de dimensiunile generale ale secţiunii transversale.

Ca axe de coordonate se consideră axa x în lungul barei, iar axele y şi z în planul secţiunii transversale prin bară. Ca axe y şi z se iau axele principale centrale ale secţiunii. Aceste condiţii se pot scrie:

$$\int y \mathrm{d}A = 0 \tag{18.1}$$

$$\int z \mathrm{d}A = 0 \tag{18.2}$$

$$\int zy \mathrm{d}A = 0. \tag{18.3}$$

2. În calculul eforturilor unitare intervin următoarele caracteristici ale secţiunii:

Suprafaţa sector, care este dublul suprafeţei descrise de o rază vectoare care are originea într-un punct fix, iar vîrful parcurge linia mediană a profilului. Suprafaţa sector se notează cu ω.

Momentul de inerţie sectorial, definit de expresia:

$$I_\omega = \int \omega^2 \mathrm{d}A. \tag{18.4}$$

Momentul static sectorial, definit de expresia:

$$S_\omega = \int \omega \mathrm{d}A. \tag{18.5}$$

Momentul de inerţie polar echivalent I_d, care reprezintă raportul dintre rigiditatea la răsucire a barei şi modulul de elasticitate transversal G. Funcţie de datele secţiunii, I_d se poate scrie:

$$I_d = \frac{1}{3} \Sigma b \delta^3. \tag{18.6}$$

Suma se extinde la toate suprafeţele dreptunghiulare în care se poate descompune secţiunea. Lungimea unui astfel de element s-a notat cu b şi lăţimea lui cu δ.

3. Expresiile eforturilor unitare şi ale deformaţiilor se simplifică în cazul în care:

a) polul faţă de care se calculează suprafaţa sector satisface relaţiile

$$\int \omega z \mathrm{d}A = 0, \tag{18.7}$$

$$\int \omega y \mathrm{d}A = 0; \tag{18.8}$$

b) direcţia razei vectoare origine este astfel aleasă, încît pentru toată secţiunea să se obţină:

$$\int \omega \mathrm{d}A = 0. \tag{18.9}$$

4. Polul determinat de condiţiile (18.7) şi (18.8) se numeşte centru de încovoiere şi are proprietatea că dacă o forţă transversală care solicită bara este astfel dirijată, încît linia ei de acţiune trece prin acest punct, această forţă produce numai o încovoiere a barei. În caz contrar, se produce şi o răsucire.

Centrul de încovoiere se determină în modul următor.

Se alege pentru determinarea suprafeţelor sector un pol arbitrar B de coordonate b_z şi b_y.

Coordonatele centrului de încovoiere vor fi date în acest caz de relaţiile:

$$a_z = b_z + \frac{\int \omega_B y \mathrm{d}A}{I_z}, \tag{18.10}$$

$$a_y = b_y - \frac{\int \omega_B z \mathrm{d}A}{I_y}, \tag{18.11}$$

în care ω_B reprezintă suprafaţa sector luată faţă de acest pol arbitrar ales.

5. În cele ce urmează se presupun satisfăcute condiţiile (18.1), (18.2), (18.3), (18.7), (18.8) şi (18.9).

6. În cazul barelor *libere cu secţiune deschisă*, solicitate la răsucire, se produc numai eforturi unitare tangenţiale. Determinarea acestora se face pe calea obişnuită, cunoscută de la răsucirea barelor de secţiune oarecare.

Secţiunea plană şi perpendiculară pe axa barei înainte de deformaţie nu mai rămîne plană şi perpendiculară pe axa barei după deformaţie, iar deplasarea în direcţia axei x faţă de secţiunea plană este dată de relaţia:

$$u = \varphi' \omega, \tag{18.12}$$

în care: $\varphi' = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$, iar φ este unghiul de răsucire.

7. În cazul barelor avînd ca secţiune profile subţiri deschise la care deplanarea este împiedicată, se produc în urma solicitării la răsucire eforturi unitare normale şi eforturi unitare tangenţiale suplimentare.

În cazul unei solicitări oarecare, dacă condiţiile de la punctul 5 sînt satisfăcute, expresiile eforturilor unitare sînt următoarele:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B}{I_\omega} \omega, \tag{18.13}$$

$$\tau = \frac{T_y S_z}{I_z \delta} + \frac{T_z S_y}{I_y \delta} + \frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega \delta} + \frac{M_t \delta}{I_d}. \tag{18.14}$$

În aceste expresii, N, A, M_z ... au semnificaţiile obişnuite în domeniul rezistenţei materialelor; I_ω, S_ω, ω sînt, respectiv, momentul de inerţie sectorial, momentul static sectorial şi suprafaţa sectorială care au fost definite la paragraful 2, iar B este bimomentul de încovoiere-răsucire care introduce efectul eforturilor unitare normale suplimentare produse din cauza răsucirii. Expresia bimomentului este:

$$B = \int \sigma_x \omega \, dA. \tag{18.15}$$

Derivînd bimomentul în raport cu x, se obţine momentul de încovoiere-răsucire:

$$M_\omega = \frac{dB}{dx}. \tag{18.16}$$

Expresia momentului de încovoiere-răsucire, funcţie de eforturile unitare,

$$M_\omega = \int \tau \, \delta \, dA. \tag{18.17}$$

După cum se vede, acest moment se poate interpreta ca fiind momentul tuturor forţelor luat faţă de centrul de încovoiere al secţiunii.

Ultimul termen din expresia (18.13) scoate în evidenţă împiedicarea deplanării din cauza răsucirii barelor subţiri. Ultimii doi termeni din relaţia (18.14) sînt zero în cazul cînd toate forţele trec prin centrul de încovoiere al secţiunii barei şi nu există momente de răsucire M aplicate exterior.

Efortul unitar tangenţial exprimat de ultimul termen din relaţia (18.14) se datoreşte răsucirii libere. Acesta variază liniar pe grosimea δ a profilului şi expresia dată reprezintă valoarea lui maximă, în apropierea conturului. Ceilalţi trei termeni din expresia (18.14) reprezintă eforturi unitare tangenţiale, constante pe grosimea δ a profilului şi se datoresc forfecării şi efectului de împiedicare a deplanării produs de răsucirea împiedicată.

Momentul de răsucire total care se aplică secţiunii este:

$$M_x = M_\omega + M_t. \tag{18.18}$$

8. Ecuaţia diferenţială a răsucirii barelor cu pereţi subţiri este:

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = -\frac{m}{EI_\omega}, \tag{18.19}$$

unde:

$$I_\omega = \int \omega^2 \, dA, \tag{18.20}$$

$$k = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_\omega}}, \tag{18.21}$$

iar $m = \frac{dM_x}{dx}$ reprezintă intensitatea momentului exterior de răsucire repartizat în lungul axei x.

Soluţia ecuaţiei (18.19) este:

$$\varphi_x = \varphi_0 + \varphi_0' \frac{\operatorname{sh} kx}{k} + \frac{B_0}{GI_d}(1 - \operatorname{ch} kx) + \frac{M_{x0}}{kGI_d}(kx - \operatorname{sh} kx) + \\ + \frac{1}{kGI_d}\int_0^x [k(x-t) - \operatorname{sh} k(x-t)] \, m(t) \, dt. \tag{18.22}$$

Derivata acestei relaţii este:

$$\varphi_x' = \varphi_0' \operatorname{ch} kx - \frac{B_0}{GI_d} k \operatorname{sh} kx + \frac{M_{x0}}{GI_d}(1 - \operatorname{ch} kx) + \\ + \frac{1}{GI_d}\int_0^x [1 - \operatorname{ch} k(1-t)] \, m(t) \, dt. \tag{18.23}$$

Între momentul total de răsucire şi derivatele unghiului de răsucire φ, există relaţia:

$$M_x = -EI_\omega \varphi''' + GI_d \varphi'. \tag{18.24}$$

Între bimoment şi φ există relaţia:

$$B = -EI_\omega \varphi''. \tag{18.25}$$

Înlocuind în relaţiile (18.24) şi (18.25) expresia lui φ din (18.22) se obţine:

$$B_x = -\frac{\varphi_0' GI_d}{k} \operatorname{sh} kx + B_0 \operatorname{ch} kx + \frac{M_{x0}}{k} \operatorname{sh} kx + \frac{1}{k}\int^x \operatorname{sh} k(x-t) \, m(t) \, dt; \tag{18.26}$$

$$M_x = \int_0^x m(t) \, dt. \tag{18.27}$$

Cunoscînd parametrii φ_0, φ_0', B_0 şi M_0 într-un punct luat ca origine, se pot scrie, cu ajutorul relaţiilor (18.26) şi (18.27), expresiile bimomentului şi momentului de încovoiere-răsucire în oricare secţiune a barei. Condiţiile de deformaţie sînt suficiente pentru determinarea acestor parametri.

9. Deoarece în problemele barelor cu pereţi subţiri intervin integrale din produse de două funcţii, dintre care una liniară, respectiv intervin produse

de diagrame, calculele se pot simplifica utilizînd regula lui Vereşceaghin de înmulţire a diagramelor.

Această regulă se poate enunţa în felul următor: pentru a înmulţi între ele două diagrame dintre care una liniară, se înmulţeşte suprafaţa primei diagrame cu ordonata diagramei liniare în dreptul centrului de greutate al primei diagrame.

10. Pentru secţiuni care au o axă de simetrie şi se pot descompune în elemente pentru care se cunosc principalele caracteristici sectoriale, calculul centrului de încovoiere şi calculul momentului de inerţie sectorial se pot face direct, în modul următor.

Presupunînd că axa Oy este o axă de simetrie, se ia axa Oz în mod arbitrar, perpendicular pe aceasta. Se calculează momentele de inerţie pentru fiecare element în parte, faţă de axa de simetrie, I_{y1}, I_{y2} ... Se calculează poziţia centrului de încovoiere a_{y1}, a_{y2} ... al fiecărui element în parte, faţă de axa Oz arbitrar aleasă. Se calculează, de asemenea, momentele de inerţie sectoriale ale fiecărui element în parte I_{ω_1}, I_{ω_2}, ... faţă de centrul lui de încovoiere.

Ordonata centrului de încovoiere al întregii secţiuni va fi:

$$a_y = \frac{\Sigma I_{yi} a_{yi}}{\Sigma I_{yi}}, \tag{18.28}$$

iar momentul de inerţie sectorial al întregii secţiuni este:

$$I_\omega = \Sigma I_{\omega i} + \frac{\Sigma I_{yi} I_{yj} a_{yij}^2}{\Sigma I_{yi}}; \quad i \neq j. \tag{18.29}$$

Suma de la numărătorul ultimului termen este extinsă la toate combinaţiile posibile de cîte două momente de inerţie ale elementelor considerate, iar a_{yij} reprezintă distanţa între centrele de încovoiere ale perechilor respective.

B. PROBLEME REZOLVATE

18.1. Să se calculeze suprafaţa sector pentru un profil I.

Aplicaţie numerică: se dă un profil I 20, schematizat ca în figura 18.1, *a*, la care:

$$b_1 = 90 \text{ mm}; \qquad \delta_1 = 11{,}3 \text{ mm};$$
$$b_2 = 177{,}4 \text{ mm}; \qquad \delta_2 = 7{,}5 \text{ mm};$$
$$h = 188{,}7 \text{ mm}.$$

Rezolvare. Profilul avînd două axe de simetrie, centrul de încovoiere se va găsi la intersecţia lor.

Raza vectoare origine coincide cu axa Oy. Dacă se pleacă de la această rază vectoare origine şi se roteşte, avînd ca punct fix centrul de încovoiere, fiecărui punct al liniei mediane îi corespunde o suprafaţă sector.

Se construieşte astfel diagrama suprafeţelor sector din figura 18.1, *b*. Se observă că suprafaţa sector corespunzătoare inimii profilului are valoarea nulă.

Valoarea maximă a suprafeţei sector este în punctul B şi mărimea acesteia este dublul suprafeţei triunghiului OAB, adică:

$$\omega = \frac{h}{2} \cdot \frac{b_1}{2} = \frac{hb_1}{4}.$$

Valoarea numerică este:

$$\omega = 9{,}435 \cdot 4{,}5 = 42{,}4 \text{ cm}^2.$$

18.2. Să se construiască diagrama momentelor statice sectoriale pentru profilul din figura 18.1, *a*.

Rezolvare. Momentul static sectorial, necesar pentru a determina legea de variaţie a eforturilor unitare tangenţiale suplimentare, produse ca urmare a împiedicării deplanării, va trebui să se refere la suprafaţa sector care satisface condiţiile (18.7) — (18.9). Calculul se face pornind de la extremităţile profilului, unde, datorită condiţiilor la limită, efortul unitar tangenţial trebuie să fie nul. Diagrama obţinută este o parabolă (Fig. 18.2), valoarea maximă fiind în punctul A, unde are ca mărime suprafaţa triunghiului diagramei ω înmulţită cu grosimea medie a tălpii profilului:

$$S_{\omega max} = \delta_1 \frac{b_1}{2} \cdot \frac{b_1 h}{4} \cdot \frac{1}{2} = \delta_1 \frac{h_2 b_1^2}{16}.$$

Numeric:

$$S_{\omega max} = 1{,}13 \frac{18{,}87 \cdot 9^2}{16} = 107{,}8 \text{ cm}^4.$$

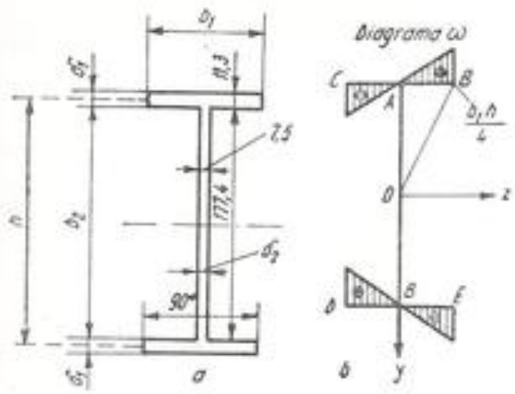


Fig. 18.1 Fig. 18.2

18.3. Să se calculeze momentul de inerţie sectorial pentru profilul din figura 18.1, *a*.

Rezolvare. Momentul de inerţie sectorial este dat de expresia (18.4). Calculul se face pornind de la diagrama suprafeţei sector trasată în figura 18.1, *b*. Se va aplica metoda lui *Vereşceaghin* de integrare directă a unui produs de două diagrame, respectiv diagrama ω şi diagrama ω înmulţită cu grosimea δ.

Se va obţine astfel:

$$I_\omega = \int \omega^2 dA = 4\delta_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1}{2} \cdot \frac{b_1 h}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{b_1 h}{4} = \frac{\delta_1 h^2 b_1^3}{24},$$

sau numeric:

$$I_\omega = \frac{18{,}87^2 \cdot 9^3 \cdot 1{,}13}{24} = 12\,250 \text{ cm}^6.$$

Aplicînd regula dată de relaţia (18.29), se obţine:

$$I_\omega = \frac{\left(\frac{\delta_1 b_1^3}{12}\right)^2 h^2}{2\frac{\delta_1 b_1^3}{12}} = \frac{\delta_1 h^2 b_1^3}{24}.$$

Se observă că rezultatele obţinute prin cele două metode coincid.

18.4. Să se calculeze eforturile unitare normale maxime care se produc într-o bară de oţel rezemată la capete şi încărcată cu o sarcină uniform repartizată excentric p, ca în figura 18.4. Secţiunea transversală este cea dată în figura 18.1, *a*.

Aplicaţie numerică. Sarcina uniform repartizată $p = 600$ daN/m; excentricitatea $e = 4{,}5$ cm; deschiderea barei $l = 5$ m.

Rezolvare. Spre a se calcula expresia bimomentului în lungul barei se foloseşte relaţia (18.26). Rămîne să se determine parametrii φ_0, φ_0', B_0 şi M_{x0} în funcţie de condiţiile la limită din cazul problemei.

Se observă că dacă se ia ca origine unul dintre reazeme, rotirea în planul $y0z$ este nulă, respectiv $\varphi_0 = 0$. Momentul de răsucire din reazem este $\frac{p \cdot le}{2} = M_{x0}$. Deoarece secţiunea de pe reazem este liberă să se rotească în planul $z0x$, avem $B_0 = 0$. Singura necunoscută care a rămas este φ_0'. Pentru a se determina, se va pune condiţia de pe celălalt reazem, $\varphi_l = 0$.

Utilizînd relaţiie (18.22) în care se face $x = l$ şi efectuînd integrala se obţine:

$$\varphi_l = \varphi_0' \frac{\text{sh } kl}{k} - \frac{pel}{2} \frac{1}{kGI_d} (kl - \text{sh } kl) + \frac{pe}{k^3 GI_d}\left[\frac{(kl)^2}{2} + 1 - \text{ch } kl\right] = 0,$$

de unde:

$$\varphi_0' = -\frac{pe}{k^3 EI_\omega}\left(\frac{kl}{2} - \frac{\text{sh}\frac{kl}{2}}{\text{ch}\frac{kl}{2}}\right).$$

Odată cunoscute toate constantele, utilizînd relaţia (18.26), se poate scrie expresia bimomentului:

$$B_x = \frac{peGI_d}{k^3 EI_\omega k}\left(\frac{kl}{2} - \frac{\text{sh}\frac{kl}{2}}{\text{ch}\frac{kl}{2}}\right)\text{sh } kx - \frac{pel}{2}\frac{\text{sh } kx}{k} + \frac{pe}{k^2}(\text{ch } kx - 1),$$

sau după simplificare:

$$B_x = \frac{pe}{k^2}(\text{ch } kx - 1) - \frac{p}{k^3}\text{sh } kx \frac{\text{sh}\frac{kl}{2}}{\text{ch}\frac{kl}{2}},$$

şi deoarece:

$$\text{ch } kx \,\text{ch}\frac{kl}{2} - \text{sh } kx \,\text{sh}\frac{kl}{2} = \text{ch } k\left(\frac{l}{2} - x\right),$$

se obţine:

$$B_x = -\frac{pe}{k^2}\left[1 - \frac{\text{ch}k\left(\frac{l}{2} - x\right)}{\text{ch}\frac{kl}{2}}\right].$$

Valoarea maximă a acestei expresii este:

$$B_{x\,max} = -\frac{pe}{k^2}\left[1 - \frac{1}{\text{ch}\frac{kl}{2}}\right] \text{pentru } x = \frac{l}{2}.$$

Momentul încovoietor este maxim la mijlocul barei şi are expresia

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8}.$$

Efortul unitar normal este maxim în secţiunea de la mijloc, în una din perechile de puncte CD sau BE (Fig. 18.1, *b*), după sensul bimomentului.

Expresia lui este:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_z} y_{max} + \frac{B_{max}}{I_\omega}\omega_{max}.$$

Valoarea momentului de inerţie polar echivalent, considerînd profilul cu pereţi subţiri, cu notaţiile din figura 18.1, *b* şi valorile din figura 18.1, *a* este:

$$I_d = \frac{1}{3}(2b_1\delta_1^3 + b_2\delta_2^3) = \frac{1}{3}(2 \cdot 9 \cdot 1{,}13^3 + 17{,}74 \cdot 0{,}75^3) = 11{,}15 \text{ cm}^4.$$

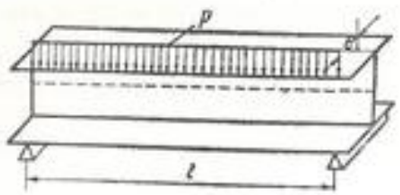


Fig. 18.4

Valoarea lui k din expresia bimomentului B este:

$$k = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_\omega}} = \sqrt{\frac{0{,}81 \cdot 10^6 \cdot 11{,}15}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 1{,}225 \cdot 10^6}} = 0{,}01875 \text{ cm}^{-1}.$$

Valoarea momentului de inerţie sectorial a fost calculată la problema 18.3. Bimomentul maxim va fi deci:

$$B_{max} = \frac{6 \cdot 4{,}5}{0{,}01875^3}\left(1 - \frac{1}{\text{ch } 4{,}68}\right) = \frac{6 \cdot 4{,}5}{0{,}01875^3}\left(1 - \frac{1}{53{,}88}\right) = 75\,500 \text{ daNcm}^2.$$

Momentul încovoietor maxim este:

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{6 \cdot 500^2}{8} = 187\,500 \text{ daN cm}.$$

Momentul de inerţie este:

$$I_x = \frac{\delta_1 b_1^3}{12} + 2\left[\frac{b_1 \delta_1^3}{12} + b_1\delta_1\left(\frac{b_2}{2} + \frac{\delta_1}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{0{,}75 \cdot 17{,}74^3}{12} + 2\left[\frac{9 \cdot 1{,}13^3}{12} + 9 \cdot 1{,}13 \cdot 9{,}43^2\right] = 2\,166 \text{ cm}^4,$$

iar modulul de rezistenţă:

$$W_x = \frac{2\,166}{10} = 216{,}6 \text{ cm}^3.$$

Suprafaţa sector maximă din punctul B (Fig. 18.1, b) este:

$$\omega_{max} = 42{,}4 \text{ cm}^2,$$

astfel încît efortul unitar normal maxim în punctul B va fi:

$$\sigma_{max} = \frac{187\,500}{216{,}6} + \frac{75\,500}{12\,250}42{,}4 = 875 + 261 = 1\,136 \text{ daN/cm}^2.$$

18.5. Să se calculeze valoarea eforturilor unitare tangenţiale maxime în cazul barei de la problema 18.4.

Rezolvare. Expresia momentului de încovoiere-răsucire M_ω se obţine cu relaţia 18.16 şi va fi:

$$M_\omega = \frac{dB}{dx} = -\frac{pe}{k}\frac{\text{sh } k\left(\frac{l}{2} - x\right)}{\text{ch } \frac{kl}{2}}.$$

Valoarea lui maximă are loc pentru:

$$x = 0 \text{ şi } x = l,$$

şi este:

$$M_{\omega_{max}} = \frac{pe}{k} \text{ th } \frac{kl}{2}.$$

Expresia efortului unitar tangenţial este dată de (18.14). Se observă că atît T_z cît şi M_ω şi M_t sînt maxime în apropierea reazemelor.

Punctul în care efortul unitar tangenţial rezultant are cea mai mare valoare este punctul A, F sau O (Fig. 18.1, b).

Pentru punctul A sau F se obţine:

$$S_x = \frac{\delta_1 b_1}{2}\frac{b_2}{2} = \frac{1{,}13 \cdot 9}{2}\frac{18{,}87}{2} = 47{,}8 \text{ cm}^3,$$

$$S_{\omega_{max}} = 1{,}13\frac{18{,}87 \cdot 9^2}{16} = 107{,}8 \text{ cm}^4.$$

Lîngă reazeme:

$$T_z = \frac{pl}{2} = \frac{6 \cdot 500}{2} = 1\,500 \text{ daN},$$

$$M_\omega = \frac{pe}{k} \text{ th } \frac{kl}{2} = \frac{6 \cdot 4{,}5}{0{,}01872} \text{th } 4{,}68 = 1\,440 \text{ daN cm},$$

$$M_t = \frac{pel}{2} - M_\omega = \frac{6 \cdot 4{,}5 \cdot 500}{2} - 1\,440 = 5\,310 \text{ daN cm}.$$

Efortul unitar tangenţial total în punctul A este:

$$\tau_A = \frac{1\,500 \cdot 47{,}8}{2\,166 \cdot 1{,}13} + \frac{1\,440 \cdot 107{,}8}{12\,250 \cdot 1{,}13} + \frac{5\,310 \cdot 1{,}13}{11{,}15} = 29{,}3 + 11{,}2 + 538 = 578 \text{ daN/cm}^2.$$

Se observă că efortul unitar tangenţial provine în cea mai mare parte din răsucirea simplă.

Pentru determinarea efortului unitar tangenţial în O se calculează mai întîi

$$S_{x0} = \frac{\delta_1 b_1 b_2}{2} + \delta_2\frac{b_2}{2} \cdot \frac{b_2}{4} = 95{,}6 + 0{,}75\frac{18{,}87^2}{8} = 129 \text{ cm}^3.$$

Efortul unitar tangenţial total va fi în acest punct

$$\tau_0 = 538 + \frac{1\,500 \cdot 129}{2\,166 \cdot 0{,}75} = 538 + 119 = 657 \text{ daN/cm}^2.$$

18.6. Să se calculeze poziţia centrului de încovoiere, suprafaţa sector, momentul de inerţie sectorial şi momentul static sectorial pentru un profil ∪ confecţionat din tablă de grosime δ dată, ca în figura 18.6, *a*.

Aplicaţie numerică: $b = 10$ cm; $b_1 = 5$ cm; $\delta = 0{,}5$ cm; $E = 2{,}1 \cdot 10^6$da N/cm².

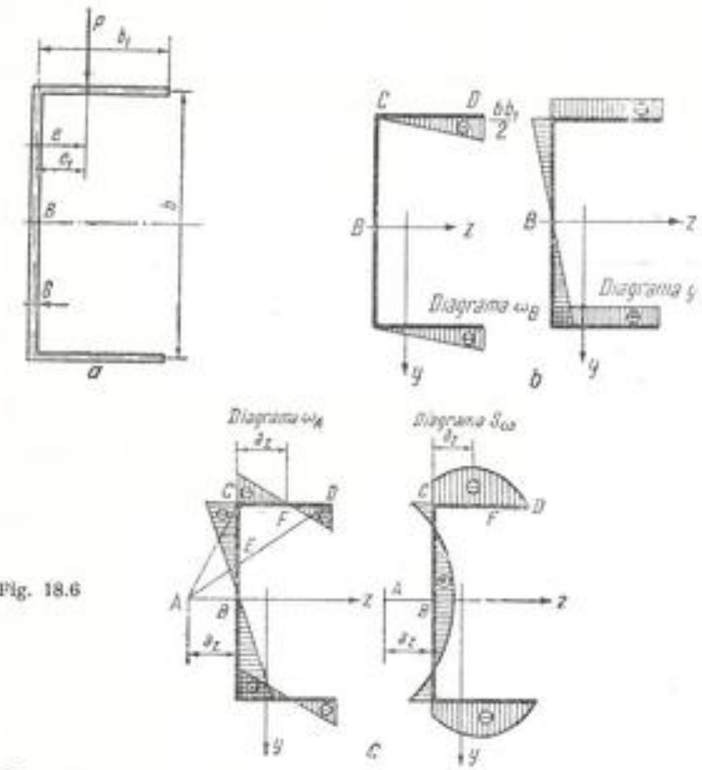


Fig. 18.6

Rezolvare.

Centrul de încovoiere pură se găseşte pe axa de simetrie z. Luînd ca pol arbitrar origine intersecţia axei z cu profilul B, se vor construi diagramele ω_B şi y (Fig. 18.6, *b*).

Valoarea maximă a lui ω este dublul suprafeţei triunghiului BCD şi are mărimea $\frac{b_1 b}{2}$.

Aplicînd teorema de înmulţire a diagramelor (vezi: Definiţii şi formule, punctul 9) se obţine:

$$\int \omega_B y \, dA = -\frac{b^2 b_1^2 \delta}{4}.$$

Momentul de inerţie are expresia:

$$I_z = \frac{b^3\delta}{12} + \frac{b^2 b_1 \delta}{2}.$$

Coordonata a_s a centrului de încovoiere este:

$$a_s = -\frac{b_1^2 \delta}{2b_1\delta + \frac{b\delta}{3}},$$

respectiv:

$$a_s = -\frac{b_1^2}{2b_1 + \frac{b}{3}}.$$

Se construieşte, faţă de centrul de încovoiere, diagrama suprafeţei sector principală, plecînd de la axa z ca rază vectoare care trece prin punctul A (Fig. 18.6, *c*).

Suprafaţa sector are ca valoare în punctul C dublul suprafeţei ABC, respectiv, $a_s \frac{b}{2}$.

Suprafaţa sector în punctul D este dublul ariilor triunghiurilor ECD şi ABE. Din asemănarea triunghiurilor ECD şi ABE avem $EC = \frac{b}{2\left(\frac{a_s}{b_1}+1\right)}$.

Suprafaţa sector, ţinînd seama de semne, va fi în acest punct:

$$\frac{bb_1}{2\left(\frac{a_s}{b_1}+1\right)} - a_s\frac{b}{2}\left(1 - \frac{1}{\frac{a_s}{b_1}+1}\right) = \frac{bb_1^2}{2(a_s+b_1)} - \frac{a^2 b}{2(a_s+b_1)} = \frac{b}{2}(b_1 - a_s).$$

Momentul static sectorial are valoarea maximă în punctul unde diagrama suprafeţelor sector se anulează. Valoarea momentului static în acest punct este:

$$\frac{(b_1 - a_s)^2 b\delta}{4}.$$

Momentul static sectorial în punctul C este

$$\frac{b_1 b\delta(b_1 - 2a_s)}{4}.$$

Momentul de inerţie sectorial principal este:

$$I_\omega = \int \omega_A^2 \, dA = a_s^2 I_z + \frac{b_1 - 3a_s}{6} \delta b_1^2 b^3.$$

Aplicaţie numerică: Momentul de inerţie este:

$$I_z = \frac{10^3 \cdot 0{,}5}{12} + \frac{10^2 \cdot 5 \cdot 0{,}5}{2} = 166{,}7 \text{ cm}^4.$$

Abscisa centrului de încovoiere este:

$$a_s = -\frac{5^2 \cdot 0{,}5}{2{,}5 \cdot 0{,}5 + \frac{10 \cdot 0{,}5}{3}} = -1{,}87 \text{ cm}.$$

Momentul static sectorial maxim este:

$$S_{\omega\,max} = \frac{(5 - 1{,}87)^2 \cdot 10 \cdot 0{,}5}{4} = 12{,}25 \text{ cm}^4.$$

Momentul de inerţie sectorial principal:

$$I_\omega = 1{,}87^2 \cdot 166{,}7 + \frac{5 - 3 \cdot 1{,}87}{6} \cdot 0{,}5 \cdot 5^2 \cdot 10^2 = 457 \text{ cm}^6.$$

18.7. Să se calculeze valoarea eforturilor unitare normale maxime pentru bara cu pereţi subţiri, în consolă, solicitată ca în figura 18.7. Secţiunea transversală a barei este cea din problema 18.6 (v. Fig. 18.6, *a* şi Fig. 18.7).

Aplicaţie numerică: $l = 2$ m; $p = 20$ daN/m; $e_1 = 2$ cm.

Rezolvare.

Spre a se calcula expresia bimomentului în lungul barei se foloseşte relaţia (18.26).

Rămîne să se determine parametrii φ_0, φ_0', B_0 şi M_{s0} în funcţie de condiţiile la limită.

Se observă că dacă se ia ca origine încastrarea, avem $\varphi_0 = 0$ şi $\varphi_0' = 0$.

Conform relaţiilor (18.27) şi (18.26) se obţine:

$$M_s = \int_0^s m(t)\mathrm{d}t,$$

$$B_s = M_{s0}\frac{\operatorname{sh} kx}{k} + B_0 \operatorname{ch} kx + \frac{1}{k}\int_0^s \operatorname{sh} k(x - t)\, m(t)\mathrm{d}t.$$

Pentru a se determina constanta B_0 se va scrie că secţiunea de capăt este liberă să se deplaneze astfel încît $B_l = 0$.

Observînd că

$$M_{s0} = ple$$

se obţine succesiv

$$B_l = ple\frac{\operatorname{sh} kl}{k} + B_0 \operatorname{ch} kl + \frac{1}{k}\int_0^l \operatorname{sh} k(x - t)\; m(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

$$B_l = ple\frac{\operatorname{sh} kl}{k} + B_0 \operatorname{ch} kl + \frac{pe}{k^2}(1 - \operatorname{ch} kl) = 0,$$

$$B_0 = \frac{pe}{k^2}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} kl} - kl\frac{\operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl}\right).$$

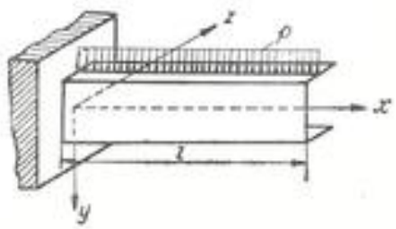


Fig. 18.7

Bimomentul va avea expresia:

$$B_s = pel\frac{\operatorname{sh} kx}{k} + \frac{pe}{k^2}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} kl} - kl\frac{\operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl}\right)\operatorname{ch} kx + \frac{pe}{k^2}(1 - \operatorname{ch} kx),$$

şi deoarece $\operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kx - \operatorname{sh} kx \operatorname{ch} kl = \operatorname{sh} k(l - x)$ se obţine:

$$B_s = -\frac{pe}{k^2 \operatorname{ch} kl}[kl \operatorname{sh} k(l - x) - \operatorname{ch} kl + \operatorname{ch} kx].$$

Valoarea maximă a lui B_s se obţine pentru $x = 0$ şi este

$$B_0 = \frac{pe}{k^2 \operatorname{ch} kl}(\operatorname{ch} kl - kl \operatorname{sh} kl - 1).$$

Momentul încovoietor maxim este în încastrare şi are valoarea:

$$M_{max} = \frac{pl^2}{2}.$$

Eforturi unitar maxim este în secţiunea din încastrare în fibra extremă în punctul în care ω are valoarea maximă şi are acelaşi semn ca şi cel datorit momentului încovoietor:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_s}y_{max} + \frac{B_{max}}{I_\omega}\omega_{max}.$$

Momentul de inerţie I_d este:

$$I_d = \frac{1}{3}\Sigma b_i \delta_i^3 = \frac{1}{3}(2 \cdot 5 + 10)\, 0{,}5^3 = 0{,}833 \text{ cm}^4.$$

Expresia lui k este:

$$k = \sqrt{\frac{0{,}81 \cdot 10^6 \cdot 0{,}833}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 457}} = 0{,}0266 \text{ cm}^{-1}.$$

Valoarea maximă a suprafeţei sector este în punctul D:

$$\omega_{max} = \frac{b}{2}(b_1 - a_s) = \frac{10}{2}(5 - 1{,}87) = 15{,}65 \text{ cm}^2.$$

Valoarea maximă a bimomentului este:

$$B_0 = \frac{-0{,}2 \cdot (18{,}7 + 2)}{0{,}0266^2 \cdot 102{,}2}(102{,}2 - 5{,}32 \cdot 102{,}2 - 1) = 5\,780 \text{ daN cm}^2.$$

Momentul încovoietor maxim este:

$$M_{max} = \frac{pl^2}{2} = \frac{0{,}2 \cdot 200^2}{2} = 4\,000 \text{ daN cm}.$$

Efortul unitar maxim se găseşte în punctul D şi are valoarea:

$$\sigma_{max} = \frac{4\,000}{166{,}7} 5 + \frac{5\,780}{457} 15{,}65 = 120 + 198 = 318 \text{ daN/cm}^2.$$

18.8. Să se calculeze valoarea eforturilor unitare tangenţiale maxime în cazul problemei 18.7.

Rezolvare.

Eforturile unitare tangenţiale se determină cu relaţia (18.14).

Momentul total de răsucire este maxim în încastrare, unde are valoarea:

$$M_s = pel.$$

Acest moment însă reprezintă suma între momentul de încovoiere-răsucire şi momentul de răsucire din secţiune.

Momentul de încovoiere-răsucire se obţine prin derivare:

$$M_{\omega x} = \frac{dB_x}{dx} = \frac{pe}{k \operatorname{ch} kl} [kl \operatorname{ch} k(l - x) - \operatorname{sh} kx].$$

După cum se observă, în încastrare se obţine

$$M_{\omega max} = pel,$$

şi deoarece

$$M_s = M_\omega + M_t,$$

rezultă că în încastrare momentul de răsucire propriu-zis este nul şi momentul de răsucire al sarcinilor exterioare este preluat de momentul de încovoiere-răsucire.

Deoarece I_d este mic, rezultă că răsucirea este cea care produce cele mai mari eforturi unitare tangenţiale. Pentru aceasta se va determina valoarea maximă a lui M_t.

Pentru o secţiune oarecare la distanţa x de încastrare, momentul de răsucire pură este:

$$M_{tx} = M_s - M_{\omega x}.$$

Momentul de răsucire al forţelor exterioare aplicate M_s este:

$$M_s = pe(l - x).$$

Înlocuind pe M_s şi $M_{\omega x}$ se obţine:

$$M_{tx} = pe(l - x) - \frac{pe}{k \operatorname{ch} kl} [kl \operatorname{ch} k(l - x) - \operatorname{sh} kx].$$

Valoarea maximă a lui M_{tx} se obţine anulînd derivata:

$$\frac{dM_{tx}}{dx} = -pe - \frac{pe}{k \operatorname{ch} kl} [-k^2 l \operatorname{sh} k(l - x) - k \operatorname{ch} kx] = 0,$$

sau:

$$-pe + \frac{pe}{\operatorname{ch} kl} [kl \operatorname{sh} k(l - x) + \operatorname{ch} kx] = 0.$$

Deoarece:

$$\operatorname{sh} k(l - x) = \operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kx - \operatorname{ch} kl \operatorname{sh} kx,$$

se obţine:

$$-\operatorname{sh} kx + \frac{kl \operatorname{sh} kl + 1}{kl \operatorname{ch} kl} \operatorname{ch} kx = \frac{1}{kl}.$$

Trecînd termenul $\operatorname{sh} kx$ în partea dreaptă, ridicînd ecuaţia la pătrat şi înlocuind cosinusul hiperbolic în funcţie de sinusul hiperbolic din relaţia:

$$\operatorname{ch}^2 kx = 1 + \operatorname{sh}^2 kx,$$

se obţine:

$$\left[1 - \frac{(kl \operatorname{sh} kl + 1)^2}{(kl \operatorname{ch} kl)^2}\right] \operatorname{sh}^2 kx + \frac{2}{kl} \operatorname{sh} kx + \frac{1}{k^2 l^2} - \frac{(kl \operatorname{sh} kl + 1)^2}{(kl \operatorname{ch} kl)^2} = 0,$$

$$\operatorname{sh}^2 kx + 2 \frac{1}{kl \left[1 - \frac{(kl \operatorname{sh} kl + 1)^2}{(kl \operatorname{ch} kl)^2}\right]} \operatorname{sh} kx + \frac{\frac{1}{k^2 l^2} - \left(\frac{kl \operatorname{sh} kl + 1}{kl \operatorname{ch} kl}\right)^2}{1 - \left(\frac{kl \operatorname{sh} kl + 1}{kl \operatorname{ch} kl}\right)^2} = 0.$$

Numeric, pentru cazul considerat, această ecuaţie devine:

$$\operatorname{sh}^2 kx - 2 \frac{1}{5{,}32 \left[1 - \left(\frac{5{,}32 \operatorname{sh} 5{,}32 + 1}{5{,}32 \operatorname{ch} 5{,}32}\right)^2\right]} \operatorname{sh} kx - \frac{\frac{1}{5{,}32^2} - \left[\frac{5{,}32 \operatorname{sh} 5{,}32 + 1}{5{,}32 \operatorname{ch} 5{,}32}\right]^2}{1 - \left[\frac{5{,}32 \operatorname{sh} 5{,}32 + 1}{5{,}32 \operatorname{ch} 5{,}32}\right]^2} = 0,$$

unde:

$$kl = 0{,}0266 \cdot 200 = 5{,}32$$

sau, efectuînd calculele:

$$\operatorname{sh}^2 kx + 2 \cdot 51 \operatorname{sh} kx - 315 = 0,$$

de unde:

$$\operatorname{sh} kx = -51 \pm \sqrt{51^2 + 315} = 3,$$

unde se va lua numai soluţia pozitivă care este posibilă.

De aici rezultă:

$$kx' = 1{,}818.$$

Secţiunea în care momentul de răsucire este maxim se găseşte la distanţa:

$$x' = \frac{1{,}818}{0{,}0266} = 68{,}3 \text{ cm}.$$

Înlocuind valorile obţinute, rezultă:

$$M_{t\,max} = 0{,}2 \cdot 3{,}87 \cdot (200 - 68{,}3) - \frac{0{,}2 \cdot 3{,}87}{0{,}0266 \text{ ch } 5{,}32}\,[5{,}32 \text{ ch } 0{,}0266(200 - 68{,}3) - \text{sh } 0{,}0266 \cdot 68{,}3].$$

Efectuînd calculele, se obţine:

$$M_{t\,max} = 78 \text{ daN cm}.$$

Pentru aceeaşi secţiune, momentul de răsucire al sarcinilor exterioare este:

$$M_s = 0{,}2 \cdot 3{,}87(200 - 68{,}3) = 102 \text{ daN cm},$$

iar momentul de încovoiere-răsucire este:

$$M_\omega = 102 - 78 = 24 \text{ daN cm}.$$

În secţiunea considerată, în punctul F, eforturile unitare tangenţiale sînt:

$$\tau = \frac{0{,}2 \cdot 131{,}7 \cdot 7{,}825}{166{,}7 \cdot 0{,}5} + \frac{24 \cdot 12{,}25}{457 \cdot 0{,}5} + \frac{78 \cdot 0{,}5}{0{,}833} =$$

$$= 2{,}5 + 1{,}29 + 46{,}8 = 50{,}6 \text{ daN/cm}^2.$$

În această relaţie, momentul static al porţiunii FD este:

$$S = 3{,}13 \cdot 5 \cdot 0{,}5 = 7{,}825 \text{ cm}^3.$$

Forţa tăietoare în secţiune este:

$$T_s = p(l - x') = 0{,}2 \cdot 131{,}7 = 26{,}3 \text{ daN}.$$

18.9. Să se calculeze poziţia centrului de forfecare pentru secţiunea din figura 18.9, *a*.

Aplicaţie numerică: $b_1 = 10$ cm; $b_2 = 5$ cm; $b_3 = 3$ cm; $\delta = 0{,}2$ cm.

Rezolvare. Se alege ca origine pentru raza polară punctul O de pe axa de simetrie, ca în figura 18.9, *b*. Faţă de acest punct se calculează suprafaţa sector ω_0. Valorile care se obţin sînt trecute în diagrama ω_0 din figura 18.9, *b*.

Pentru calculul poziţiei centrului de forfecare se va utiliza relaţia (18.10). Diagrama y este dată de asemenea în figura 18.9, *b*. Integrala care intervine se va calcula cu ajutorul metodei lui *Veresceaghin*. Se va obţine astfel:

$$\int \omega_0 y \, dA = -2\frac{b_1}{2}\frac{b_1}{2}b_2\frac{b_1}{2}\delta -$$

$$-2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{2}b_2 + \frac{b_1}{2}b_2 - b_2b_3\right)b_3\left(\frac{b_1}{2} + \frac{\frac{b_1}{2}\frac{b_2}{2} - \frac{b_2b_3}{2}}{\frac{b_1}{2}b_2 - \frac{b_2b_3}{2}}b_3\right)\right\}.$$

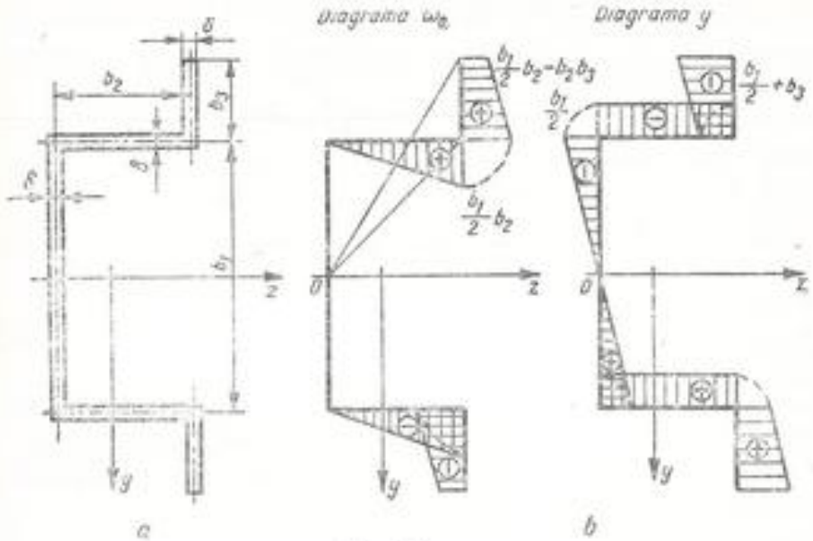


Fig. 18.9

sau după simplificări:

$$\int \omega_0 y \, dA = -\left[\frac{b_1^2b_2^2}{4}\delta + b_2b_3\left(\frac{b_1^2}{2} - \frac{2}{3}b_3^2\right)\delta\right].$$

Momentul de inerţie va fi:

$$I_s = \frac{\delta b_1^3}{12} + 2b_2\delta\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + 2\left[\frac{\delta b_3^3}{12} + \delta b_3\left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_3}{2}\right)^2\right],$$

sau, după cîteva simplificări:

$$I_s = \frac{\delta b_1^3}{12} + \frac{b_1^2b_2}{2}\delta + \frac{2}{3}b_3^3\delta + \frac{b_1^2b_3}{2}\delta + b_1b_3^2\delta,$$

astfel încît poziţia centrului de încovoiere devine:

$$a_s = -\frac{\frac{b_1^2b_2^2}{4} + b_2b_3\left(\frac{b_1^2}{2} - \frac{2}{3}b_3^2\right)}{\frac{b_1^3}{12} + \frac{b_1^2b_3}{2} + \frac{2}{3}b_3^3 + b_1b_3\left(\frac{b_1}{2} + b_3\right)}.$$

Numeric se obţine:

$$a_z = -\frac{\frac{10^2 \cdot 5^2}{4} + 5 \cdot 3\left(\frac{10^2}{2} - \frac{2}{3}3^2\right)}{\frac{10^3}{12} + \frac{10^2 \cdot 5}{2} + \frac{2}{3}3^3 + 10 \cdot 3\left(\frac{10}{2} + 3\right)} = -2{,}17 \text{ cm}.$$

18.10. Să se calculeze repartiţia eforturilor unitare normale suplimentare, produse datorită răsucirii împiedicate în cazul aplicaţiei numerice de la problema 18.9, ştiind că:

$$\frac{B}{I_\omega} = 10 \text{ daN/cm}^4.$$

Rezolvare. Se trasează suprafaţa sector faţă de centrul de forfecare determinat la problema precedentă, după regula cunoscută. Se obţine astfel suprafaţa sector din figura 18.10.

Eforturi unitar normal suplimentar produs ca urmare a răsucirii împiedicate corespunde ultimului termen al expresiei (18.13) şi se obţine înmulţind valorile rezultate pentru suprafaţa sector determinată faţă de centrul de forfecare, cu $\frac{B}{I_\omega}$. Se observă deci că valoarea maximă a acestui efort unitar suplimentar se găseşte în punctele B şi B' şi are valoarea:

$$\sigma = 10 \cdot 14{,}15 = 141{,}5 \text{ daN/cm}^2.$$

18.11. Să se calculeze poziţia centrului de încovoiere şi momentul de inerţie sectorial în cazul secţiunii din figura 18.11.

Aplicaţie numerică. Profilul I este cel din cazul problemei 18.1, iar profilul U este cel din cazul problemei 18.6.

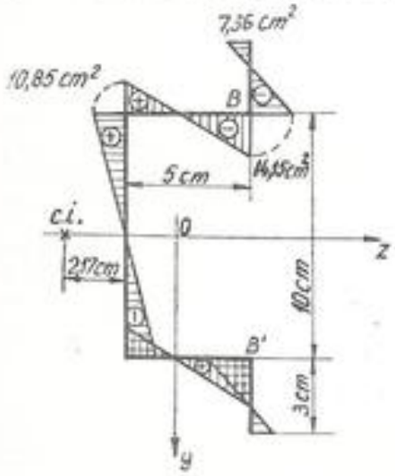


Fig. 18.10

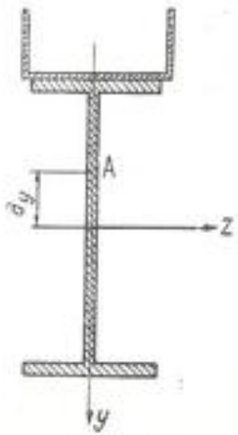


Fig. 18.11

Rezolvare. Pentru aflarea poziţiei centrului de încovoiere se face suma produselor momentelor de inerţie faţă de axa de simetrie prin coordonata centrului de încovoiere al fiecărui element în parte, luată faţă de cealaltă axă arbitrar aleasă.

Dacă se notează mărimile privitoare la profilul I cu indicele 1 şi cele privitoare la profilul U cu indicele 2 se obţine:

$$a_y = \frac{I_{y1} \cdot 0 + I_{y2}a_{y2}}{I_{y1} + I_{y2}} = \frac{166{,}7 \cdot (10 - 1{,}87)}{138 + 166{,}7} = 4{,}43 \text{ cm}.$$

Pentru a se afla momentul de inerţie sectorial rezultant, se utilizează relaţia (18.29).

În cazul considerat se obţine:

$$I_\omega = \frac{I_{y1} \cdot I_{y2}a_{y2}^2}{I_{y1} + I_{y2}} + I_{\omega 1} + I_{\omega 2} = \frac{138 \cdot 166{,}7 \cdot (10 - 1{,}87)^2}{138 + 166{,}7} + 12250 + 457 = 13321 \text{ cm}^6.$$

18.12. Să se calculeze poziţia centrului de încovoiere şi momentul de inerţie sectorial în cazul secţiunii din figura 18.12.

Aplicaţie numerică. Profilul este I 24, iar platbanda are dimensiunile 120 × 10.

Rezolvare. Deoarece nu există încă tabele cu momentele de inerţie sectoriale proprii ale profilelor standardizate în ţara noastră, calculul se va face aproximativ, presupunînd atît grosimea inimii cît şi aceea a tălpilor constante.

Pentru calculul momentului de inerţie sectorial al profilului se va presupune profilul compus din trei dreptunghiuri. După metoda indicată de relaţia (18.29), avem:

$$I_\omega = \frac{I_{y1}I_{y2}a_{y12}^2 + I_{y1}I_{y3}a_{y13}^2 + I_{y2}I_{y3}a_{y23}^2}{I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}} + I_{\omega 1} + I_{\omega 2} + I_{\omega 3}.$$

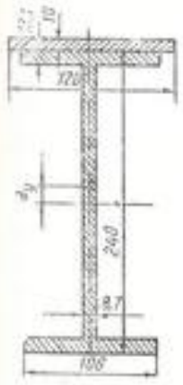


Fig. 18.12

Cu datele profilului se obţine:

$$I_{y1} = \frac{(b_1 - 2\delta_1)\delta_1^3}{12} = \frac{(24 - 2 \cdot 1{,}31) \cdot 0{,}87^3}{12} = 1{,}17 \text{ cm}^4;$$

$$I_{y2} = I_{y3} = \frac{\delta_2 b_2^3}{12} = \frac{1{,}31 \cdot 10{,}6^3}{12} = 130 \text{ cm}^4;$$

$$I_{\omega 1} = I_{\omega 2} = I_{\omega 3} = 0,$$

iar momentul de inerţie sectorial al profilului I este:

$$I_\omega = \frac{1{,}17 \cdot 130(12 - 1{,}3)^2 + 1{,}17 \cdot 130(12 - 1{,}3)^2 + 130^2(24 - 2{,}6)^2}{2 \cdot 130 + 1{,}17},$$

$$I_\omega = \frac{2 \cdot 17\,415 + 7\,740\,200}{261{,}17} = 29\,700 \text{ cm}^6.$$

Momentul de inerţie al platbandei faţă de axa y este

$$I_{yp} = \frac{\delta b^3}{12} = \frac{1 \cdot 12^3}{12} = 144 \text{ cm}^4.$$

Ordonata centrului de încovoiere este:

$$a_y = -\frac{I_{yp} a_{zp}}{I_y + I_{yp}} = -\frac{144 \cdot 12{,}5}{221 + 144} = -4{,}93 \text{ cm},$$

unde $I_y = 221$ cm^4, este valoare obţinută din tabele.

Momen tul de inerţie sectorial al întregii secţiuni este:

$$I_{\omega_t} = \frac{I_y I_{yp} a_{zp}^2}{I_y + I_{yp}} + I_\omega + I_{\omega_p},$$

$$I_{\omega_t} = \frac{221 \cdot 144(12 + 0{,}5)^2}{221 + 144} + 29\,700 + 0 = 13\,897 + 29\,700 + 0 = 43\,597 \text{ cm}^6.$$

18.13. Să se determine poziţia centrului de forfecare şi variaţia eforturilor unitare tangenţiale pe secţiunea unei bare tubulare, tăiată după o generatoare. Secţiunea barei este inelară şi grosimea peretelui δ este mică în comparaţie cu raza medie a acesteia. Bara este solicitată la încovoiere pură (Fig. 18.13).

Aplicaţie numerică. $T = 5\,000$ daN; $\delta = 0{,}5$ cm; $r = 10$ cm.

Rezolvare. Ca axă de referinţă se va lua axa de simetrie z a secţiunii. Centrul de încovoiere pură se va găsi pe această axă.

Se va lua iniţial ca centru de coordonate, centrul secţiunii. Poziţia centrului de încovoiere se determină folosind relaţia (18.10). Suprafaţa sector corespunzătoare unui punct oarecare C definit prin unghiul φ este:

$$\omega_B = \int_0^\varphi r \cdot r d\psi = r^2\varphi.$$

Momentul de inerţie al secţiunii între punctele C şi C' este:

$$\int_{-\varphi}^{+\varphi} \delta \cdot r d\psi r^2 \sin^2\psi = 2\frac{r^3\delta}{2}\left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]. \qquad (1)$$

Numărătorul expresiei (18.10) este:

$$\int_{-\varphi}^{+\varphi} \omega_B y \, dA = \int_{-\varphi}^{+\varphi} r^2 \psi \cdot r \sin\psi \; \delta r \, d\psi.$$

Integrînd se obţine:

$$\int_{-\varphi}^{+\varphi} \omega_B y dA = 2r^4\delta(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

Abscisa centrului de încovoiere devine:

$$a_z = \frac{\int \omega_B y dA}{I_z} = \frac{2r^4\delta(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)}{2\frac{r^3\delta}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)}.$$

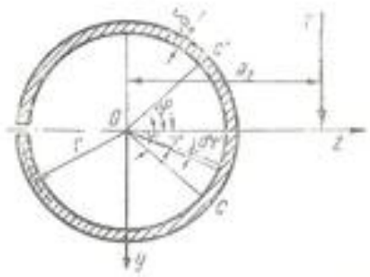


Fig. 18.13

Simplificînd se obţine:

$$a_z = 2r\frac{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}}. \qquad (2)$$

Deoarece forţa trebuie să fie aplicată în centrul de încovoiere, spre a avea încovoiere pură, avem $M_\omega = 0$. Eforturile unitare tangenţiale se calculează după relaţia

$$\tau = \frac{T_y S_z}{I_z \delta}.$$

Momentul static este:

$$S_z = \int_\varphi^\psi y \, dA = \int_\varphi^\psi r \sin\psi \, r\delta \, d\psi,$$

$$S_z = r^2\delta\int_\varphi^\psi \sin\psi \, d\psi = r^2\delta(\cos\varphi - \cos\psi).$$

Eforturile unitare tangenţiale în punctul determinat de ψ vor fi

$$\tau = \frac{T_y}{\delta}\frac{r^2\delta(\cos\varphi - \cos\psi)}{2\frac{r^3\delta}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)} = \frac{T_y}{r\delta}\frac{\cos\varphi - \cos\psi}{\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}}.$$

Se observă că valoarea obţinută τ este maximă dacă $\psi = 0$.

În cazul considerat $\varphi = \pi$ şi se obţine:

$$a_z = 2r.$$

Expresia eforturilor unitare tangenţiale devine:

$$\tau = \frac{T_y}{r\delta\pi}(-1 - \cos\psi).$$

Valoarea maximă pentru τ este:

$$\tau_{max} = \frac{2T_y}{\pi r\delta}.$$

Aplicaţie numerică.

$$a_z = 20 \text{ cm}.$$

$$\tau_{max} = \frac{2 \cdot 5\,000}{\pi \cdot 10 \cdot 0{,}5} = 637 \text{ daN/cm}^2.$$

18.14. Să se calculeze deplanarea secţiunilor de la capetele unei bare tubulare, tăiată după o generatoare, dacă aceste secţiuni sînt libere şi se rotesc una faţă de alta cu un unghi φ'. Tubul are secţiunea circulară.

Aplicaţie numerică. $R = 20$ cm, $\delta = 0{,}6$ cm, $\varphi' = 4°/\text{m}$.

Rezolvare. Din relaţia (18.12) se observă că deplanarea este proporţională cu suprafaţa sector şi cu rotirea specifică a secţiunii.

Pentru cazul considerat, suprafaţa sector luată faţă de centrul de încovoiere este: $\omega_A = \int r_1 R d\varphi$, unde r_1 reprezintă distanţa de la tangenta arcului $Rd\psi$ pînă în centrul de încovoiere:

$$r_1 = R - a_z \cos \psi.$$

Suprafaţa sector într-un punct oarecare este:

$$\omega = \int_0^{\psi} (R^2 - Ra_z \cos \psi) d\psi$$

sau integrînd:

$$\omega = R(R\psi - a_z \sin \psi).$$

Deplanarea este maximă pentru $\psi = \varphi$, respectiv la capetele profilului.

Deplasarea unei margini a profilului faţă de cealaltă se obţine în cazul considerat luînd $\varphi = \pi$:

$$\Delta u_{max} = 2R^2\pi\varphi'.$$

Aplicaţie numerică.

$$\Delta u_{max} = 2 \cdot 20^2\pi \frac{4}{100 \cdot 57,3} = 1,76 \text{ cm, în care } 1 \text{ rad} = 57,3°.$$

18.15. Să se determine eforturile unitare normale la bara de grosime δ constantă, avînd forma unui semicerc (Fig. 18.15, *b*). Bara este încastrată la un capăt şi este solicitată cu o forţă P aşezată ca în figura 18.15, *a* la celălalt capăt.

Aplicaţie numerică: $l = 2$ m, $P = 20$ daN, $E = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm², $R = 10$ cm, $\delta = 0,2$ cm.

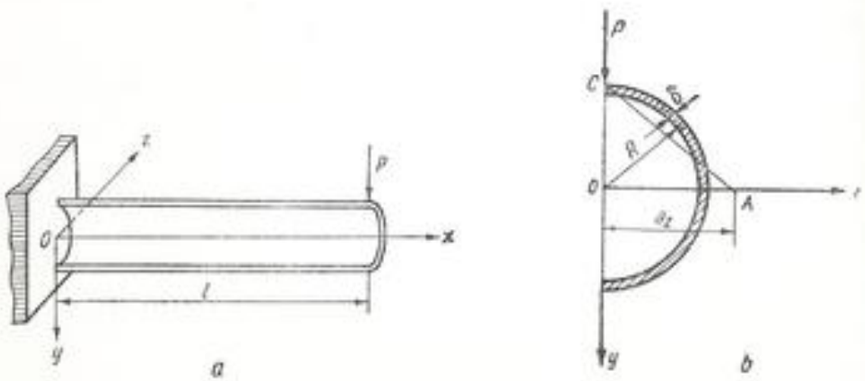


Fig. 18.15

Rezolvare. Utilizînd relaţia (2) obţinută la problema 18.13 centrul de încovoiere are abscisa

$$a_z = 2R \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{\pi}.$$

Momentul de inerţie se obţine utilizînd relaţia (1) de la problema 18.13:

$$I_z = \frac{R^3\delta\pi}{2}$$

Pentru determinarea expresiei bimomentului se observă că $\varphi_0 = 0$, $\varphi_0' = 0$, deoarece secţiunea este încastrată. Tot astfel, pentru $x = l$, $B_z = 0$ şi $M_{zl} = Pa_z$, deoarece forţa, nelucrînd în centrul de încovoiere, produce şi acest moment de răsucire.

Din ultima condiţie se obţine:

$$B_l = M_{z0} \frac{\text{sh } kl}{k} + B_0 \text{ ch } kl = 0.$$

Deoarece:

$$M_{z0} = M_{zl} = Pa_z$$

se obţine:

$$B_0 = -\frac{Pa_z}{k} \frac{\text{sh } kl}{\text{ch } kl},$$

iar expresia bimomentului devine:

$$B_z = -Pa_z \frac{\text{sh } k(l - x)}{k \text{ ch } kl}.$$

Valoarea maximă a lui B_z se obţine pentru $x = 0$ şi este:

$$B_{z_{max}} = -\frac{Pa_z}{k} \text{th } kl.$$

Momentul de inerţie sectorial este:

$$I_\omega = \int \omega^2 dA = \int_{-\varphi}^{+\varphi} R^2(R\psi - a_z \sin \psi)^2 R\delta d\psi,$$

$$I_\omega = R^3\delta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R^2\psi^2 + a_z^2 \sin^2 \psi - 2Ra_z\psi \sin \psi) d\psi,$$

$$I_\omega = R^3\delta \left[\frac{R^3\pi^3}{8 \cdot 3} + \frac{R^3\pi^3}{8 \cdot 3} + a_z^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - 2Ra_z \cdot 2\right],$$

$$I_\omega = 2R^3\delta \left[\frac{R^3\pi^3}{24} + \frac{a_z^2\pi}{4} - 2Ra_z\right].$$

Înlocuind pe a_s cu valoarea lui, se obţine:

$$I_\omega = 2R^3\delta\left[\frac{R^2\pi^3}{24} + \frac{16R^2\pi}{4\pi^2} - \frac{2R \cdot 4R}{\pi}\right],$$

de unde:

$$I_\omega = 2R^5\delta\left(\frac{\pi^3}{24} - \frac{4}{\pi}\right).$$

Momentul de inerţie I_d are valoarea:

$$I_d = \frac{\pi R\delta^3}{3}.$$

Cu datele numerice din cazul problemei se obţine:

$$I_s = \frac{10^3 \cdot 0{,}2 \cdot \pi}{2} = 314 \text{ cm}^4,$$

$$I_d = \frac{\pi \cdot 10}{3} \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0838 \text{ cm}^4,$$

$$k = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_\omega}} = \sqrt{\frac{0{,}81 \cdot 10^6 \cdot 0{,}0838}{2{,}1 \cdot 745 \cdot 10^6}} = 0{,}00658 \text{ cm}^{-1},$$

unde

$$I_\omega = 2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}2\left(\frac{\pi^3}{24} - \frac{4}{\pi}\right) = 745 \text{ cm}^6.$$

Poziţia centrului de încovoiere

$$a_s = \frac{4R}{\pi} = \frac{40}{\pi} = 12{,}73 \text{ cm}.$$

Valoarea maximă a bimomentului este

$$B_{s\,max} = -\frac{20 \cdot 12{,}73}{0{,}00658} \cdot 0{,}877 = -33\,900 \text{ daN cm}^2,$$

deoarece th $kl = 0{,}877$.
Efortul unitar normal în punctul C este

$$\sigma = \frac{20 \cdot 200 \cdot 10}{314} + \frac{33\,900}{745} \cdot 29{,}8 = 127{,}5 + 1\,360 \cong 1\,490 \text{ daN/cm}^2,$$

unde

$$\omega = R\left(R\psi - \frac{4R}{\pi}\sin\psi\right),$$

$$\omega = 10\left(10\,\frac{\pi}{2} - \frac{40}{\pi}\right) = 29{,}8 \text{ cm}^2.$$

Urmează să se verifice şi eforturile unitare tangenţiale. Deoarece cele mai mari eforturi unitare tangenţiale provin la barele deschise cu pereţi subţiri, din cauza răsucirii, se va face calculul numai la răsucire:

$$\tau = \frac{M_t\delta}{I_d} = \frac{20 \cdot 12{,}73 \cdot 0{,}2}{0{,}0838} = 608 \text{ daN/cm}^2.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

18.16. Să se arate cum se pot deduce reguliile de determinare a centrului de încovoiere şi a momentelor de inerţie sectoriale aflate în problema 18.11 din metodele generale date la punctele 4 şi 9.

18.17. Să se calculeze poziţia centrului de forfecare determinat în problema 18.9 prin metoda indicată la punctul 10.

CAPITOLUL 19

SOLICITĂRI ÎN STADIUL PLASTIC

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. Plasticitatea este proprietatea materialelor de a lua, sub acţiunea anumitor sarcini, deformaţii permanente. Calculul în domeniul de deformare plastică se bazează pe faptul că uneori pot apărea deformaţii permanente în secţiunea cea mai solicitată, fără ca piesa să fie, prin aceasta, distrusă sau inutilizabilă.

2. Dacă deformaţiile plastice cresc foarte mult, se ajunge la *o sarcină limită*, a cărei depăşire poate duce la distrugerea piesei. Sarcina admisibilă se află împărţind sarcina limită printr-un coeficient de siguranţă. Trebuie remarcat că, deşi calculele se efectuează în domeniul de deformare plastică, *sarcina admisibilă produce eforturi unitare care sînt, în general, sub limita de curgere*, piesa respectivă lucrînd, în realitate, în regim de deformare elastică.

Metoda de calcul prin care se determină sarcina admisibilă, pornind de la sarcina limită, se numeşte *metoda capacităţii portante* sau *metoda de calcul la rupere*.

3. Legătura dintre eforturile unitare şi deformaţii, în stadiul plastic, la starea liniară de eforturi unitare, se exprimă prin schematizarea curbei caracteristice a materialelor la întindere sau compresiune simplă.

Diagramele schematizate cuprind două porţiuni:

— sub limita de curgere ($\varepsilon < \varepsilon_c$) diagrama este liniară, respectînd ecuaţia $\sigma = E\varepsilon$;

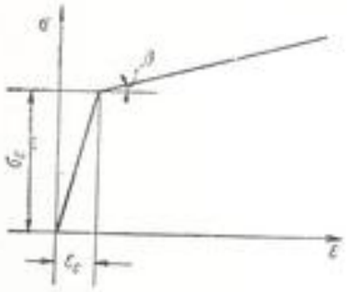


Fig. 19.a

— peste limita de curgere ($\varepsilon > \varepsilon_c$), diagrama caracteristică se poate schematiza astfel:

a) O linie dreaptă (Fig. 19. *a*) înclinată, faţă de axa ε, cu unghiul β. Se defineşte

$$\mathrm{tg}\beta = E_p,$$

ca fiind *modulul de plasticitate al materialului*.

b) O linie orizontală (Fig. 19.*b*), $\sigma = \sigma_c$, la care se admite că zona de curgere este nelimitată, deci efortul uni-

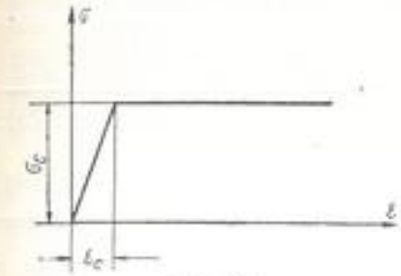


Fig. 19.b

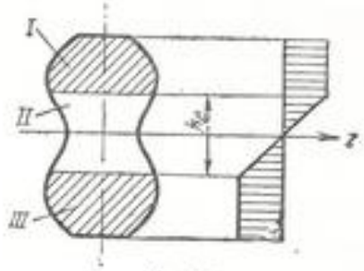


Fig. 19.c

tar rămîne constant. Aceasta reprezintă *un material ideal plastic sau cu modul de plasticitate nul* ($E_p = 0$).

4. În cazul unei grinzi cu secţiunea avînd două axe de simetrie, făcută din material ideal plastic, dacă s-a depăşit în porţiunile extreme limita de curgere, eforturile unitare variază pe secţiune ca în figura 19. *c*. Momentul încovoietor corespunzător acestei solicitări este dat de relaţia:

$$M = \sigma_c (W_e + S_p), \tag{19.1}$$

unde

$$W_e = \frac{I_e}{\frac{h_e}{2}}, \tag{19.2}$$

I_e este momentul de inerţie al părţii de secţiune solicitate elastic (porţiunea II în Fig. 19.*c*);

h_e — înălţimea acestei porţiuni;

S_p — *dublul momentului static* al uneia din cele două porţiuni identice (I şi III) solicitate în stadiul plastic (Fig. 19. *c*).

5. Dacă M creşte, se măreşte partea din secţiune solicitată plastic şi scade, corespunzător, cea solicitată elastic. Înălţimea părţii solicitate elastic poate să scadă atît de mult încît să ajungă sub 1/200 din înălţimea secţiunii barei. În acest caz se poate neglija partea solicitată elastic, considerînd $h_e = 0$, diagrama de eforturi unitare fiind cea din figura 19. *d*. Secţiunea barei aflate în această stare de solicitare limită se numeşte *articulaţie plastică*. Momentul încovoietor limită pe care îl poate suporta o bară cu articulaţie plastică este dat de relaţia (19.1), înlocuind $W_e = 0$:

$$M_{lim} = \sigma_c \cdot S_p. \tag{19.3}$$

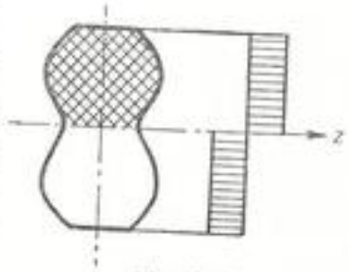


Fig. 19. d

S_p fiind aici dublul momentului static al unei jumătăţi de secţiune, în raport cu axa z.

6. În cazul unei bare cu secţiune avînd o singură axă de simetrie (Fig. 19. *e*), solicitată elasto-plastic, axa neutră îşi schimbă poziţia, deplasîndu-se — în funcţie de mărimea solicitării — din centrul de greutate, pînă (la limită) în poziţia în care împarte secţiunea în două arii egale

$$A_I = A_{II}. \tag{19.4}$$

Momentul încovoietor limită corespunzător articulaţiei plastice (Fig. 19. *e*) este dat de relaţia

$$M_{lim} = \sigma_c(S_I + S_{II}) \tag{19.5}$$

unde S_I şi S_{II} sînt valorile absolute ale momentelor statice ale ariilor I şi II, faţă de axa neutră, a cărei poziţie se determină cu relaţia (19.4).

7. Cînd schematizarea curbei caracteristice a unui material se face ca în figura 19. *a* ($E_p \neq 0$), pentru o grindă avînd secţiunea cu două axe de simetrie, dacă s-a depăşit în porţiunile extreme limita de curgere, eforturile unitare variază pe secţiune ca în figura 19. *f*. Momentul încovoietor corespunzător acestei solicitări este dat de relaţia:

$$M = \sigma_e W_e + 2\int_a^{\frac{h}{2}} \sigma_e\left[1 + \frac{E_p}{E}\left(\frac{y}{a} - 1\right)\right] y \, dA, \tag{19.6}$$

unde W_e este definit prin relaţia (19.2), iar $a = \frac{h_e}{2}$.

8. Dacă se aplică asupra unei bare un cuplu M, care produce într-o secţiune o solicitare elasto-plastică şi apoi se îndepărtează cuplul aplicat, zona elastică interioară nu se descarcă complet, fiind împiedicată de fibrele exterioare ale barei, care au suferit deformaţii permanente. Prin interacţiunea zonelor elastică şi plastică, apar în bară eforturi unitare remanente. Mărimea şi sensul acestora se pot calcula, considerînd că asupra barei se aplică un cuplu

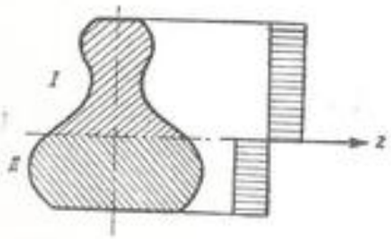


Fig. 19.*e*

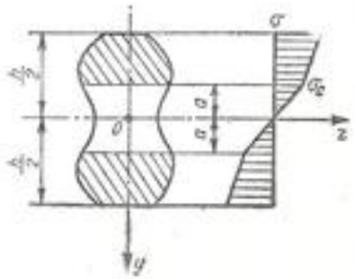


Fig. 19.*f*

de descărcare egal cu M, dar de sens invers, sub acţiunea căruia materialul se comportă perfect elastic. Însumînd algebric, în fiecare punct, eforturile unitare datorite cuplului activ şi celui de descărcare, se obţin eforturile unitare remanente.

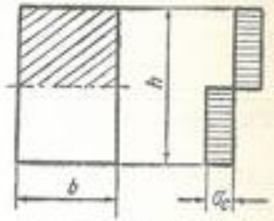


Fig. 19. 1

B. PROBLEME REZOLVATE

19.1. Care este momentul încovoietor capabil al unei secţiuni dreptunghiulare, solicitată în întregime plastic? Să se compare rezultatul cu ceea ce s-ar fi obţinut cu metoda rezistenţelor admisibile.

Rezolvare. Eforturile unitare variază pe secţiune ca în figura 19.1. Se aplică relaţia (19.3), unde dublul momentului static al unei jumătăţi de secţiune faţă de axa neutră este

$$S_p = 2b\,\frac{h}{2}\,\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4},$$

deci

$$M_{lim} = \frac{bh^2}{4}\,\sigma_e = 0{,}25\ bh^2\,\sigma_e.$$

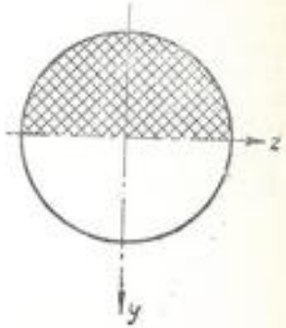


Fig. 19.2

După metoda rezistenţelor admisibile, momentul încovoietor care produce atingerea limitei de curgere în fibrele extreme ale secţiunii este:

$$M_e = \sigma_e W = \sigma_e \frac{bh^2}{6} = 0{,}167\ bh^2\,\sigma_e.$$

$$\frac{M_{lim}}{M_e} = \frac{0{,}25bh^2\,\sigma_e}{0{,}167bh^2\,\sigma_e} = 1{,}5.$$

După teoria plasticităţii, momentul încovoietor capabil al unei secţiuni dreptunghiulare este deci cu 50% mai mare.

19.2. Care este momentul încovoietor capabil al unei secţiuni circulare solicitate în întregime plastic? Să se compare rezultatul cu ceea ce s-ar fi obţinut cu metoda rezistenţelor admisibile. (Fig. 19.2)

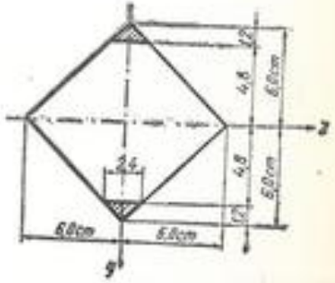


Fig. 19.3

Rezolvare. Se aplică relaţia (19.3):

$$M_{lim} = \sigma_c \cdot S_p = \sigma_c \cdot 2 \cdot \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{2d}{3\pi} = \frac{d^3\sigma_c}{6} = 0{,}167\ d^3\sigma_c.$$

Cu metoda rezistenţelor admisibile s-ar fi obţinut:

$$M_c = \sigma_c W = \sigma_c \frac{\pi d^3}{32} = 0{,}098\ d^3\sigma_c.$$

$$\frac{M_{lim}}{M_c} = \frac{0{,}167 d^3\sigma_c}{0{,}098 d^3\sigma_c} = 1{,}70.$$

Sporul de moment capabil obţinut prin folosirea teoriei plasticităţii este de 70%.

19.3. O bară metalică solicitată la încovoiere are secţiunea în formă de pătrat aşezat ca în figura 19.3 cu diagonala de 12 cm. Să se calculeze momentele capabile ale secţiunii folosind metoda rezistenţelor admisibile şi metoda capacităţii portante. Dacă muchiile pătratului se teşesc la partea superioară şi la cea inferioară pe o înălţime de 1,2 cm, să se calculeze din nou momentele capabile după cele două metode. Se va lua $\sigma_c = 2\,500$ daN/cm² şi $c = 1{,}8$ (coeficient de siguranţă faţă de limita de curgere).

Rezolvare. a) *Pătratul întreg.*

1) Metoda rezistenţelor admisibile:

$$I_z' = \frac{(6\sqrt{2})^4}{12} = 432\ \text{cm}^4; \quad W_z' = \frac{432}{6} = 72\ \text{cm}^3,$$

$$M_{cap} = \frac{M_c}{c} = \frac{W_z'\sigma_c}{c} = 72 \cdot \frac{2\,500}{1{,}8} = 100\,000\ \text{daNcm} = 10{,}0\ \text{kNm}.$$

2) Metoda capacităţii portante:

$$S_p = 2 \cdot \frac{12 \cdot 6}{2} \cdot \frac{6}{3} = 144\ \text{cm}^3,$$

$$M_{cap} = \frac{M_{lim}}{c} = \frac{S_p \cdot \sigma_c}{c} = \frac{144 \cdot 2\,500}{1{,}8} = 200\,000\ \text{daNcm} = 20{,}0\ \text{kNm}.$$

b) *Pătratul cu muchiile teşite.*

1) Metoda rezistenţelor admisibile:

$$I_z'' = 432 - 2\left(\frac{2{,}4 \cdot 1{,}2^3}{36} + \frac{2{,}4 \cdot 1{,}2}{2} \cdot 5{,}2^2\right) = 354\ \text{cm}^4,$$

$$W_z'' = \frac{354}{4{,}8} = 74\ \text{cm}^3,$$

$$M_{cap} = \frac{M_c}{c} = \frac{W_z'' \cdot \sigma_c}{c} = 74 \cdot \frac{2\,500}{1{,}8} = 103\,000\ \text{daN cm} = 10{,}3\ \text{kNm}.$$

2) Metoda capacităţii portante:

$$S_p = 2\left[\frac{12 \cdot 6}{2} \cdot \frac{6}{3} - \frac{2{,}4 \cdot 1{,}2}{2} \cdot 5{,}2\right] = 129\ \text{cm}^3,$$

$$M_{cap} = \frac{M_{lim}}{c} = \frac{S_p \cdot \sigma_c}{c} = \frac{129 \cdot 2\,500}{1{,}8} = 179\,000\ \text{daNcm} = 17{,}9\ \text{kNm}.$$

19.4. În care din poziţiile *a*, *b* din figura 19.4 trebuie aşezată o grindă de secţiune pătrată solicitată la încovoiere cu un moment dirijat după axa *Oz*, astfel ca momentul limită într-o solicitare total plastică să fie maxim? Materialul este ideal plastic.

Rezolvare. Momentul încovoietor limită pentru o solicitare total plastică are expresia (19.3):

$$M_{lim} = \sigma_c \cdot S_p.$$

Pentru cazul *a*, momentul static are valoarea:

$$S_{pa} = 2\,\frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^3}{4}.$$

Pentru cazul *b*, momentul static are valoarea:

$$S_{pb} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Deoarece momentele limită sînt proporţionale cu momentele statice:

$$\frac{M_{lim\,a}}{M_{lim\,b}} = \frac{S_{pa}}{S_{pb}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1{,}18,$$

se constată că

$$M_{lim\,a} > M_{lim\,b}$$

deci poziţia *a* permite o utilizare mai bună a materialului.

19.5. Care este momentul limită al unei secţiuni în formă de ⊤ (Fig. 19.5) cu grosimea inimii şi a tălpii egale?

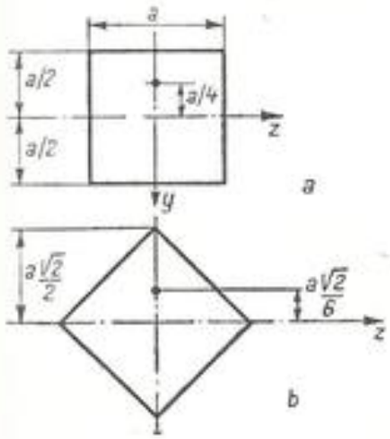


Fig. 19.4

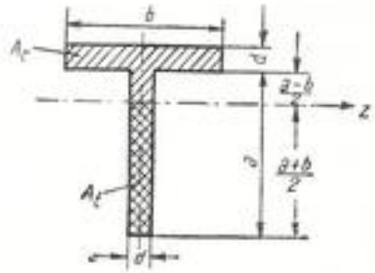


Fig. 19.5

Rezolvare. Din condiția de echilibru a eforturilor din secțiune, exprimată prin proiecția în lungul axei barei, rezultă că eforturile unitare fiind constante pe secțiune, aria zonei pe care acționează eforturi unitare de compresiune trebuie să fie egală cu aceea a zonei pe care acționează eforturi unitare de întindere. Deci axa neutră nu va trece prin centrul de greutate, ci va împărți secțiunea în două arii egale (v. relația 19.4).

Astfel, în cazul considerat, ariile zonelor comprimate și întinse vor fi jumătate din aria totală.

$$A_c = A_t = \frac{d}{2}(a + b).$$

Poziția axei neutre este reprezentată în figura 19.5.
Momentele statice ale celor două zone în raport cu axa neutră z vor fi

$$S_t = d\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{4} = \frac{d}{8}(a+b)^2,$$

$$S_c = bd\left(\frac{a-b+d}{2}\right) + d\frac{a-b}{2}\frac{a-b}{4} = \frac{d}{8}(a^2 + 2ab - 3b^2 + 4bd).$$

Momentul încovoietor limită este dat de relația (19.5)

$$M_{lim} = \sigma_c(S_t + S_c) = \frac{d}{8}[(a+b)^2 + a^2 + 2ab - 3b^2 + 4bd]\sigma_c$$

$$M_{lim} = \frac{d}{4}(a^2 - b^2 + 2ab + 2bd)\sigma_c.$$

19.6. Un stîlp cu secțiunea dreptunghiulară, de grosime unitară, este acționat de o forță normală P, la distanța a de o muchie. Să se studieze variația forței P capabilă a stîlpului, cînd lățimea x a secțiunii este variabilă. Studiul se va face folosind atît calculul prin metoda rezistențelor admisibile, cît și metoda capacității portante.

Rezolvare. a) Calculul cu metoda rezistențelor admisibile.

$$\sigma = \frac{\sigma_c}{c} = \frac{P}{x} + \frac{6P\left(\frac{x}{2} - a\right)}{x^2},$$

de unde:

$$P = \frac{x^2\sigma_c}{2(2x - 3a)c}.$$

b) Calculul prin metoda capacității portante (v. Fig. 19.6, *a*).

Ecuațiile de echilibru sînt:

$$z\sigma_c = (x - z)\sigma_c + P_{lim}$$

$$P_{lim} \cdot a + (x - z)\,\sigma_c\frac{x+z}{2} = z\sigma_c\frac{z}{2}.$$

Calculînd z din prima ecuație și înlocuind în a doua se obține

$$z = \frac{x\sigma_c + P_{lim}}{2\sigma_c},$$

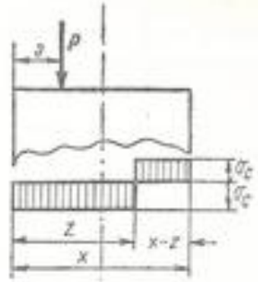


Fig. 19.6, *a*

$$P_{lim} = \sigma_c\,[(2a - x) + \sqrt{4a(a - x) + 2x^2}]\,;$$

de unde:

$$P = \frac{P_{lim}}{c} = \frac{\sigma_c}{c}[(2a - x) + \sqrt{4a(a - x) + 2x^2}].$$

În tabela 19.6 s-au trecut forțele P cînd x ia cîteva valori particulare.

Tabela 19.6

x	Calculul după metoda rezistențelor admisibile	Calculul prin metoda capacității portante
$x = 2a$	$P = 2a\,\frac{\sigma_c}{c}$	$P = 2a\,\frac{\sigma_c}{c}$
$x = 3a$	$P = 1{,}5a\,\frac{\sigma_c}{c}$	$P = 2{,}16a\,\frac{\sigma_c}{c}$
$x = 4a$	$P = 1{,}6a\,\frac{\sigma_c}{c}$	$P = 2{,}47a\,\frac{\sigma_c}{c}$
$x = 5a$	$P = 1{,}785a\,\frac{\sigma_c}{c}$	$P = 2{,}83a\,\frac{\sigma_c}{c}$
$x = 6a$	$P = 2a\,\frac{\sigma_c}{c}$	$P = 3{,}21a\,\frac{\sigma_c}{c}$
$x = 10a$	$P = 2{,}94a\,\frac{\sigma_c}{c}$	$P = 4{,}80a\,\frac{\sigma_c}{c}$
$x = 20a$	$P = 5{,}40a\,\frac{\sigma_c}{c}$	$P = 8{,}90a\,\frac{\sigma_c}{c}$

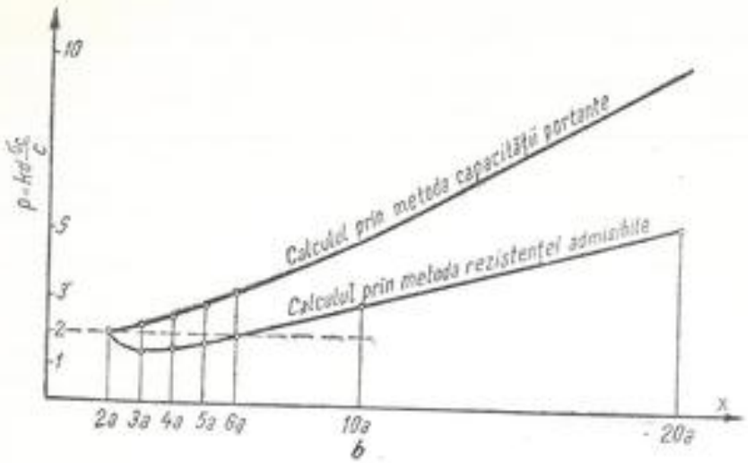


Fig. 19.6, *b*

Calculul cu rezistențe admisibile duce la rezultatul paradoxal că pentru intervalul $2a < x < 6a$, valoarea lui P este mai mică decît pentru $x = 2a$ (cazul compresiunii centrice), deși secțiunea este mai mare și mai înaltă. Calculul prin metoda capacității portante nu prezintă această anomalie.

Rezultatele de mai sus s-au reprezentat pe diagrama alăturată (Fig. 19.6,*b*).

19.7. O bară metalică de 2 m deschidere, cu secțiunea dreptunghiulară 3 × 10 cm, simplu rezemată la extremități, este încărcată la mijlocul său cu o forță $P = 3\,000$ daN. Se cere: 1. Să se determine porțiunea din grindă solicitată elastic și cea solicitată elasto-plastic. 2. Să se figureze zona plastificată în lungul barei, sub acțiunea sarcinii. Se dă $\sigma_c = 2\,500$ daN/cm².

Rezolvare. În porțiunea de bară solicitată elasto-plastic momentul încovoietor este (Fig. 19.7, *b*):

$$M = \sigma_c[3(5-y)(5+y)+2y^2] = 2\,500[75-y^2]\text{daNcm} = 25[75-y^2]\text{daNm}.$$

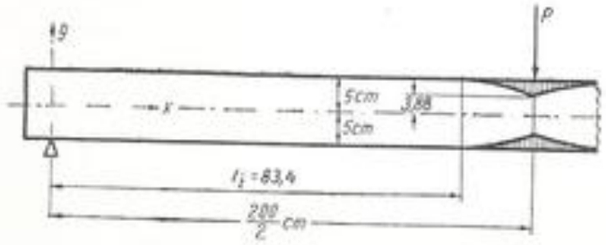


Fig. 19.7, *a*

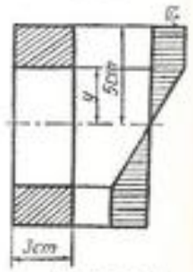


Fig. 19.7, *b*

Într-o secțiune, la distanța x de reazemul grinzii, momentul este $M = 1\,500\ x$.

Egalînd valorile lui M, se obține:

$$25[75 - y^2] = 1\,500\ x$$

sau:

$$y = \pm\sqrt{75 - 60\ x}.$$

Aceasta este ecuația curbei care separă zona elastică de cea plastificată a grinzii (Fig. 19.7, *a*). Trebuie precizat că y nu poate varia decît între 0 și ± 5.

19.8. O grindă metalică de 7,00 m, simplu rezemată la capete, are profilul din figura 19.8 și suportă la mijlocul deschiderii o forță concentrată de 400 kN. Care sînt eforturile unitare remanente după descărcarea grinzii? Se dă $\sigma_c = 2\,500$ daN/cm².

Rezolvare. Momentul de inerție și modulul de rezistență al secțiunii sînt:

$$I_x = \frac{1}{12}[20 \cdot 50^3 - 19 \cdot 45^3] \simeq 64\,000\ \text{cm}^4.$$

$$W_x = \frac{64\,000}{25} = 2\,560\ \text{cm}^3.$$

Momentul încovoietor maxim este:

$$M = \frac{400 \cdot 7}{4} = 700\ \text{kNm}.$$

Se vede că secțiunea este solicitată în stadiul plastic, deoarece:

$$\sigma_{ef} = \frac{M}{W} = \frac{7\,000\,000}{2\,560} = 2\,735 > \sigma_c.$$

Se consideră că dreptele care separă porțiunea elastică de cea solicitată în stadiul plastic se află la o distanță x de axa neutră. Pentru a determina valoarea lui x, se scrie condiția de echilibru:

$$\int_A \sigma y\, dA = M,$$

adică:

$$\left[20 \cdot 2{,}5 \cdot 47{,}5 + (22{,}5 - x)(22{,}5 + x) + \frac{1 \cdot (2x)^2}{6}\right] 2\,500 = 7\,000\,000,$$

de unde $x = 15{,}6$ cm.

Diagrama eforturilor unitare remanente are forma din figura 19.8.

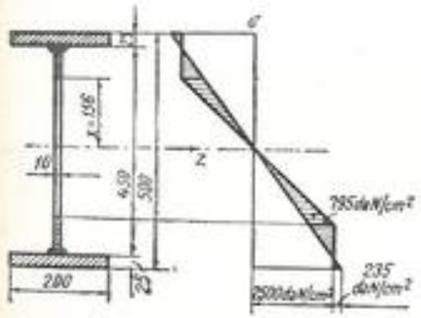


Fig. 19.8

La descărcare se aplică un cuplu egal cu M, sub acțiunea căruia se consideră că materialul se comportă elastic, deci diagrama eforturilor unitare are formă triunghiulară, cu valoarea maximă:

$$\sigma = \frac{7\,000\,000}{2\,560} = 2\,735 \text{ daN/cm}^2.$$

Din suprapunerea celor două diagrame rezultă eforturile unitare remanente care au valorile:

la fibra extremă, $\sigma = 2\,500 - 2\,735 = -235$ daN/cm²,

la $x = 15{,}6$ cm, $\sigma = 2\,500 - \frac{15{,}6}{25} \cdot 2\,735 \simeq 795$ daN/cm².

19.9. Să se afle valoarea sarcinii capabile P la sistemul din figura 19.9. Bara BC se va considera perfect rigidă (nedeformabilă) la încovoiere. Să se compare cu rezultatul obținut prin aplicarea metodei obișnuite de rezolvare a sistemelor static nedeterminate pentru cîteva cazuri particulare ale raportului $n = \frac{A_1}{A_2}$.

Rezolvare. a) Rezolvarea sistemului static nedeterminat (solicitarea în stadiul elastic).

Din ecuația de echilibru (momente în raport cu C) și de deformații (proporționalitatea alungirilor firelor cu distanțele la C), se obține sistemul de ecuații:

$$X_1 + 2X_2 = 3P; \quad A_1X_2 = 2A_2X_1 \tag{1}$$

ale cărui soluții sînt:

$$X_1 = 3P\frac{A_1}{A_1 + 4A_2};$$

$$X_2 = 6P\frac{A_2}{A_1 + 4A_2}. \tag{2}$$

Sarcina capabilă a sistemului va fi determinată de efortul unitar din firul *2* care este mai mare decît efortul unitar din firul *1*. În firul *2* se va atinge rezistența admisibilă cînd $X_2 = A_2\,\sigma_a = A_2\frac{\sigma_c}{c}$. Din relația (2) se obține atunci:

$$P = \frac{X_2(A_1 + 4A_2)}{6A_2} = \frac{(A_1 + 4A_2)\sigma_c}{6c} = \frac{(4 + n)A_2\,\sigma_c}{6c}; \left(n = \frac{A_1}{A_2}\right).$$

b) Metoda capacității portante. Sarcina limită a sistemului apare cînd în ambele fire se atinge limita de curgere.

Deci: $X_1 = A_1\sigma_c$; $X_2 = A_2\sigma_c$.

Din ecuația de momente, se obține:

$$P_{lim} = \frac{(A_1 + 2A_2)\sigma_c}{3} \text{ și}$$

$$P = \frac{P_{lim}}{c} = \frac{(A_1 + 2A_2)\sigma_c}{3c} = \frac{(2 + n)A_2\sigma_c}{3c}.$$

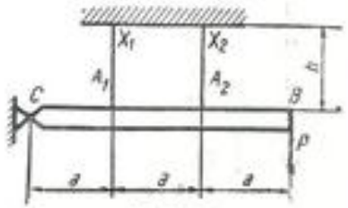


Fig. 19.9

Pentru cîteva valori ale lui n rezultatele comparative sînt date în tabela 19.9.

Tabela 19.9

n	P prin metoda rezistențelor admisibile	P prin metoda capacității portante	Economie
1	$0{,}833\frac{A_2\sigma_c}{c}$	$\frac{A_2\sigma_c}{c}$	20%
2	$\frac{A_2\sigma_c}{c}$	$1{,}33\frac{A_2\sigma_c}{c}$	33%
5	$1{,}5\frac{A_2\sigma_c}{c}$	$2{,}33\frac{A_2\sigma_c}{c}$	55%
10	$2{,}34\frac{A_2\sigma_c}{c}$	$4\frac{A_2\sigma_c}{c}$	71%

19.10. Să se afle săgeata maximă la o grindă simplu rezemată, încărcată la mijlocul său cu o sarcină concentrată, solicitată elastoplastic.

Se dau: profilul grinzii I 20; materialul OL 48; $I = 2140$ cm⁴; $W_z = 214$ cm³; $P = 180$ kN; $l = 2$ m; $\sigma_c = 2\,600$ daN/cm²; $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm²; $E_p = \text{const.} = 3 \cdot 10^5$ daN/cm².

Rezolvare. Ecuația diferențială a fibrei medii deformate este:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_r}{EI}, \quad \text{unde } M_r = \frac{M}{k}.$$

În zona elastică, $k = 1$, iar în cea plastică

$$k = \frac{E_p}{E} = \frac{3 \cdot 10^5}{2{,}1 \cdot 10^6} = 0{,}143.$$

Variația lui k în funcție de M este redată în figura 19.10, *b*.

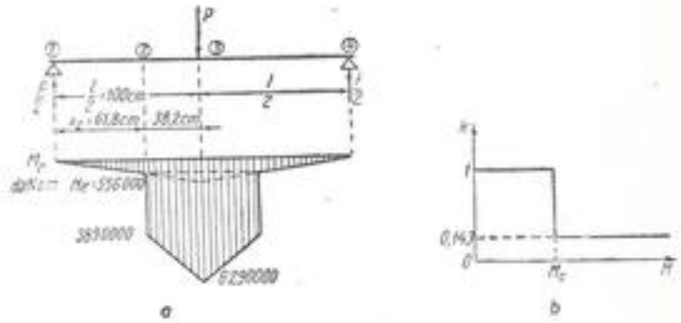


Fig. 19.10

Valorile lui M_e şi x_e rezultă din relaţiile:

$$M_e = W \cdot \sigma_e = 214 \cdot 2\,600 = 5{,}56 \cdot 10^5 \text{ daNcm}$$

$$M_e = \frac{Px_e}{2}$$

$$x_e = \frac{2M_e}{P} = \frac{2 \cdot 5{,}56 \cdot 10^5}{18\,000} = 61{,}8 \text{ cm.}$$

Diagrama momentului redus M_r are forma din figura 19.10, *a*, cu următoarele valori importante:

$$M'_{r_1} = M_e = \frac{Px_e}{2} = \frac{18\,000}{2} \cdot 61{,}8 = 556\,000 \text{ daNcm};$$

$$M''_{r_1} = \frac{M_e}{k} = \frac{556\,000}{0{,}143} = 3\,890\,000 \text{ daNcm};$$

$$M_{r3} = \frac{Pl}{4k} = \frac{18\,000 \cdot 200}{4 \cdot 0{,}143} = 6\,290\,000 \text{ daNcm.}$$

Săgeata maximă se va afla, din motive de simetrie, la mijlocul grinzii. Pentru determinarea acesteia se aplică în cazul de faţă metoda grafo-analitică de integrare a ecuaţiei fibrei medii deformate:

$$EI_z(\operatorname{tg}\varphi_4 - \operatorname{tg}\varphi_1) = -\Omega_{14}$$

$$\varphi_4 = -\varphi_1, \quad \operatorname{tg}\varphi_4 = -\operatorname{tg}\varphi_1$$

$$\Omega_{14} = 2\left[\frac{61{,}8 \cdot 556\,000}{2} + 38{,}2 \cdot 3\,890\,000 + \frac{38{,}2 \cdot 2\,400\,000}{2}\right] \simeq$$

$$\simeq 423\,000\,000 \text{ daN} \cdot \text{cm}^2$$

$$EI_z = 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 2{,}14 \cdot 10^3 = 4{,}5 \cdot 10^9 \text{ daN} \cdot \text{cm}^2;$$

$$-2 \operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{0{,}4230 \cdot 10^9}{4{,}5 \cdot 10^9};$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{0{,}4230 \cdot 10^9}{2 \cdot 4{,}5 \cdot 10^9} = 0{,}047;$$

$$EI_z(y_{max} - 100 \cdot 0{,}047) = -S_{31};$$

$$S_{31} = 17\,200\,000\left(\frac{61{,}8}{3} + 38{,}2\right) + 148\,700\,000 \cdot \frac{38{,}2}{2} + 45\,800\,000 \cdot \frac{38{,}2}{3} =$$

$$= 4{,}434 \cdot 10^9 \text{ daN} \cdot \text{cm}^3;$$

$$y_{max} = -\frac{4{,}43 \cdot 10^9}{4{,}5 \cdot 10^9} + 4{,}7 = 3{,}715 \text{ cm.}$$

Dacă profilul ar fi alcătuit dintr-un oţel special care să aibă:

$$\sigma_i > \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{Pl}{4W_z} = \frac{18\,000 \cdot 200}{4 \cdot 214} = 4200 \text{ daN/cm}^2,$$

s-ar putea aplica formula deformaţiilor de la grinzile solicitate în întregime elastic, rezultînd:

$$f_{max} = \frac{Pl^3}{48EI_z} = \frac{18\,000 \cdot 200^3}{48 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 2{,}14 \cdot 10^3} = 0{,}668 \text{ cm.}$$

19.11. Să se stabilească expresia momentului de răsucire capabil M_t al unei bare de secţiune inelară solicitată elastoplastic, considerînd modulul de plasticitate transversal $G_p = 0$. Să se stabilească raportul dintre momentul capabil al secţiunii solicitate în întregime plastic şi momentul capabil al aceleiaşi secţiuni solicitate pur elastic.

Rezolvare. Pentru $R_1 \leqslant r \leqslant a$ (v. Fig. 19.11)

$$\tau = \tau_e \frac{r}{a}.$$

Pentru $a \leqslant r \leqslant R_2$

$$\tau = \tau_e.$$

Momentul de răsucire capabil este:

$$M_t = \int_A \tau r \, dA = \int_{R_1}^{a} \tau_e \frac{r}{a} r \cdot 2\pi r dr +$$

$$+ \int_a^{R_2} \tau_e r \, 2\pi r dr = \tau_e \left[\frac{\pi(a^4 - R_1^4)}{2a} +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\pi(R_2^3 - a^3)\right].$$

Se notează $\frac{\pi(a^4 - R_1^4)}{2a} = W_{pe}$ modulul de rezistenţă polar al porţiunii din secţiune solicitată pur elastic. Atunci:

$$M_t = \tau_e \left[W_{pe} + \frac{2}{3}\pi(R_2^3 - a^3)\right]. \quad (1)$$

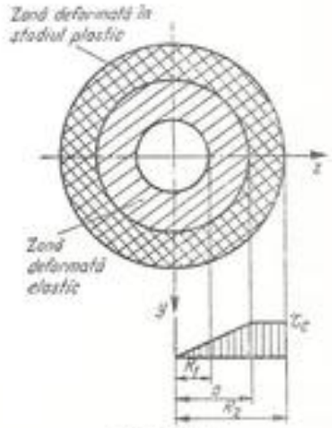


Fig. 19.11

Cînd secţiunea este solicitată total plastic, $a = R_1$ şi deci

$$M_{lim} = \frac{2}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)\,\tau_c. \qquad (2)$$

Pentru solicitarea pur elastică a secţiunii, $a = R_2$ şi deci:

$$M_e = \frac{\pi}{2}\,\frac{(R_2^4 - R_1^4)}{R_2}\,\tau_e;$$

$$\frac{M_{lim}}{M_e} = \frac{4}{3}\cdot\frac{R_2(R_2^3 - R_1^3)}{R_2^4 - R_1^4}.$$

19.12. O bară de secţiune circulară cu diametrul $D_2 = 80$ mm este solicitată elastoplastic de către un moment de răsucire $M_t = 265\,000$ daNcm. Să se determine raza miezului secţiunii solicitate pur elastic.

Se dă: $\tau_c = 2\,100$ daN/cm², $G_p = 0$.

Rezolvare. Din relaţia:

$$M_t = \tau_e\left[W_{pe} + \frac{2\pi}{3}(R_2^3 - a^3)\right] = \tau_e\left[\frac{\pi a^3}{2} + \frac{2\pi}{3}R_2^3 - \frac{2\pi}{3}a^3\right],$$

rezultă:

$$a = \sqrt[3]{\frac{\frac{M_t}{\tau_e} - \frac{2\pi}{3}R_2^3}{\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{265\,000}{2\,100} - \frac{2\pi}{3}4^3}{\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}}} = 2{,}49 \text{ cm}.$$

19.13. Un cadru este format din doi stîlpi şi o bară curbă semicircular, ca în figura 19.13, *a*. Se cere:

1) să se calculeze forţa capabilă P_{cap}, dacă $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm², $R = 0{,}8$ m, $a = 2{,}5$ cm. Calculul la flambaj al stîlpilor se va face considerîndu-i articulaţi la ambele capete. Se dau: $\lambda_0 = 105$ şi coeficientul de siguranţă la flambaj $c = 6$;

2) cît de mare poate fi o greutate Q, care cade în secţiunea *4* (în absenţa forţei P) de la înălţimea $h = 3$ cm, astfel încît efortul unitar dinamic maxim să nu depăşească rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm²?;

3) să se recalculeze forţa capabilă a cadrului, în ipoteza că secţiunea periculoasă este solicitată elastoplastic şi anume tălpile plastic şi inima elastic. Se dau $E_p = 0$, $\sigma_c = 2\,300$ daN/cm².

Rezolvare. Cadrul este simplu static nedeterminat. Se alege sistemul de bază ca în figura 19.13, *b*. Momentele încovoietoare sînt:

— datorită sarcinii P

$$M_{1-3}^0 = 0; \quad M_{3-4}^0 = -\frac{PR}{2}(1 - \cos\varphi),$$

— datorită sarcinii unitate (fig. 19.13, *c*)

$$m_{1-3} = -x; \quad m_{3-4} = R(5 - \sin\varphi).$$

Avînd în vedere că sistemul este simetric,

$$EI_y\delta_{20} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{PR}{2}(1 - \cos\varphi)R(5 - \sin\varphi)R\,d\varphi = -\frac{PR^3}{2}(5\pi - 11).$$

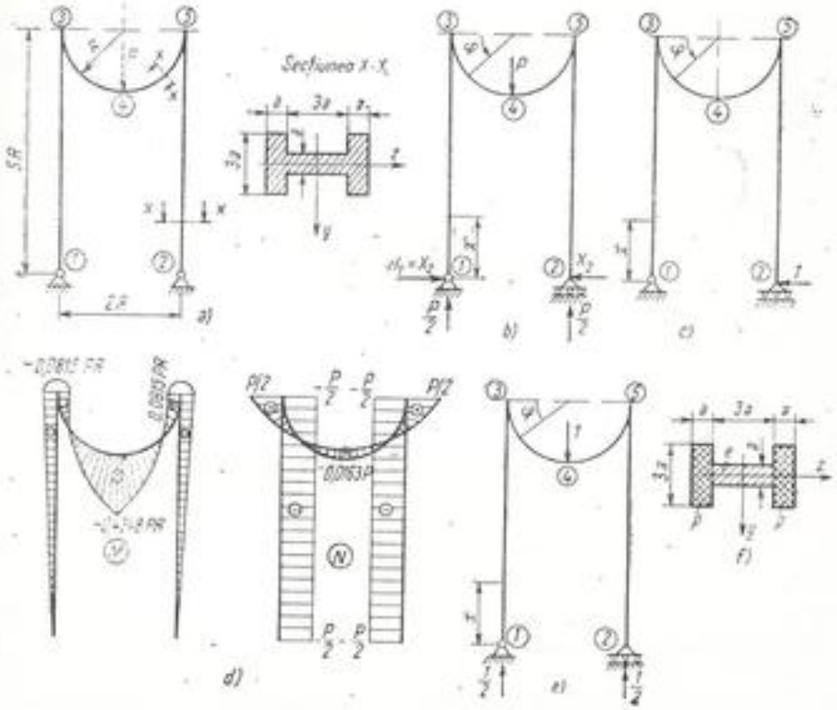


Fig. 19.13

$$EI_y\,\delta_{22} = 2\left[\int_0^{5R} x^2\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2(5-\sin\varphi)^2 R\,d\varphi\right] = \frac{R^3}{6}(380 + 153\,\pi).$$

Rezultă

$$X_2 = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} = \frac{15\pi - 33}{153\pi + 380}\,P = 0{,}0163\;P.$$

În figura 19.13, *d* s-au trasat diagramele N şi M_i ale cadrului static nedeterminat.

Observaţie: În secţiunile *3* şi *5*, momentul încovoietor are valoarea $-0{,}0815\;PR$ pentru stîlpi şi $+0{,}0815\;PR$ pentru bara curbă. Acestea nu corespund unor salturi efective ale momentului, ci sînt doar consecinţe ale convenţiilor de semne utilizate pentru momentele încovoietoare la bare drepte şi la bare curbe.

Secţiunea periculoasă este *4*, în care

$$|M_i|_{max} = 0{,}4348PR \quad \text{şi} \quad N = -0{,}0163P.$$

$$I_y = \frac{(5a)^3 3a}{12} - \frac{(3a)^3 2a}{12} = \frac{107}{4}\,a^4; \quad W_y = 10{,}7\;a^3$$

$$A = 2\cdot 3a^2 + 3a^2 = 9a^2.$$

Pentru bara curbă *3–4–5* (v. cap. 9)

$$e = \frac{I_G}{AR} = 0{,}232 \text{ cm};$$

$$d_1 = \frac{5a}{2} - e = 6{,}018 \text{ cm}; \quad R_1 = R - \frac{5a}{2} = 73{,}75 \text{ cm}.$$

Se aplică formula (9.9)

$$\sigma_{max} = -\frac{N}{A} - \frac{M}{Ae}\cdot\frac{d_1}{R_1} = \sigma_a \text{ din care rezultă}$$

$$P' = \frac{A\sigma_a}{0{,}0163 + \dfrac{0{,}4348R\,d_1}{eR_1}} = 6\,450 \text{ daN}.$$

Pentru calculul la flambaj

$$I_{min} = I_x = 2\,\frac{(3a)^3 a}{12} + \frac{a^3\cdot 3a}{12} = \frac{19}{4}\,a^4;$$

$$i_{min} = i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = 0{,}726a; \quad l_f = l = 5R;$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{5R}{0{,}726a} = 220 > \lambda_0.$$

Flambajul are loc în domeniul elastic. Pentru un stîlp $P_{cap\,(1\,st)} = \dfrac{\pi^2 EI_{min}}{l_f^2} = 4\,000$ daN, iar pentru întregul cadru (v. relaţia 12.5)

$$P'' = 2\cdot P_{cap(1\,st)} = 8\,000 > P'.$$

Cadrul poate suporta sarcina $P_{cap} = P' = 6\,450$ daN fără a exista pericolul de flambaj al stîlpilor.

Pentru calculul la solicitarea prin şoc trebuie determinată săgeata în punctul *4*. Momentele încovoietoare în cadrul dat sînt (fig. 19.13, *b*)

$$M_{1-3} = -0{,}0163\;Px;$$

$$M_{3-4} = -\frac{PR}{2}(1-\cos\varphi) + 0{,}0163PR(5-\sin\varphi).$$

Aplicînd sistemului de bază o forţă unitate în *4*, rezultă (v. fig. 19.13, *e*)

$$m_{1-3} = 0; \quad m_{3-4} = -\frac{R}{2}(1-\cos\varphi).$$

Se obţine

$$EI_y\,v_4 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{PR}{2}(1-\cos\varphi) + 0{,}0163PR(5-\sin\varphi)\right]\left[-\frac{R}{2}(1-\cos\varphi)\right]\times$$

$$\times\,Rd\varphi = 0{,}14\;PR^3.$$

Efortul unitar dinamic maxim trebuie să fie mai mic sau cel mult egal cu rezistenţa admisibilă, adică (v. relaţiile (13.12) şi (13.14))

$$\sigma_{d\,max} = \sigma_{st\,max}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}\right) \leqslant \sigma_a$$

în care P devine Q şi $\delta_{st} = v_4$.

Se face mai întîi un calcul aproximativ al lui Q considerînd bara curbă cu curbură mică (pentru calculul lui $\sigma_{st\,max}$) şi formula simplificată a multiplicatorului de impact ψ. Rezultă $Q = 247$ daN. Făcînd verificarea, de această dată cu formulele exacte ale lui $\sigma_{st\,max}$ şi ψ, se obţine un efort

unitar $\sigma_{d\,max}$ mai mare decît rezistenţa admisibilă σ_a. Prin încercări, se găseşte că pentru o valoare $Q = 210$ daN,

$$\sigma_{si\,max} = \frac{Q}{A}\left(0{,}0163 + \frac{0{,}4348\,Rd_1}{eR_1}\right) = 45{,}6 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{d\,max} = \sigma_{si\,max}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kEI_y}{0{,}14\,PR^3}}\right) = 1\,400 \text{ daN/cm}^2 = \sigma_a.$$

Pentru solicitarea elasto-plastică a secţiunii periculoase se va considera numai încovoierea barei curbe, presupusă cu curbură mică.

Momentul capabil al secţiunii este (v. fig. 19.13, *f*)

$$M_{cap} = \sigma_c(W_s + S_p), \text{ în care}$$

$$W_s = \frac{a(3a)^2}{6} = 1{,}5a^3;\ S_p = 2 \cdot 3a^2 \cdot 2a = 12a^3.$$

Forţa P^* pe care o poate prelua cadrul este

$$P^* = \frac{\sigma_c(1{,}5a^3 + 12a^3)}{0{,}4348R} = 14\,000 \text{ daN}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

19.14. Să se calculeze momentul încovoietor limită al unei grinzi cu secţiunea triunghiulară cu baza de 8 cm şi înălţimea de 9 cm. Să se facă comparaţie cu rezultatele obţinute prin aplicarea metodei rezistenţelor admisibile.

Răspuns. După metoda capacităţii portante: $M_{lim} = 63{,}1\sigma_c$; după metoda rezistenţelor admisibile: $M = 27\sigma_c$; economia rezultată prin aplicarea primei metode: 144%.

19.15. Să se calculeze momentul încovoietor limită al unei grinzi cu secţiune inelară cu diametrul de 12 cm şi grosimea peretelui de 1 cm. Se va lua $\sigma_c = 2\,500$ daN/cm² şi $c = 1{,}8$.

Calculul se va face prin metoda capacităţii portante şi după metoda rezistenţelor admisibile, comparîndu-se rezultatele.

Răspuns. Calculul după rezistenţe admisibile: $M_{cap} = 12{,}2$ kNm; calculul prin metoda capacităţii portante: $M_{cap} = 16{,}8$ kNm; economia rezultată: 38%.

CAPITOLUL 20 — TUBURI CU PEREŢI GROŞI

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

1. Un element izolat dintr-un tub de rază interioară R_1 şi de rază exterioară R_2 (Fig. 20.*a*), supus unei presiuni interioare p_i şi exterioare p_e, este solicitat de eforturile unitare principale:

σ_r — efort unitar normal, îndreptat în direcţia razei;

σ_t — efort unitar normal, îndreptat în direcţia tangentei la element;

σ_z — efort unitar normal, paralel cu axa longitudinală a tubului.

2. Mărimile acestor eforturi unitare, la o distanţă oarecare r de axul tubului, sînt date de relaţiile:

$$\sigma_r = \frac{R_1^2 p_i - R_2^2 p_e}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{(p_i - p_e)R_1^2 R_2^2}{r^2(R_2^2 - R_1^2)}; \tag{20.1}$$

$$\sigma_t = \frac{R_1^2 p_i - R_2^2 p_e}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(p_i - p_e)R_1^2 R_2^2}{r^2(R_2^2 - R_1^2)}; \tag{20.2}$$

$$\sigma_z = \frac{p_i R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{20.3}$$

În cazul particular cînd nu există presiune exterioară, deci $p_e = 0$, formulele (20.1) şi (20.2) devin:

$$\sigma_r = \frac{R_1^2 p_i}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right); \tag{20.4}$$

$$\sigma_t = \frac{R_1^2 p_i}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right). \tag{20.5}$$

Eforturile unitare la interiorul şi exteriorul tubului se obţin din formulele (20.4) şi (20.5) înlocuind pe rînd $r = R_1$ şi $r = R_2$:

$$(\sigma_r)_{r=R_1} = -p_i; \tag{20.6}$$

$$(\sigma_r)_{r=R_2} = 0;$$

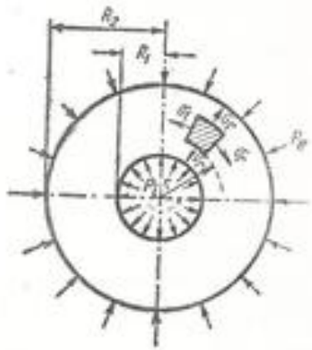


Fig. 20.*a*

$$(\sigma_{t_i})_{r=R_1} = \sigma_{t\,max} = \frac{p_i(R_2^2 + R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2}; \tag{20.7}$$

$$(\sigma_{t_e})_{r=R_2} = \frac{2p_i R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{20.8}$$

Eforturile unitare maxime apar în punctele din interiorul tubului.

3. Calculul tuburilor cu pereți groși se face cu ajutorul uneia dintre ipotezele de rezistență.

Efortul unitar echivalent, după cele patru ipoteze de rezistență, este dat de relațiile:

— Ipoteza I (ipoteza efortului unitar normal maxim):

$$\sigma_{ech_1} = \sigma_1. \tag{20.9}$$

— Ipoteza II (ipoteza deformației maxime):

$$\sigma_{ech_2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \tag{20.10}$$

— Ipoteza III (ipoteza efortului unitar tangențial maxim):

$$\sigma_{ech_3} = \sigma_1 - \sigma_3. \tag{20.11}$$

— Ipoteza IV (ipoteza energiei de deformație de schimbare a formei):

$$\sigma_{ech_4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}, \tag{20.12}$$

unde σ_1, σ_2 și σ_3 sînt eforturile unitare principale ce respectă ordinea:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Pentru verificarea sau dimensionarea unui tub se pune condiția:

$$\sigma_{ech} \leqslant \sigma_a, \tag{20.13}$$

efortul unitar echivalent calculîndu-se pe baza uneia dintre aceste ipoteze.

4. Cînd presiunea într-un tub se apropie ca valoare de rezistența admisibilă, grosimea tubului determinată după ipoteza I de rezistență poate lua valori foarte mari. Pentru presiuni care depășesc ca valoare rezistența admisibilă, dimensionarea tubului devine imposibilă. În acest caz se folosește fretajul. Acesta constă din introducerea unui cilindru de rază exterioară R_2 în interiorul altui cilindru avînd o rază interioară mai mică. Deoarece montajul nu se poate face la rece, se încălzește cilindrul exterior, care se dilată pînă cînd cilindrul interior poate intra în el. Prin răcire, cilindrul exterior strînge cilindrul interior, realizînd un cilindru fretat, care poate rezista la presiuni interioare mult mai mari decît un cilindru nefretat.

Diferența la rece dintre cele două raze R_2 ale cilindrilor, interior și exterior, este grosimea de fretaj δ. În urma fretajului, între cei doi cilindri de lungime egală, apare o presiune de fretaj, care dacă cilindrii sînt din același material, are expresia următoare:

$$p = \frac{\delta E(R_2^2 - R_1^2)(R_3^2 - R_2^2)}{2R_2^2(R_3^2 - R_1^2)}, \tag{20.14}$$

în care: R_1, R_2 și R_3 sînt razele din figura 20.*b*.

Fig. 20. *b*

Eforturile unitare în punctele din interiorul și exteriorul celor doi cilindri sînt (dacă nu există presiune exterioară p_e):

— pe fața interioară a cilindrului interior:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{r_i} &= -p_i, \\ \sigma_{t_i} &= p_i\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - 2p\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}; \end{aligned}\right\} \tag{20.15}$$

— pe fața exterioară a cilindrului interior:

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_{r_i} &= -p_i\frac{R_1^2(R_2^2 - R_1^2)}{R_2^2(R_2^2 - R_1^2)} - p, \\ \sigma'_{t_i} &= p_i\frac{R_1^2(R_2^2 + R_1^2)}{R_2^2(R_2^2 - R_1^2)} - p\frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}; \end{aligned}\right\} \tag{20.16}$$

— pe fața interioară a cilindrului exterior:

$$\left.\begin{aligned} \sigma''_{r_i} &= \sigma'_{r_i}, \\ \sigma''_{t_i} &= p_i\frac{R_1^2(R_2^2 + R_1^2)}{R_2^2(R_2^2 - R_1^2)} + p\frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}; \end{aligned}\right\} \tag{20.17}$$

— pe fața exterioară a cilindrului exterior:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{r_e} &= 0, \\ \sigma_{t_e} &= \frac{2p_i R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{2pR_3^2}{R_3^2 - R_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{20.18}$$

În cazul cînd se execută fretajul unui cilindru exterior pe un cilindru interior plin, presiunea de fretaj se obține din formula (20.14), înlocuind $R_1 = 0$:

$$p = \frac{\delta E R_2^2(R_3^2 - R_2^2)}{2R_2^2 R_3^2} = \frac{\delta E(R_3^2 - R_2^2)}{2R_2 R_3^2}. \tag{20.19}$$

5. În cazul în care efortul unitar într-un tub supus la o presiune interioară depășește limita de curgere, o parte din tub sau întregul tub intră în stadiul de deformație plastică. Tubul ajunge *în întregime* în stadiul deformației plastice dacă:

$$p_i - p_e = 2k \ln \frac{R_2}{R_1}, \tag{20.20}$$

considerînd modulul de plasticitate $E_p = 0$.

În relația de mai sus:

p_i este presiunea interioară;

p_e — presiunea exterioară,

$$(\sigma_{t_1})_{r=R_1} = \sigma_{t\,max} = \frac{p_i(R_2^2 + R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2}; \tag{20.7}$$

$$(\sigma_{t_2})_{r=R_2} = \frac{2p_i R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{20.8}$$

Eforturile unitare maxime apar în punctele din interiorul tubului.

3. Calculul tuburilor cu pereți groși se face cu ajutorul uneia dintre ipotezele de rezistență.

Efortul unitar echivalent, după cele patru ipoteze de rezistență, este dat de relațiile:

— Ipoteza I (ipoteza efortului unitar normal maxim):

$$\sigma_{ech_1} = \sigma_1. \tag{20.9}$$

— Ipoteza II (ipoteza deformației maxime):

$$\sigma_{ech_2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \tag{20.10}$$

— Ipoteza III (ipoteza efortului unitar tangențial maxim);

$$\sigma_{ech_3} = \sigma_1 - \sigma_3. \tag{20.11}$$

— Ipoteza IV (ipoteza energiei de deformație de schimbare a formei):

$$\sigma_{ech_4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}, \tag{20.12}$$

unde σ_1, σ_2 și σ_3 sînt eforturile unitare principale ce respectă ordinea:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Pentru verificarea sau dimensionarea unui tub se pune condiția:

$$\sigma_{ech} \leqslant \sigma_a, \tag{20.13}$$

efortul unitar echivalent calculîndu-se pe baza uneia dintre aceste ipoteze.

4. Cînd presiunea într-un tub se apropie ca valoare de rezistența admisibilă, grosimea tubului determinată după ipoteza I de rezistență poate lua valori foarte mari. Pentru presiuni care depășesc ca valoare rezistența admisibilă, dimensionarea tubului devine imposibilă. În acest caz se folosește fretajul. Acesta constă din introducerea unui cilindru de rază exterioară R_2 în interiorul altui cilindru avînd o rază interioară mai mică. Deoarece montajul nu se poate face la rece, se încălzește cilindrul exterior, care se dilată pînă cînd cilindrul interior poate intra în el. Prin răcire, cilindrul exterior strînge cilindrul interior, realizînd un cilindru fretat, care poate rezista la presiuni interioare mult mai mari decît un cilindru nefretat.

Diferența la rece dintre cele două raze R_2 ale cilindrilor, interior și exterior, este grosimea de fretaj δ. În urma fretajului, între cei doi cilindri de lungime egală, apare o presiune de fretaj, care dacă cilindrii sînt din același material, are expresia următoare:

$$p = \frac{\delta E(R_3^2 - R_2^2)(R_2^2 - R_1^2)}{2R_2^2(R_3^2 - R_1^2)}, \tag{20.14}$$

în care: R_1, R_2 și R_3 sînt razele din figura 20.*b*.

Efort urile unitare în punctele din interiorul și exterior ul celor doi cilindri sînt (dacă nu există presiune exterioară p_e):

— pe fața interioară a cilindrului interior:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{r_1} &= -p_i, \\ \sigma_{t_1} &= p_i\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - 2p\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}; \end{aligned}\right\} \tag{20.15}$$

Fig. 20. *b*

— pe fața exterioară a cilindrului interior:

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_{r_1} &= -p_i\frac{R_1^2(R_2^2 - R_1^2)}{R_2^2(R_2^2 - R_1^2)} - p, \\ \sigma'_{t_1} &= p_i\frac{R_1^2(R_2^2 + R_1^2)}{R_2^2(R_2^2 - R_1^2)} - p\frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}; \end{aligned}\right\} \tag{20.16}$$

— pe fața interioară a cilindrului exterior:

$$\left.\begin{aligned} \sigma''_{r_2} &= \sigma'_{r_2}, \\ \sigma''_{t_2} &= p_i\frac{R_1^2(R_2^2 + R_1^2)}{R_2^2(R_2^2 - R_1^2)} + p\frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}; \end{aligned}\right\} \tag{20.17}$$

— pe fața exterioară a cilindrului exterior:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{r_3} &= 0, \\ \sigma_{t_3} &= \frac{2p_i R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{2pR_3^2}{R_3^2 - R_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{20.18}$$

În cazul cînd se execută fretajul unui cilindru exterior pe un cilindru interior plin, presiunea de fretaj se obține din formula (20.14), înlocuind $R_1 = 0$:

$$p = \frac{\delta E R_2^2(R_3^2 - R_2^2)}{2R_2^2R_3^2} = \frac{\delta E(R_3^2 - R_2^2)}{2R_3R_3^2}. \tag{20.19}$$

5. În cazul în care efortul unitar într-un tub supus la o presiune interioară depășește limita de curgere, o parte din tub sau întregul tub intră în stadiul de deformație plastică. Tubul ajunge *în întregime* în stadiul deformației plastice dacă:

$$p_i - p_e = 2k\ln\frac{R_3}{R_1}, \tag{20.20}$$

considerînd modulul de plasticitate $E_p = 0$.

În relația de mai sus:

p_i este presiunea interioară;

p_e — presiunea exterioară,

iar k se poate lua:

$$k = 0{,}5\sigma_c, \tag{20.21}$$

σ_c fiind limita de curgere a materialului.

B. PROBLEME REZOLVATE

20.1. Un cilindru cu pereţi groşi, de rază interioară $R_1 = 10$ cm şi rază exterioară $R_2 = 13$ cm, este supus unei presiuni interioare $p_i = 500$ daN/cm².

Se cer:

1) eforturile unitare la raza interioară şi la cea exterioară a cilindrului;

2) diagramele de variaţie ale eforturilor unitare σ_r şi σ_t.

Rezolvare. 1) Pentru determinarea eforturilor unitare la raza interioară şi la cea exterioară a tubului, se aplică formulele (20.6), (20.7), (20.8):

$$\sigma_{r_1} = -p_i = -500 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{r_2} = 0,$$

$$\sigma_{t_1} = \sigma_{max} = \frac{p_i(R_2^2 + R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{500(13^2 + 10^2)}{13^2 - 10^2} = 1\,950 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{t_2} = \frac{2p_i R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^2}{13^2 - 10^2} = 1\,450 \text{ daN/cm}^2.$$

Dacă cilindrul are fund, trebuie calculat şi efortul unitar σ_z, care este constant pe grosimea tubului. Acesta, după formula (20.3), este:

$$\sigma_z = \frac{p_i R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{500 \cdot 10^2}{13^2 - 10^2} = 725 \text{ daN/cm}^2.$$

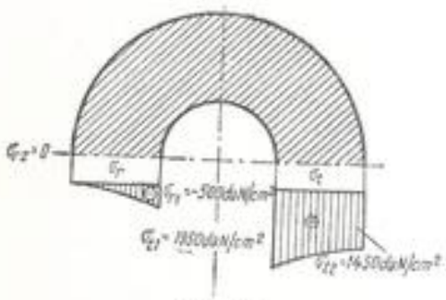


Fig. 20.1

2) Diagramele de variaţie a eforturilor unitare se trasează, ţinînd seamă de relaţiile (20.1) şi (20.2), care dau variaţia lui σ_r şi σ_t, în funcţie de rază, şi de valorile determinate anterior (Fig. 20.1).

20.2. Să se dimensioneze un tub de oţel de lungime infinită, supus unei presiuni interioare $p = 1\,000$ daN/cm², dacă rezistenţa admisibilă se ia $\sigma_a = 3\,000$ daN/cm², după toate ipotezele de rezistenţă[1]. Se dau: raza interioară $R_1 = 1$ cm; $\mu = 0{,}3$.

[1] Această aplicaţie are scop didactic; în practică dimensionarea se face numai cu una din teoriile de rezistenţă (v. *Manualul inginerului mecanic*, Ed. tehnică, 1973, pag. 637).

Rezolvare.

a) *Ipoteza I.* Efortul unitar maxim apare la interiorul tubului şi are valoarea dată de relaţia (20.7).

$$\sigma_{ech_1} = \sigma_1 = \sigma_{t\,max} = p\,\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{1}$$

Introducînd această valoare în relaţia (20.13) se obţine:

$$R_2' = R_1\sqrt{\frac{\sigma_a + p}{\sigma_a - p}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{3\,000 + 1\,000}{3\,000 - 1\,000}} = 1{,}41 \text{ cm}. \tag{2}$$

b) *Ipoteza a II-a.* Deoarece tubul se consideră de lungime infinită, nu se ţine seamă de efortul unitar σ_z care apare în lungul tubului şi se consideră solicitarea ca o stare plană de eforturi unitare. În acest caz, efortul unitar echivalent conform celei de-a doua ipoteze de rezistenţă, potrivit relaţiei (20.10) în care $\sigma_3 = 0$, este:

$$\sigma_{ech_2} = \sigma_1 - \mu\sigma_2. \tag{3}$$

În cazul tubului din problemă, aplicînd condiţia (20.13) se obţine:

$$\sigma_1 = \sigma_{t\,max} = p\,\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2};$$

$$\sigma_2 = \sigma_{r\,max} = -p;$$

$$p\,\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - (-\mu p) = \sigma_a.$$

De aici se obţine:

$$R_2'' = R_1\sqrt{\frac{\sigma_a + (1-\mu)p}{\sigma_a - (1+\mu)p}} = R_1\sqrt{\frac{\sigma_a + 0{,}7p}{\sigma_a - 1{,}3p}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{3000 + 0{,}7 \cdot 1000}{3000 - 1{,}3 \cdot 1000}} = 1{,}48 \text{ cm}. \tag{4}$$

c) *Ipoteza a III-a.* Conform ipotezei a III-a se aplică relaţiile (20.11) şi (20.13)

$$\sigma_{ech_3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant \sigma_a \tag{5}$$

$$p\,\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - (-p) = \sigma_a,$$

$$R_2''' = R_1\sqrt{\frac{\sigma_a}{\sigma_a - 2p}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{3\,000}{3\,000 - 2 \cdot 1\,000}} = 1{,}73 \text{ cm}. \tag{6}$$

d) *Ipoteza a IV-a.* Relaţia (20.12) devine, pentru $\sigma_2 = 0$

$$\sigma_{ech_4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3}. \tag{7}$$

Înlocuind pe σ_1 şi σ_3 cu valorile determinate mai sus şi utilizînd şi (20.13) se obţine

$$\sigma_{ech_4} = \frac{p\sqrt{3R_2^4 + R_1^4}}{R_2^2 - R_1^2} \leqslant \sigma_a. \tag{8}$$

Rezolvînd ecuaţia de gradul 2 ce se obţine din (8), se determină raza R_2^{IV} din relaţia

$$R_2^{IV} = R_1 \sqrt{\frac{\eta + \sqrt{4\eta - 3}}{\eta - 3}}, \tag{9}$$

unde

$$\eta = \left(\frac{\sigma_a}{p}\right)^2. \tag{10}$$

Făcînd înlocuirile numerice se găseşte:

$$\eta = 9 \text{ şi } R_2^{IV} = 1{,}57 \text{ cm}.$$

20.3. Un cilindru de presă avînd raza interioară $R_1 = 20$ cm şi raza exterioară $R_2 = 24$ cm, este supus unei presiuni interioare $p = 500$ daN/cm². Să se verifice cilindrul după a II-a, a III-a şi a IV-a ipoteză de rezistenţă, ţinînd seamă de influenţa fundului cilindrului, dacă $\sigma_a = 3\,500$ daN/cm². Se va lua $\mu = 0{,}3$.

Rezolvare. Eforturile unitare maxime, care apar la raza interioară a cilindrului, au valorile date de formulele (20.7), (20.6), (20.3):

$$\sigma_{t\,max} = p\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = 500 \cdot \frac{24^2 + 20^2}{24^2 - 20^2} \simeq 2\,800 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{r\,max} = -p = -500 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_x = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{500 \cdot 20^2}{24^2 - 20^2} = 1\,135 \text{ daN/cm}^2.$$

a) *Ipoteza a II-a.* După ipoteza a II-a, pentru starea spaţială de eforturi unitare, se utilizează relaţiile (20.10) şi (20.13)

$$\sigma_{ech_2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leqslant \sigma_a,$$

unde $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. În cazul problemei: $\sigma_1 = \sigma_{t\,max}$; $\sigma_2 = \sigma_x$; $\sigma_3 = \sigma_{r\,max}$; $\sigma_{ech_2} = 2\,800 - 0{,}3(-500 + 1\,135) = 2\,800 - 190 = 2\,610$ daN/cm² $< \sigma_a$.

b) *Ipoteza a III-a.* După ipoteza a III-a se aplică relaţiile (20.11) şi (20.13)

$$\sigma_{ech_3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant \sigma_a,$$

$$\sigma_{ech_3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\,800 - (-500) = 3\,300 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

c) *Ipoteza a IV-a.* Efortul unitar echivalent are valoarea:

$$\sigma_{ech_4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[(2\,800 - 1\,135)^2 + (1135 + 500)^2 + (-500 - 2800)^2\right]} = 2860 \text{ daN/cm}^2.$$

Se vede că:

$$\sigma_{ech_4} < \sigma_a.$$

Rezultă că după toate cele trei ipoteze de calcul cilindrul rezistă în bune condiţii.

20.4. Un cilindru de oţel este supus unei presiuni interioare $p_i = 2\,000$ daN/cm². Cilindrul este fretat şi se execută dintr-un tub interior de raze $R_1 = 5$ cm şi $R_2 = 10$ cm şi din unul exterior de raze $R_2 = 10$ cm şi $R_3 = 15$ cm. Grosimea de fretaj este $\delta = 0{,}08$ mm. Se cere să se verifice cilindrul după cea de-a treia ipoteză, dacă $\sigma_a = 3\,500$ daN/cm², determinînd:

1) variaţia eforturilor unitare dacă tubul s-ar executa dintr-o singură piesă de raze $R_1 = 5$ cm şi $R_3 = 15$ cm;
2) presiunea de fretaj;
3) variaţia eforturilor unitare ţinînd seamă de efectul fretajului.

Rezolvare. 1) În cazul cînd tubul se execută dintr-o singură piesă, eforturile unitare maxime sînt date de relaţiile (20.6)—(20.9):

$$\sigma_{r_1} = -2\,000 \text{ daN/cm}^2 = -p_i;$$

$$\sigma_{t_1} = p_i\frac{R_3^2 + R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} = 2\,000\,\frac{15^2 + 5^2}{15^2 - 5^2} = 2\,500 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{r_3} = 0;$$

$$\sigma_{t_3} = \frac{2p_iR_1^2}{R_3^2 - R_1^2} = \frac{2 \cdot 2\,000 \cdot 5^2}{15^2 - 5^2} = 500 \text{ daN/cm}^2.$$

După cea de-a treia ipoteză se obţine:

$$\sigma_{ech_3} = \sigma_{t_1} - \sigma_{r_1} = 2\,500 - (-2\,000) = 4\,500 \text{ daN/cm}^2 > \sigma_a.$$

Se vede că fretajul este necesar.

2) Presiunea de fretaj se obţine din relaţia (20.14):

$$p = \frac{3E(R_3^2 - R_2^2)(R_2^2 - R_1^2)}{2R_2^2(R_3^2 - R_1^2)} = \frac{0{,}008 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot (10^2 - 5^2)(15^2 - 10^2)}{2 \cdot 10^2 \cdot (15^2 - 5^2)} = 394 \text{ daN/cm}^2.$$

3) Eforturile unitare cînd se ţine seamă de fretaj sînt date de relaţiile (20.15)—(20.18).

— La raza interioară a cilindrului interior:

$$\begin{cases} \sigma_{r_1} = -p_i = -2\,000 \text{ daN/cm}^2; \\ \sigma_{t_1} = p_i\dfrac{R_3^2 + R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} - 2p\dfrac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} = 2\,000\,\dfrac{15^2 + 5^2}{15^2 - 5^2} - 2 \cdot 394 \cdot \dfrac{10^2}{10^2 - 5^2} = \\ \qquad = 2\,500 - 1\,051 = 1\,449 \text{ daN/cm}^2. \end{cases}$$

— La raza exterioară a cilindrului interior:

$$\begin{cases} \sigma'_{r_1} = -p_i \dfrac{R_1^2(R_2^2 - R_3^2)}{R_2^2(R_2^2 - R_1^2)} - p = -2\,000 \dfrac{5^2(15^2 - 10^2)}{10^2(15^2 - 5^2)} - 394 = \\ \qquad = -312 - 394 = -706 \text{ daN/cm}^2; \\ \sigma'_{t_1} = p_i \dfrac{R_1^2(R_2^2 + R_3^2)}{R_2^2(R_2^2 - R_1^2)} - p \dfrac{R_2^2 + R_3^2}{R_2^2 - R_3^2} = 2\,000 \dfrac{5^2(10^2 + 15^2)}{10^2(15^2 - 5^2)} - 394 \dfrac{5^2 + 10^2}{10^2 - 5^2} = \\ \qquad = 812 - 656 = 156 \text{ daN/cm}^2. \end{cases}$$

— La raza interioară a cilindrului exterior:

$$\begin{cases} \sigma''_{r_2} = \sigma'_{r_2} = -706 \text{ daN/cm}^2; \\ \sigma''_{t_2} = p_i \dfrac{R_1^2(R_2^2 + R_3^2)}{R_2^2(R_2^2 - R_1^2)} + p \dfrac{R_2^2 + R_3^2}{R_2^2 - R_3^2} = 2\,000 \dfrac{5^2(10^2 + 15^2)}{10^2(15^2 - 5^2)} + 394 \dfrac{10^2 + 15^2}{15^2 - 10^2} = \\ \qquad = 812 + 1\,024 = 1\,836 \text{ daN/cm}^2. \end{cases}$$

— La raza exterioară a cilindrului exterior:

$$\begin{cases} \sigma_{r_3} = 0; \\ \sigma_{t_3} = \dfrac{2p_i R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} + \dfrac{2pR_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = \dfrac{2 \cdot 2\,000 \cdot 5^2}{15^2 - 5^2} + \dfrac{2 \cdot 394 \cdot 10^2}{15^2 - 10^2} = 500 + 630 = \\ \qquad = 1\,130 \text{ daN/cm}^2. \end{cases}$$

Se vede că punctele cele mai solicitate sînt cele din interiorul ambilor cilindri. Utilizînd relația (20.11) se poate face verificarea pentru aceste puncte:

$$\sigma_{t_1} - \sigma_{r_1} = 1\,448 - (-2000) = \\ = 3\,448 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a;$$

$$\sigma''_{t_2} - \sigma''_{r_2} = 1\,836 - (-706) = \\ = 2\,542 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

Se observă că prin fretaj valoarea eforturilor unitare maxime în cilindru scade. Diagramele eforturilor unitare pentru cele două cazuri sînt reprezentate în figura 20.4.

În figura 20.4, *a* este trasată diagrama de variație a eforturilor unitare pentru cilindrul dintr-o singură bucată, în figura 20.4, *b* este trasată diagrama pentru cilindrul fretat, iar în figura 20.4, *c* sînt suprapuse cele două diagrame pentru a putea fi comparate.

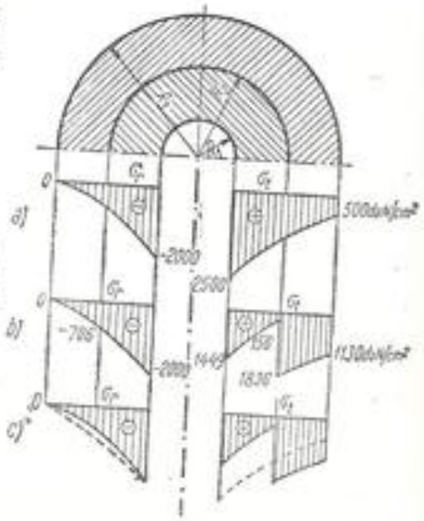


Fig. 20.4

20.5. Să se determine mărimea razei R_2 și presiunea de fretaj, astfel încît, în vederea unei utilizări optime a materialului, efortul unitar echivalent $\sigma_{ech_1} = \sigma_t - \sigma_r$ la razele interioare a doi cilindri fretați să fie același și egal cu rezistența admisibilă a materialului.

Rezolvare. După cea de-a treia ipoteză de rezistență dacă se notează cu indicele 1 eforturile unitare la raza interioară a cilindrului interior și cu indicele 2 eforturile unitare la raza interioară a cilindrului exterior, se obține:

$$\sigma_{t_1} - \sigma_{r_1} \leqslant \sigma_a. \tag{1}$$

$$\sigma_{t_2} - \sigma_{r_2} \leqslant \sigma_a. \tag{2}$$

Pentru ca materialul să fie utilizat cît mai bine conform enunțului, rezultă:

$$\sigma_{ech_1} = \sigma_{t_1} - \sigma_{r_1} = \sigma_{t_2} - \sigma_{r_2} = \sigma_a. \tag{3}$$

Din formulele (20.15) și (20.17) se obține:

$$\sigma_{r_1} = -p_i;$$

$$\sigma_{t_1} = \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} p_i - \frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} p;$$

$$\sigma_{r_2} = -\frac{p_i R_1^2(R_2^2 - R_3^2)}{R_2^2(R_2^2 - R_1^2)} - p;$$

$$\sigma_{t_2} = \frac{p_i R_1^2(R_2^2 + R_3^2)}{R_2^2(R_2^2 - R_1^2)} + p \frac{R_2^2 + R_3^2}{R_2^2 - R_3^2}.$$

Înlocuind aceste relații în (3) rezultă:

$$\left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + 1\right) p_i - \frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} p = p_i \frac{2R_1^2 R_2^2}{R_2^2(R_2^2 - R_1^2)} + p\left(\frac{R_2^2 + R_3^2}{R_2^2 - R_3^2} + 1\right).$$

Din această relație, grupînd termenii, se poate obține:

$$p\left(\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_3^2} + \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\right) = p_i \frac{R_2^2(R_2^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2) \cdot R_2^2}. \tag{4}$$

Din relația (4) se determină presiunea de fretaj p; înlocuind valorile lui σ_{t_1}, σ_{r_1} și p în formula (3) se obține după unele reduceri:

$$\sigma_{ech_1} = \sigma_{t_1} - \sigma_{r_1} = \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} p_i - \frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} p + p_i = \frac{2p_i R_1^2 R_2^2}{2R_1^2 R_2^2 - R_2^4 R_1^2 - R_2^4}. \tag{5}$$

Dimensiunea R_2 optimă se determină punînd condiția ca efortul unitar echivalent să fie minim; pentru aceasta se egalează cu zero derivata expresiei (5), considerînd R_2 variabil

$$\frac{d\sigma_{ech_1}}{dR_2} = \frac{2R_2(R_2^4 - R_1^4 R_2^2)}{(2R_1^2 R_2^2 - R_2^4 R_1^2 - R_2^4)^2} = 0. \tag{6}$$

Efortul unitar echivalent este minim pentru

$$R_2 = \sqrt{R_1 R_3}. \tag{7}$$

Efortul unitar echivalent minim se obţine înlocuind relaţia (7) în relaţia(5):

$$\sigma_{ech_i} = \frac{p_i R_3}{R_3 - R_1}. \tag{8}$$

Punînd condiţia $\sigma_{ech_i} = \sigma_a$ se determină raza optimă:

$$R_3 = \frac{\sigma_a R_1}{\sigma_a - p_i}. \tag{9}$$

Înlocuind valoarea (7) în (4) se obţine:

$$p\left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_1 R_3} + \frac{R_1 R_3}{R_1 R_3 - R_1^2}\right) = p_i \frac{R_3^2(R_1 R_3 - R_1^2)}{(R_3^2 - R_1^2) R_1 R_3},$$

iar presiunea optimă de fretaj este

$$p = p_i \frac{R_3 - R_1}{2(R_3 + R_1)}. \tag{10}$$

20.6. Să se dimensioneze un cilindru fretat, de rază interioară $R_1 = 15$ cm, supus unei presiuni $p_i = 1\,500$ daN/cm², dacă rezistenţa admisibilă este $\sigma_a = 3\,000$ daN/cm². Să se determine presiunea şi grosimea de fretaj optime, utilizînd rezultatele din problema 20.5.

Rezolvare. Din relaţiile (9) şi (7) ale problemei 20.5 se obţine

$$R_3 = \frac{\sigma_a R_1}{\sigma_a - p_i} = \frac{3\,000 \cdot 15}{3\,000 - 1\,500} = 30 \text{ cm};$$

$$R_2 = \sqrt{R_1 R_3} = \sqrt{15 \cdot 30} = 21{,}2 \text{ cm}.$$

Presiunea optimă de fretaj se determină din relaţia (10) (problema 20.5):

$$p = p_i \frac{R_3 - R_1}{2(R_3 + R_1)} = \frac{1\,500(30 - 15)}{2(30 + 15)} = 250 \text{ daN/cm}^2.$$

Grosimea de fretaj se obţine din relaţia (20.14), în funcţie de R_2, înlocuind celelalte raze şi presiunea de fretaj p:

$$\delta = \frac{2pR_1^2(R_3^2 - R_1^2)}{E(R_3^2 - R_2^2)(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{2p_i R_2}{E} = \frac{2 \cdot 1\,500 \cdot 21{,}2}{2{,}1 \cdot 10^6} \simeq 0{,}03 \text{ cm} = 0{,}3 \text{ mm}.$$

Verificarea cilindrului fretat se face aplicînd formulele (20.15) şi (20.17), pentru determinarea eforturilor unitare la razele interioare ale celor doi cilindri componenţi:

$$\begin{cases} \sigma_{r_1} = -p_i = -1\,500 \text{ daN/cm}^2; \\ \sigma_{t_1} = p_i \dfrac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - 2p \dfrac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = 1\,500 \dfrac{30^2 + 15^2}{30^2 - 15^2} - \\ \qquad - 2 \cdot 250 \dfrac{21{,}2^2}{21{,}2^2 - 15^2} = 1\,500 \text{ daN/cm}^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{r_2} = -p_i \dfrac{R_2^2(R_3^2 - R_2^2)}{R_3^2(R_2^2 - R_1^2)} - p = -1\,500 \dfrac{15^2(30^2 - 21{,}2^2)}{21{,}2^2(30^2 - 15^2)} - 250 = \\ \qquad = -500 - 250 = -750 \text{ daN/cm}^2; \\ \sigma_{t_2} = p_i \dfrac{R_2^2(R_3^2 + R_1^2)}{R_3^2(R_2^2 - R_1^2)} + p \dfrac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = 1\,500 \dfrac{15^2(30^2 + 21{,}2^2)}{21{,}2^2(30^2 - 15^2)} + \\ \qquad + 250 \dfrac{21{,}2^2 + 30^2}{30^2 - 21{,}2^2} = 1\,500 + 750 = 2\,250 \text{ daN/cm}^2. \end{cases}$$

$$\sigma_{t_1} - \sigma_{r_1} = 1\,500 - (-1\,500) = 3\,000 = \sigma_a;$$

$$\sigma_{t_2} - \sigma_{r_2} = 2\,250 - (-750) = 3\,000 = \sigma_a.$$

Cilindrul este bine dimensionat.

20.7. Să se calculeze presiunea de fretaj şi eforturile unitare maxime care apar în butucul unui disc care se fretează pe un arbore, dacă se dau: raza arborelui $R_2 = 10$ cm; raza exterioară a butucului $R_3 = 20$ cm; grosimea de fretaj $\delta = 0{,}1$ mm; arborele şi discul sînt executaţi din oţel (Fig. 20.7).

Rezolvare. Presiunea de fretaj se calculează cu ajutorul formulei (20.19):

$$p = \frac{\delta E(R_3^2 - R_2^2)}{2R_2 R_3^2} = \frac{0{,}01 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot (20^2 - 10^2)}{2 \cdot 10 \cdot 20^2} = 788 \text{ daN/cm}^2.$$

Pentru determinarea eforturilor unitare se poate considera că discul este solicitat de o presiune interioară $p_i = p = 788$ daN/cm². Eforturile unitare maxime apar la interior şi se determină cu ajutorul formulelor (12.6) şi (12.7), în care se înlocuiesc R_1 cu R_2 şi R_2 cu R_3:

$$\sigma_{r_2} = -p_i = -788 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{t_2} = \frac{p_i(R_3^2 + R_2^2)}{R_3^2 - R_2^2} = \frac{788(20^2 + 10^2)}{20^2 - 10^2} = 1\,310 \text{ daN/cm}^2.$$

Observaţie. În calculul efectuat, s-a presupus că presiunea de fretaj este constantă pe toată lungimea butucului. În realitate în regiunile de la capete presiunea este mai mare decît în regiunea de la mijloc (Fig. 20.7).

20.8. Să se găsească presiunea la care un tub de rază interioară $R_1 = 5$ cm şi rază exterioară $R_2 = 8$ cm ajunge în întregime să se deformeze plastic. Se consideră limita de curgere a materialului din care este executat tubul $\sigma_c = 5\,000$ daN/cm², iar modulul de plasticitate $E_p = 0$.

Rezolvare. După formula (20.21), constanta k are valoarea:

$$k = 0{,}5\ \sigma_c = 0{,}5 \cdot 5\,000 = 2\,500 \text{ daN/cm}^2.$$

Se aplică formula (20.20), unde presiunea exterioară $p_e = 0$,

$$p_i = 2k \ln \frac{R_2}{R_1} = 2 \cdot 2\,500 \ln \frac{8}{5} = 2\,350 \text{ daN/cm}^2.$$

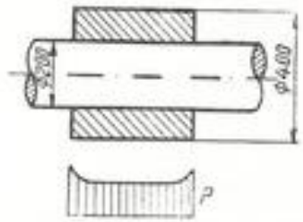


Fig. 20.7

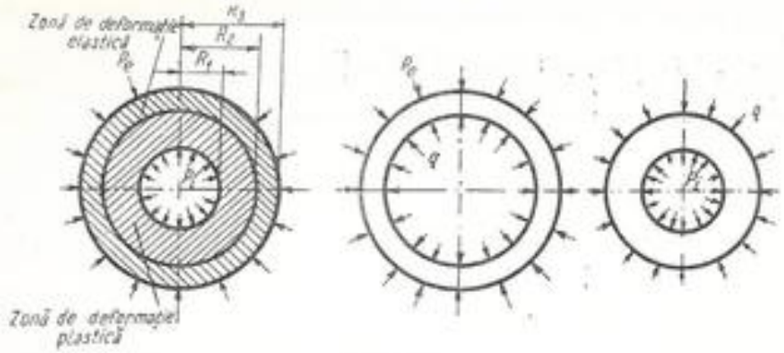


Fig. 20.9

20.9. Un tub cu pereţi groşi este supus la o presiune interioară. Ştiind că tubul are o zonă de deformaţii elastice şi o zonă de deformaţii plastice, se cere să se determine raza suprafeţei limită dintre aceste două zone considerînd modulul de plasticitate $E_p = 0$ (Fig. 20.9).

Rezolvare. Dacă diferenţa de presiune $p_i - p_e$ este mai mică decît presiunea necesară pentru ca întregul tub să ajungă în stadiul plastic, dar suficient de mare pentru a se depăşi în fibrele de la suprafaţa interioară a tubului limita de curgere, o parte din secţiune se va deforma plastic (partea interioară), iar partea exterioară rămîne în domeniul elastic. Pentru a se determina raza R_2 care delimitează zona aflată în stadiul plastic, se separă cele două zone ca în figura 20.9, înlocuind influenţa lor reciprocă printr-o presiune necunoscută q.

Pentru zona de plasticitate se poate aplica formula (20.20), în care se înlocuieşte $k = 0{,}5\ \sigma_c$ şi $p_e = q$:

$$p_i - q = 2k \ln \frac{R_2}{R_1} = \sigma_c \ln \frac{R_2}{R_1}. \tag{1}$$

Se aplică pentru zona elastică relaţia ipotezei a III-a de rezistenţă la raza R_2, unde apare efortul unitar de curgere:

$$\sigma_c = \sigma_1 - \sigma_3. \tag{2}$$

Eforturile unitare σ_1 şi σ_3 se determină din relaţiile (20.1) şi (20.2) în care R_1 se înlocuieşte cu R_2, R_2 cu R_3 şi $p_i = q$, iar raza $r = R_2$:

$$\sigma_c = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_2^2 q - R_3^2 p_e}{R_3^2 - R_2^2} + \frac{(q - p_e) R_2^2 R_3^2}{R_2^2 (R_3^2 - R_2^2)} -$$

$$- \frac{R_2^2 q - R_3^2 p_e}{R_3^2 - R_2^2} + \frac{(q - p_e) R_2^2 R_3^2}{R_2^2 (R_3^2 - R_2^2)} = \frac{2(q - p_e) R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}. \tag{3}$$

Din relaţia (3) se obţine:

$$q - p_e = \frac{(R_3^2 - R_2^2)\sigma_c}{2R_3^2}. \tag{4}$$

Adunînd relaţiile (1) şi (4) se găseşte:

$$p_i - p_e = \sigma_c \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\sigma_c (R_3^2 - R_2^2)}{2R_3^2} = \sigma_c \left[\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3^2 - R_2^2}{2R_3^2} \right]. \tag{5}$$

Prin încercări se poate obţine valoarea lui R_2, cunoscînd astfel porţiunea din tub solicitată în stadiul plastic.

20.10. Să se determine zona ce se deformează în stadiul plastic, la un cilindru supus unei presiuni interioare $p_i = 2\,000$ daN/cm², ştiind că: $R_1 = 5$ cm; $R_3 = 8$ cm; $\sigma_c = 5\,000$ daN/cm² şi $E_p = 0$.

Rezolvare. Se verifică dacă tubul se deformează în stadiul plastic. Presiunea minimă la care tubul începe să se deformeze plastic se obţine din relaţia (4) din problema 20.9, unde se consideră raza $R_2 = R_1$, iar $q = p_i'$.

Înlocuind pe $p_e = 0$, se obţine:

$$p_i' = \frac{R_3^2 - R_1^2}{2R_3^2} \sigma_c = \frac{8^2 - 5^2}{2 \cdot 8^2} \cdot 5000 = 1\,523 \text{ daN/cm}^2 < p_i. \tag{1}$$

Tubul este, în acest caz, parţial plastificat, deoarece presiunea $p_i = 2\,000$ daN/cm² este cuprinsă între presiunea $p_i' = 1\,523$ daN/cm², la care începe plastificarea tubului, şi presiunea $p_i = 2\,350$ daN/cm², la care tubul este solicitat total plastic (v. problema 20.8). Cu datele numerice: $2\,000 = 5\,000 \left(\ln \frac{R_2}{5} + \frac{8^2 - R_2^2}{2 \cdot 8^2} \right)$ (relaţia 5, problema 20.9).

Prin încercări se obţine $R_2 = 6$ cm.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

20.11. Să se dimensioneze tubul din problema 20.2 după ipoteza a II-a de rezistenţă, dacă se ţine seamă de efectul existenţei fundului. Se dau: $p = 1\,000$ daN/cm²; $\sigma_a = 3\,000$ daN/cm²; $R_1 = 1$ cm; $\mu = 0{,}3$. Să se compare rezultatul cu cel obţinut în problema 20.2.

Răspuns. Se ia în considerare efectul existenţei fundului, ţinînd seama în calcul de efortul unitar σ_s. În acest caz, pentru un punct de la raza interioară a tubului se poate scrie:

$$\sigma_1 = \sigma_{t_i} = p \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2};$$

$$\sigma_2 = \sigma_s = p \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2};$$

$$\sigma_3 = \sigma_{r_i} = -p.$$

Înlocuind aceste valori în relaţia (20.11), corespunzătoare ipotezei a II-a de rezistenţă, se obţine:

$$R_2 = R_1\sqrt{\frac{\sigma_a + (1-2\mu)p}{\sigma_a - (1+\mu)p}} = 1\sqrt{\frac{3\,000 + (1 - 2\cdot 0{,}3)\cdot 1\,000}{3\,000 - (1+0{,}3)\cdot 1\,000}} \approx 1{,}41 \text{ cm}.$$

Se observă că raza obţinută este mai mică decît R_2^* din problema 20.2, deci calculul efectuat în acea problemă este acoperitor.

20.12. Să se dimensioneze un cilindru fretat supus unei presiuni interioare $p_i = 2\,000$ daN/cm², dacă rezistenţa admisibilă este $\sigma_a = 3\,500$ daN/cm². Se dă raza interioară $R_1 = 5$ cm. Să se compare rezultatul cu cel dat în problema 20.4.

Răspuns. Utilizînd rezultatele din problema 20.4, se găseşte:

$$R_2 = 11{,}7 \text{ cm}; \qquad R_2 = 7{,}65 \text{ cm}.$$

Se vede că utilizînd bine materialul, grosimea totală a celor doi cilindri fretaţi scade de la 10 cm la 6,7 cm.

ANEXE

Anexa 1

Terminologie şi simboluri în rezistenţa materialelor

Nr. crt.	Denumirea mărimilor	Simbolul	Unităţile de măsură
1	acceleraţie	a	$\frac{m}{s^2}$ $\frac{cm}{s^2}$
2	acceleraţia căderii libere (terestră)	g	$\frac{m}{s^2}$ $\frac{cm}{s^2}$
3	baza unui dreptunghi, triunghi	b, B	cm
4	coeficient de dilatare liniară	α	—
5	coeficient de contracţie transversală	μ, ν	—
6	coeficient de dilatare volumică	γ	—
7	coeficient dinamic	ψ	—
8	coeficient de frecare	μ	—
9	coeficient de siguranţă	c	—
10	coeficient de subţirime (coeficient de zveltete)	λ	—
11	constanta lui Poisson	$m = \frac{1}{\mu}$	—
12	deformaţie volumică specifică	ε_v	—
13	deschiderea unei grinzi	l, L	m, cm
14	diametru	d, D	cm, mm
15	distanţa polară	H	cm, daN
16	depărtarea unei forţe la două reazeme ale grinzii	a, b	cm
17	efort unitar total (tensiune totală)	p	daN/cm²
18	efort unitar normal (tensiune normală)	σ	daN/cm²
19	efort unitar tangenţial (tensiune tangenţială)	τ	daN/cm²
20	efort unitar de întindere (tracţiune)	σ_t	daN/cm²
21	efort unitar de compresiune	σ_c	daN/cm²
22	efort unitar de încovoiere	σ_i	daN/cm²
23	efort unitar de forfecare	τ_f	daN/cm²
24	efort unitar de răsucire	τ_t	daN/cm²
25	efort unitar critic de flambaj	σ_f	daN/cm²
26	efort unitar echivalent	σ_{ech}	daN/cm²
27	efort unitar normal, dirijat pe axe	σ_x, σ_y, σ_z	daN/cm²
28	efort unitar normal principal	σ_1, σ_2, σ_3	daN/cm²
29	efort unitar tangenţial pe axe	τ_{yz}, τ_{yz}, τ_{zx}	daN/cm²
30	efort unitar normal efectiv	σ_{ef}	daN/cm²
31	efort unitar tangenţial efectiv	τ_{ef}	daN/cm²
32	energie sau lucru mecanic de deformaţie	L, W_d	daN·cm
33	excentricitate, poziţia centrului de greutate	e	cm
34	forţe concentrate	F, P, Q etc.	daN, kN

Anexa 1 (continuare)

Nr. crt.	Denumirea mărimilor	Simbolul	Unităţile de măsură
35	forţă axială sau normală	N	daN
36	forţă tăietoare	T	daN
37	forţă tăietoare dirijată pe axe	T_y, T_z	daN
38	forţă (sarcină) critică de flambaj	P_f	daN
39	gîtuire la rupere	ψ	—
40	greutate	G	kN, daN
41	greutate proprie, uniform distribuită	g	daN/m³, daN/cm³
42	greutate specifică	γ	daN/cm³, kN/m³
43	grosimea tablelor (plăcilor)	h, t	cm
44	înălţimea unei secţiuni	h, H	cm
45	limita de curgere	σ_c	daN/cm²
46	limita de elasticitate	σ_e	daN/cm²
47	limita de proporţionalitate	σ_p	daN/cm²
48	lucru mecanic de deformaţie	L_d, W_d	daN·cm
49	lunecare specifică (deformaţie unghiulară specifică)	γ	—
50	lungimea unei bare	l, L	m, cm
51	lungimea unui arc de curbă	s	m, cm
52	lungimea de flambaj	l_f	cm
53	lungirea (sau scurtarea)	Δl	cm
54	lungirea (sau scurtarea) specifică	ε	—
55	lungirea specifică, după axe	ε_x, ε_y, ε_z	—
56	lunecarea specifică, după axe	γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}	—
57	lungirea specifică la rupere	δ, ε_r	—
58	masa unui corp $m = \frac{G}{g}$	m	kg
59	modul de elasticitate (longitudinal)	E	daN/cm²
60	modul de elasticitate transversal	G	daN/cm²
61	modul de rezistenţă la încovoiere (axial)	W, W_x, W_y	cm³
62	modul de rezistenţă polar	W_p	cm³
63	momentul unei forţe	M	daN.cm
64	momentul încovoietor	M, M_i, M_y, M_z	daN.cm
65	moment încovoietor maxim	M_{max}	daN.cm
66	moment maxim maximorum	$M_{max\,max}$	daN.cm
67	moment de inerţie al unei suprafeţe	I	cm⁴
68	moment de inerţie faţă de axe	I_x, I_y, I_z	cm⁴
69	moment de inerţie centrifugal	I_{xy}	cm⁴
70	moment de inerţie minim	I_{min}	cm⁴
71	moment de inerţie polar	I_p	cm⁴
72	momente de inerţie principale	I_1, I_2	cm⁴
73	moment de răsucire (torsiune)	M_t	daN.cm
74	moment de inerţie faţă de axa ce trece prin centrul de greutate	I_G	cm⁴
75	modul de rezistenţă necesar	W_{nec}	cm³
76	moment static al unei secţiuni	S, S_y, S_z	cm³
77	multiplicator de flambaj	ω, $\varphi = \frac{1}{\omega}$	—
78	numărul de rotaţii pe minut	n	rot/min
79	presiune	p	daN/cm²

Anexa 1 (continuare)

Nr. crt.	Denumirea mărimilor	Simbolul	Unităţile de măsură
80	putere	N	kW
81	randament	η	—
82	rază	r, R	cm
83	rază de curbură	ρ	cm
84	rază de inerţie (rază de giraţie)	i, i_y, i_z	cm
85	reacţiune	R	daN, kN
86	reacţiune verticală	V	daN, kN
87	reacţiune orizontală	H	daN, kN
88	reacţiune static nedeterminată (componente)	X, Y, Z	daN
89	rezistenţă admisibilă normală	σ_a	daN/cm²
90	rezistenţă admisibilă tangenţială	τ_a	daN/cm²
91	rezistenţă admisibilă la tracţiune	σ_{at}	daN/cm²
92	rezistenţă admisibilă la compresiune	σ_{ac}	daN/cm²
93	rezistenţă admisibilă la încovoiere	σ_{ai}	daN/cm²
94	rezistenţă admisibilă la forfecare	τ_{af}	daN/cm²
95	rezistenţă admisibilă la răsucire	τ_{at}	daN/cm²
96	rezistenţă maximă	σ_{max}, τ_{max}	daN/cm²
97	rezistenţă la rupere	σ_r, τ_r	daN/cm²
98	rotire specifică (la încovoiere)	ω	rad/cm
99	săgeata, ca variabilă	v	cm
100	săgeata maximă	f	cm
101	sarcină utilă uniform repartizată	p	daN/cm, kN/m
102	sarcină totală uniform repartizată	q	daN/cm, kN/m
103	suprafaţa secţiunii (secţiunea)	A	cm²
104	secţiunea necesară	A_{nec}	cm²
105	secţiunea netă	A_n	cm²
106	secţiunea brută	A_b	cm²
107	temperatura	t	°C
108	tensiunea în fir (forţa)	T, S	daN
109	tensiunea orizontală în fir (forţa)	H	daN
110	timp	t	s
111	turaţie	n	rot/min
112	unghi	α, β, θ, φ	rad, grade
113	unghi de încovoiere	φ	rad, grade
114	unghi de răsucire	φ, $\Delta\varphi$	rad, grade
115	viteză	v	m/s, cm/s
116	viteză unghiulară	ω	rad/s
117	volum	V	cm³

Anexa 2

Dimensiuni liniare normale

În STAS 75–72 se dau şirurile de dimensiuni liniare normale de uz general (diametre, lungimi, înălţimi etc.) în intervalul 0,1... 10 000 mm, folosite în construcţia de maşini. Şirul *Ra* 20 în intervalul 1 — 10 000 este următorul:

1,0	11	112	1 120
1,1	12	125	1 250
1,2	14	140	1 400
1,4	16	160	1 600
1,6	18	180	1 800
1,8	20	200	2 000
2,0	22	224	2 240
2,2	25	250	2 500
2,5	28	280	2 800
2,8	32	315	3 150
3,0	36	355	3 550
3,5	40	400	4 000
4,0	45	450	4 500
4,5	50	500	5 000
5,0	56	560	5 600
5,5	63	630	6 300
6,0	71	710	7 100
7,0	80	800	8 000
8,0	90	900	9 000
9,0	100	1 000	10 000
10,0			

Anexa 3

Greutăţile specifice ale unor materiale curent utilizate

Materialul	γ daN/dm³
Oţel	7,85
Fontă	7,25
Cupru	8,9
Aluminiu	2,56–2,75
Lemn de brad	0,45
Lemn de stejar . . .	0,69
Cărămidă	1,8–2,1
Beton	2,2

Anexa 4

Coeficienţi de dilatare liniară

Materialul	α [°C⁻¹]
Oţel, oţel turnat, fontă	$(11-13)10^{-6}$
Cupru	$17 \cdot 10^{-6}$
Bronz	$18 \cdot 10^{-6}$
Alamă	$19 \cdot 10^{-6}$
Aluminiu	$24 \cdot 10^{-6}$

Anexa 5

Filet metric normal

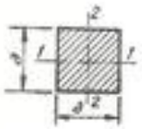
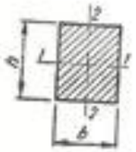
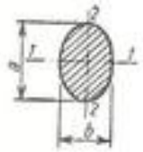
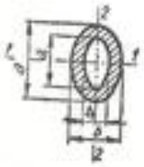
(diametre de la 6 la 68 mm după STAS 510-61)

Diametrul filetului		Pasul P_1 mm	Diametrul filetului		Pasul P_1 mm
exterior $d = D_1$ mm	interior $d_1 = D_{1i}$ mm		exterior $d = D_1$ mm	interior $d_1 = D_{1i}$ mm	
6	4,917	1	30	26,211	3,5
(7)	5,917		(33)	29,211	
8	6,647	1,25	36	31,670	4
(9)	7,647		(39)	34,670	
10	8,376	1,5	42	37,129	4,5
(11)	9,376		(45)	40,129	
12	10,106	1,75	48	42,587	5
			(52)	46,587	
(14)	11,835	2	56	50,046	5,5
16	13,835		(60)	54,046	
(18)	15,294	2,5	64	57,505	6
20	17,294		(68)	61,505	
(22)	19,294				
24	20,752	3			
(27)	23,752				

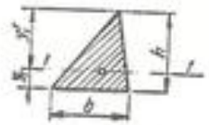
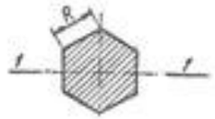
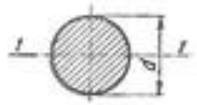
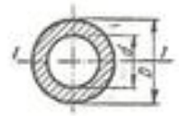
Se aleg (din tabele) de preferinţă diametrele care nu sînt în paranteză.

Anexa 6

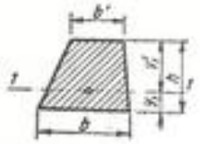
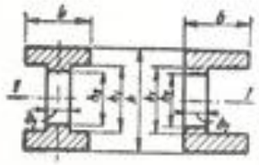
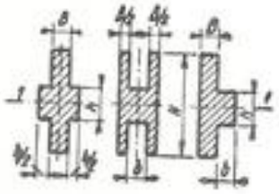
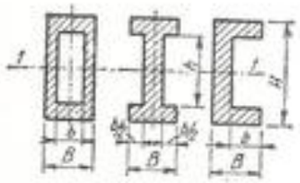
Momente de inerţie şi module de rezistenţă pentru secţiuni simple

Nr. curent	Forma, dimensiunile şi axele secţiunii (axele notate cu 1–1 şi 2–2 trec prin centrul de greutate)	Momente de inerţie I_1 şi I_2 şi module de rezistenţă W_1 şi W_2
1	*Pătrat* 	$I_1 = I_2 = \frac{a^4}{12}$ $W_1 = W_2 = \frac{a^3}{6}$
2	*Dreptunghi* 	$I_1 = \frac{bh^3}{12}$ $I_2 = \frac{hb^3}{12}$ $W_1 = \frac{bh^2}{6}$ $W_2 = \frac{hb^2}{6}$
3	*Elipsă* 	$I_1 = \frac{\pi a^3 b}{64}$ $I_2 = \frac{\pi a b^3}{64}$ $W_1 = \frac{\pi a^2 b}{32}$ $W_2 = \frac{\pi a b^2}{32}$
4	*Coroană eliptică* 	$I_1 = \frac{\pi}{64}(a^3 b - a_1^3 b_1)$ $I_2 = \frac{\pi}{64}(b^3 a - b_1^3 a_1)$ $W_1 = \frac{\pi}{32a}(a^3 b - a_1^3 b_1)$ $W_2 = \frac{\pi}{32b}(ab^3 - a_1 b_1^3)$

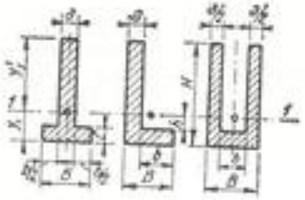
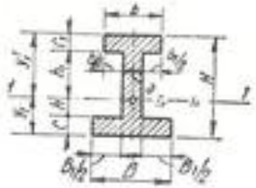
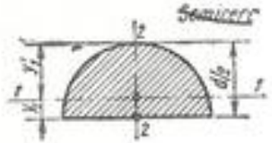
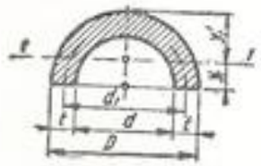
Anexa 6 (continuare)

Nr. curent	Forma, dimensiunile şi axele secţiunii (axele notate cu 1–1 şi 2–2 trec prin centrul de greutate)	Momente de inerţie I_1 şi I_2 şi module de rezistenţă W_1 şi W_2
5	*Triunghi* 	$I_1 = \frac{bh^3}{36}$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1} = \frac{bh^2}{12}$ $W_1' = \frac{I_1}{y_1'} = \frac{bh^2}{24}$
6	*Hexagon*	$I_1 = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = I_2$ $W_1 = \frac{5}{8} R^3$
7	*Hexagon* 	$I_1 = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = I_2$ $W_1 = 0{,}5413 R^3$
8	*Cerc* 	$I_1 = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0{,}05 d^4$ $W_1 = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1 d^3$
9	*Coroană circulară* 	$\alpha = \frac{d}{D}$; $I_1 = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4)$ $W_1 = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4)$

Anexa 6 (continuare)

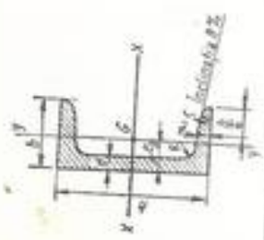
Nr. curent	Forma, dimensiunile şi axele secţiunii (axele notate cu 1—1 şi 2—2 trec prin centrul de greutate)	Momente de inerţie I_1 şi I_2 şi module de rezistenţă W_1 şi W_2
10	*Trapez* 	$I_1 = \frac{h^3(b^2 + 4bb' + b'^2)}{36(b + b')}$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1} \quad W_1' = \frac{I_1}{y_1'}$
11		$I_1 = \frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)}{12}$ $W_1 = \frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)}{6h}$
12		$I_1 = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$ $W_1 = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$
13		$I_1 = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $W_1 = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$

Anexa 6 (continuare)

Nr. curent	Forma, dimensiunile şi axele secţiunii (axele notate cu 1—1 şi 2—2 trec prin centrul de greutate)	Momente de inerţie I_1 şi I_2 şi module de rezistenţă W_1 şi W_2
14		$I_1 = \frac{1}{3}(By_1^3 - bh^3 + ay_1'^3)$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1} \; W_1' = \frac{I_1}{y_1'}$
15		$I_1 = \frac{1}{3}(By_1^3 - B_1h^3 + by_1'^3 - b_1h_1^3)$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1} \; W_1' = \frac{I_1}{y_1'}$
16	*Semicerc* 	$I_1 = 0{,}006\,86\,d^4$; $I_2 = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0{,}025d^4$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1}$; $W_1' = \frac{I_1}{y_1'}$; $W_2 = \frac{\pi d^3}{64} = 0{,}050d^3$
17	*Coroană semicirculară* 	$I_1 = 0{,}00686(D^4 - d^4) - \frac{0{,}0177D^2d^2(D-d)}{D+d}$ sau la coroană subţire $I_1 = 0{,}038\,td_m^3$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1}$; $W_1' = \frac{I_1}{y_1'}$

Anexa 9

Oțel U
(după STAS 564-71)



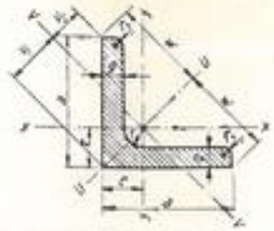
I = Moment de inerție
W = Modul de rezistență
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = Rază de inerție

} Raportate la axa de incovoiere respectivă

Simbol	Dimensiunile mm					Aria secțiunii A cm²	Masa G kg/m	Mărimi statice pentru axele de incovoiere									Simbol U
								$x-x$			$y-y$						
	h	b	d	t	r			I_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm	S_x cm³	i_y cm	
6,5	65	42	5,5	7,5	4	9,03	7,09	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	—	1,42	6,5
8	80	45	6	8,0	4	11,0	8,64	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	15,9	1,45	8
10	100	50	6	8,5	4,5	13,5	10,6	205	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	24,5	1,55	10
12	120	55	7	9,0	4,5	17,0	13,4	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	36,3	1,60	12
14	140	60	7	10,0	5	20,4	16,0	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	51,4	1,75	14
16	160	65	7,5	10,5	5,5	24,0	18,8	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	68,8	1,84	16
18	180	70	8	11,0	5,5	28,0	22,0	1 350	150	6,95	114	22,4	2,02	89,6	1,92	18
20	200	75	8,5	11,5	6	32,2	25,3	1 910	191	7,70	148	27,0	2,14	114	2,01	20
22	220	80	9	12,5	6,5	37,4	29,4	2 690	245	8,48	197	33,6	2,30	146	2,14	22
24	240	85	9,5	13,0	6,5	42,3	33,2	3 600	300	9,22	248	39,6	2,42	179	2,23	24
26	260	90	10	14,0	7	48,3	37,9	4 820	371	9,99	317	47,7	2,56	221	2,36	26
30	300	100	10	16,0	8	58,8	46,2	8 030	535	11,7	495	67,8	2,90	316	2,70	30

Masa teoretică este calculată cu densitatea 7,85 kg/dm³.

Oțel cornier cu aripi egale
(după STAS 424-71)



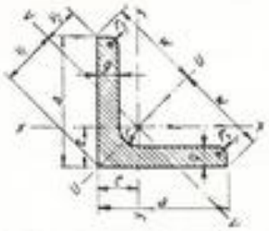
I = Moment de inerție
W = Modul de rezistență
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = Rază de inerție

} Raportate la axa de incovoiere respectivă

Denumire L	Dimensiunile secțiunii mm				Secțiunea S cm²	Masa G kg/m	Distanța axelor cm				$x-x$ =	
	a	g	r	r_1			e	w	v_1	v_2	$I_x = I_y$ cm⁴	$W_x =$ cm³
20 × 20 × 3	20	3	3,5	2	1,12	0,88	0,60	1,41	0,84	0,70	0,39	0,2
20 × 20 × 4		4			1,45	1,14	0,64		0,90	0,71	0,41	0,3
25 × 25 × 3	25	3	3,5	2	1,42	1,11	0,72	1,77	1,02	0,87	0,80	0,4
25 × 25 × 4		4			1,85	1,45	0,76		1,08	0,89	1,01	0,5
30 × 30 × 4	30	4	5	2,5	2,27	1,78	0,88	2,12	1,24	1,05	1,80	0,8
35 × 35 × 4	35	4	5	2,5	2,67	2,09	1,00	2,47	1,42	1,24	2,95	1,1
40 × 40 × 4	40	4	6	3	3,08	2,42	1,12	2,83	1,58	1,40	4,47	1,5
40 × 40 × 5		5			3,79	2,97	1,16		1,64	1,42	5,43	1,9
45 × 45 × 5	45	5	7	3,5	4,30	3,38	1,28	3,18	1,81	1,58	7,84	2,4
50 × 50 × 5		5			4,80	3,77	1,40		1,98	1,76	11,0	3,0
50 × 50 × 6	50	6	7	3,5	5,69	4,47	1,45	3,54	2,04	1,77	12,8	3,6
50 × 50 × 7		7			6,56	5,15	1,49		3,10	1,78	14,6	4,1
60 × 60 × 6		6	8	4	6,91	5,42	1,69		2,39	2,11	22,8	5,2
60 × 60 × 8	60	8			9,03	7,09	1,77	4,24	2,50	2,14	29,2	6,8
60 × 60 × 10		10			11,1	8,69	1,85		2,61	2,17	34,9	8,4
70 × 70 × 7	70	7			9,40	7,38	1,97	4,95	2,79	2,47	42,4	8,4
70 × 70 × 9		9	9	4,5	11,9	9,34	2,05		2,90	2,50	52,6	10
80 × 80 × 8	80	8			12,3	9,63	2,26	5,66	3,19	2,82	72,2	12
80 × 80 × 10		10	10	5	15,1	11,9	2,34		3,30	2,85	87,5	15
90 × 90 × 9	90	9			15,5	12,2	2,54	6,36	3,59	3,18	116	18
90 × 90 × 11		11	11	5,5	18,7	14,7	2,62		3,70	3,21	138	21
100 × 100 × 10	100	10	12	6	19,2	15,0	2,82	7,07	3,99	3,54	177	24
100 × 100 × 12		12			22,7	17,8	2,90		4,11	3,57	207	29
120 × 120 × 10	120	10			23,2	18,2	3,31	8,49	4,69	4,23	313	36
120 × 120 × 12		12	13	6,5	27,5	21,6	3,40		4,80	4,26	368	42
130 × 130 × 12		12			30,0	23,6	3,64		5,15	4,60	472	50
130 × 130 × 14		14	14	7	34,7	27,2	3,72	9,19	5,26	4,63	540	58
130 × 130 × 16	130	16			39,3	30,9	3,80		5,37	4,66	605	65
150 × 150 × 14		14	16	8	40,3	31,6	4,21	10,6	5,95	5,31	845	78,
150 × 150 × 16	150	16			45,7	35,9	4,29		6,07	5,34	949	88,

Masa este calculată pentru dimensiunile nominale, pe baza densității de 7,85 kg/dm³.

Oțel cornier cu aripi egale
(după STAS 424-71)



I = Moment de inerție
W = Modul de rezistență
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = Rază de inerție

} Raportate la axa de încovoiere respectivă

Denumire L	Dimensiunile secțiunii mm				Secțiunea S cm²	Masa G kg/m	Distanța axelor cm				Mărimile statice pentru axele de încovoiere								Denumire L
											$x-x=y-y$			$U-U$		$V-V$			
	a	g	r	r_1			z	w	v_1	v_2	$I_x=I_y$ cm⁴	$W_x=W_y$ cm³	$i_x=i_y$ cm	I_u cm⁴	i_u cm	I_v cm⁴	W_v cm³	i_v cm	
20 × 20 × 3	20	3	3,5	2	1,12	0,88	0,60	1,41	0,84	0,70	0,39	0,28	0,59	0,61	0,74	0,16	0,19	0,38	20 × 20 × 3
20 × 20 × 4		4			1,45	1,14	0,64		0,90	0,71	0,41	0,36	0,58	0,77	0,73	0,21	0,23	0,38	20 × 20 × 4
25 × 25 × 3	25	3	3,5	2	1,42	1,11	0,72	1,77	1,02	0,87	0,80	0,45	0,75	1,26	0,94	0,33	0,32	0,48	25 × 25 × 3
25 × 25 × 4		4			1,85	1,45	0,76		1,08	0,89	1,01	0,58	0,74	1,60	0,93	0,43	0,40	0,48	25 × 25 × 4
30 × 30 × 4	30	4	5	2,5	2,27	1,78	0,88	2,12	1,24	1,05	1,80	0,85	0,89	2,85	1,12	0,75	0,61	0,58	30 × 30 × 4
35 × 35 × 4	35	4	5	2,5	2,67	2,09	1,00	2,47	1,42	1,24	2,95	1,18	1,05	4,68	1,33	1,23	0,86	0,68	35 × 35 × 4
40 × 40 × 4	40	4	6	3	3,08	2,42	1,12	2,83	1,58	1,40	4,47	1,55	1,21	7,09	1,52	1,85	1,17	0,78	40 × 40 × 4
40 × 40 × 5		5			3,79	2,97	1,16		1,64	1,42	5,43	1,91	1,20	8,60	1,51	2,26	1,37	0,77	40 × 40 × 5
45 × 45 × 5	45	5	7	3,5	4,30	3,38	1,28	3,18	1,81	1,58	7,84	2,43	1,35	12,4	1,70	3,25	1,80	0,87	45 × 45 × 5
50 × 50 × 5		5			4,80	3,77	1,40		1,98	1,76	11,0	3,05	1,51	17,4	1,90	4,54	2,59	0,97	50 × 50 × 5
50 × 50 × 6	50	6	7	3,5	5,69	4,47	1,45	3,54	2,04	1,77	12,8	3,61	1,50	20,4	1,89	5,33	2,61	0,97	50 × 50 × 6
50 × 50 × 7		7			6,56	5,15	1,49		3,10	1,78	14,6	4,16	1,49	23,1	1,88	6,10	2,91	0,96	50 × 50 × 7
60 × 60 × 6		6	8	4	6,91	5,42	1,69		2,39	2,11	22,8	5,29	1,82	36,2	2,29	9,43	3,95	1,17	60 × 60 × 6
60 × 60 × 8	60	8			9,03	7,09	1,77	4,24	2,50	2,14	29,2	6,89	1,80	46,2	2,26	12,1	4,86	1,16	60 × 60 × 8
60 × 60 × 10		10			11,1	8,69	1,85		2,61	2,17	34,9	8,41	1,78	55,1	2,23	14,8	5,67	1,16	60 × 60 × 10
70 × 70 × 7	70	7			9,40	7,38	1,97	4,95	2,79	2,47	42,4	8,41	2,12	67,1	2,67	17,6	6,27	1,36	70 × 70 × 7
70 × 70 × 9		9	9	4,5	11,9	9,34	2,05		2,90	2,50	52,6	10,6	2,10	83,1	2,64	22,0	7,59	1,36	70 × 70 × 9
80 × 80 × 8	80	8			12,3	9,63	2,26	5,66	3,19	2,82	72,2	12,6	2,43	115	3,06	29,8	9,36	1,55	80 × 80 × 8
80 × 80 × 10		10	10	5	15,1	11,9	2,34		3,30	2,85	87,3	15,4	2,41	139	3,03	36,3	11,0	1,55	80 × 80 × 10
90 × 90 × 9	90	9			15,5	12,2	2,54	6,36	3,59	3,18	116	18,0	2,74	184	3,45	47,8	13,3	1,76	90 × 90 × 9
90 × 90 × 11		11	11	5,5	18,7	14,7	2,62		3,70	3,21	138	21,6	2,72	218	3,41	57,1	15,4	1,75	90 × 90 × 11
100 × 100 × 10	100	10	12	6	19,2	15,0	2,82	7,07	3,99	3,54	177	24,6	3,04	280	3,83	72,9	18,3	1,95	100 × 100 × 10
100 × 100 × 12		12			22,7	17,8	2,90		4,11	3,57	207	29,1	3,02	328	3,80	85,7	20,9	1,94	100 × 100 × 12
120 × 120 × 10	120	10			23,2	18,2	3,31	8,49	4,69	4,23	313	36,0	3,67	497	4,63	129	27,5	2,36	120 × 120 × 10
120 × 120 × 12		12	13	6,5	27,5	21,6	3,40		4,80	4,26	368	42,7	3,65	584	4,60	151	31,5	2,35	120 × 120 × 12
130 × 130 × 12		12			30,0	23,6	3,64		5,15	4,60	472	50,4	3,97	750	5,00	194	37,7	2,54	130 × 130 × 12
130 × 130 × 14		14	14	7	34,7	27,2	3,72	9,19	5,26	4,63	540	58,2	3,94	857	4,97	223	42,4	2,53	130 × 130 × 14
130 × 130 × 16	130	16			39,3	30,9	3,80		5,37	4,66	605	65,8	3,92	959	4,94	251	46,7	2,52	130 × 130 × 16
150 × 150 × 14		14	16	8	40,3	31,6	4,21	10,6	5,95	5,31	845	78,2	4,58	1340	5,77	347	58,3	2,94	150 × 150 × 14
150 × 150 × 16	150	16			45,7	35,9	4,29		6,07	5,34	949	88,7	4,56	1510	5,74	391	64,4	2,93	150 × 150 × 16

Masa este calculată pentru dimensiunile nominale, pe baza densității de 7,85 kg/dm³.

18	20	22	24	26	30	180	200	220	240	260	300	70	75	80	85	90	100	8	8,5
20	22	24	26	30		18	20	22	24	26	30	11,0	11,5	12,5	13,0	14,0	16,0	9	9,5

1,92	2,01	2,14	2,23	2,36	2,70	22,0	25,3	29,4	33,2	37,9	46,2	5,5	6	6,5	6,5	7	8	10	10
89,6	114	146	179	221	316	1 350	1 910	2 690	3 600	4 820	8 030	28,0	32,2	37,4	42,3	48,3	59,8	6,95	7,70
2,02	2,14	2,30	2,42	2,56	2,90	22,4	27,0	33,6	39,6	47,7	67,8	114	148	197	248	317	495	11,7	

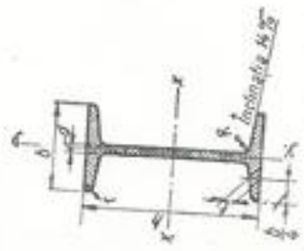
Masa teoretică este calculată cu densitatea 7,85 kg/dm³.

al cornier cu aripi neegale
(după STAS 425-71)

		Unghiul de înclinare a axelor tg α	Mărimile statice pentru axele de încovoiere									
			x – x			y – y			U – U		V – V	
z_0	z_0		I_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm	I_U cm⁴	i_U cm	I_V cm⁴	i_V cm
2,10	1,10	0,434	17,2	4,25	1,89	6,11	2,02	1,13	19,8	2,03	3,54	0,86
2,10	1,12	0,431	20,1	5,03	1,88	7,12	2,38	1,12	23,1	2,02	4,15	0,86
2,09	1,14	0,427	22,9	5,79	1,87	8,07	2,74	1,11	26,3	2,00	4,75	0,85
2,39	1,52	0,572	31,1	7,03	2,02	15,9	4,34	1,45	38,5	2,25	8,51	1,06
2,39	1,54	0,569	34,8	7,93	2,01	17,7	4,89	1,44	43,0	2,23	9,57	1,05
2,94	2,01	0,649	52,8	9,41	2,51	31,2	6,44	1,93	68,5	2,85	15,6	1,35
2,94	2,05	0,645	68,1	12,3	2,49	40,1	8,41	1,91	88,0	2,82	20,3	1,36
2,95	2,11	0,640	82,2	15,1	2,46	48,3	10,3	1,89	106	2,79	24,8	1,35
3,61	2,18	0,553	118	17,0	3,15	56,9	10,0	2,19	145	3,49	30,1	1,59
3,63	2,22	0,549	148	21,5	3,13	71,0	12,7	2,17	181	3,47	37,8	1,59
3,65	2,27	0,545	176	25,9	3,11	84,0	15,3	2,15	214	3,44	45,4	1,58
4,23	2,16	0,437	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,28	260	4,10	46,6	1,73
4,21	2,19	0,435	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,26	317	4,07	56,8	1,72
4,20	2,25	0,432	323	40,4	3,77	114	19,1	2,24	371	4,04	66,6	1,71
5,25	2,68	0,442	552	54,1	4,78	198	25,8	2,86	637	5,13	112	2,15
5,24	2,73	0,439	650	64,2	4,76	232	30,6	2,84	749	5,10	132	2,15
5,23	2,77	0,435	744	74,1	4,73	264	35,2	2,82	856	5,07	152	2,14

m³

Oțel I
(după STAS 565-71)



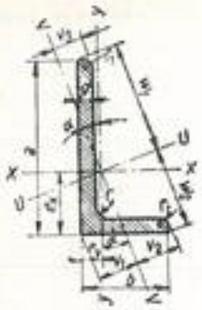
I = Moment de inerție
W = Modul de rezistență
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = Rază de inerție

Raportate la axa de încovoiere respectivă

I	Dimensiuni mm					Aria secțiunii A cm²	Masa G kg/m	Mărimi statice pentru axele de încovoiere						S_x cm³	I
								x – x			y – y				
	h	b	t	d – R	r			I_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm		
8	80	42	5,90	3,9	2,3	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4	8
10	100	50	6,80	4,5	2,7	10,6	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	10
12	120	58	7,70	5,1	3,1	14,2	11,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8	12
14	140	66	8,60	5,7	3,4	18,3	14,4	573	81,9	5,61	36,2	10,71	1,40	47,7	14
16	160	74	9,50	6,3	3,8	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0	16
18	180	82	10,40	6,9	4,1	27,9	21,9	1 450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4	18
20	200	90	11,30	7,5	4,5	33,5	26,3	2 140	214	8,00	117	26,0	1,87	125	20
22	220	98	12,20	8,1	4,9	39,6	31,1	3 060	278	8,80	162	33,1	2,02	162	22
24	240	106	13,10	8,7	5,2	46,1	36,2	4 250	354	9,59	221	41,7	2,20	206	24
26	260	113	14,10	9,4	5,6	53,4	41,9	5 740	442	10,4	288	51,0	2,32	257	26
28	280	119	15,20	10,1	6,1	61,1	48,0	7 590	542	11,1	364	61,2	2,45	316	28
30	300	125	16,20	10,8	6,5	69,1	54,2	9 800	653	11,9	451	72,2	2,56	381	30
32	320	131	17,30	11,5	6,9	77,8	61,1	12 510	782	12,7	555	84,7	2,67	457	32
36	360	143	19,50	13,0	7,8	97,1	76,2	19 610	1090	14,2	818	114	2,90	638	36
40	400	155	21,60	14,4	8,6	118	92,6	29 210	1460	15,7	1160	149	2,13	857	40

Masa teoretică este calculată cu densitatea 7,85 kg/dm³.

Oţel cornier cu aripi neegale
(după STAS 425-71)



I = Moment de inerţie
W = Modul de rezistenţă
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = Rază de inerţie

} Raportate la axa de încovoiere respectivă

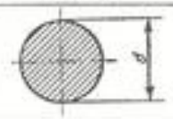
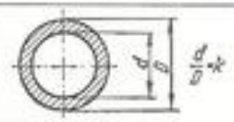
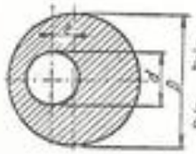
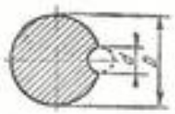
Denumire LL	Dimensiunile secţiunii în mm: b	a	t	r	r_1	Secţiunea S cm²	Masa G kg/m	Distanţa axelor, cm: z_x	z_y	w_1	w_2	v_1	v_2	v_0	Unghiul de înclinare a axelor tg α	Mărimile statice pentru axele de încovoiere: x – x: I_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	y – y: I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm	U – U: I_U cm⁴	i_U cm	V – V: I_V cm⁴	i_V cm
40×60×5	40	60	5	6	3	4,79	3,76	1,96	0,97	4,10	3,01	1,68	2,10	1,10	0,434	17,2	4,25	1,89	6,11	2,02	1,13	19,8	2,03	3,54	0,86
40×60×6			6			5,68	4,46	2,00	1,01	4,08	3,02	1,72	2,10	1,12	0,431	20,1	5,03	1,88	7,12	2,38	1,12	23,1	2,02	4,15	0,86
40×60×7			7			6,55	5,14	2,04	1,05	4,06	3,03	1,77	2,09	1,14	0,427	22,9	5,79	1,87	8,07	2,74	1,11	26,3	2,00	4,75	0,85
50×65×7	50	65	7	6,5	3,5	7,60	5,96	2,08	1,33	4,50	3,62	2,19	2,39	1,52	0,572	31,1	7,03	2,02	15,9	4,34	1,45	38,5	2,25	8,51	1,06
50×65×8			8			8,60	6,75	2,11	1,37	4,49	3,64	2,23	2,39	1,54	0,569	34,8	7,93	2,01	17,7	4,89	1,44	43,0	2,23	9,57	1,05
65×80×6	65	80	6	8	4	8,41	6,60	2,39	1,65	5,61	4,63	2,69	2,94	2,01	0,649	52,8	9,41	2,51	31,2	6,44	1,93	68,5	2,85	15,8	1,35
65×80×8			8			11,0	8,66	2,47	1,73	5,59	4,65	2,79	2,94	2,05	0,645	68,1	12,3	2,49	40,1	8,41	1,91	88,0	2,82	20,3	1,36
65×80×10			10			13,6	10,7	2,55	1,81	5,56	4,68	2,90	2,95	2,11	0,640	82,2	15,1	2,46	48,3	10,3	1,89	106	2,79	24,8	1,35
75×100×7	75	100	7	10	5	11,9	9,32	3,06	1,83	6,96	5,42	3,10	3,61	2,18	0,553	118	17,0	3,15	56,9	10,0	2,19	145	3,49	30,1	1,59
75×100×9			9			15,1	11,8	3,15	1,91	6,91	5,45	3,22	3,63	2,22	0,549	148	21,5	3,13	71,0	12,7	2,17	181	3,47	37,8	1,59
75×100×11			11			18,2	14,3	3,23	1,99	6,87	5,49	3,32	3,65	2,27	0,545	176	25,9	3,11	84,0	15,3	2,15	214	3,44	45,4	1,58
80×120×8	80	120	8	11	5,5	15,5	12,2	3,83	1,87	8,23	5,99	3,27	4,23	2,16	0,437	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,28	260	4,10	46,6	1,73
80×120×10			10			19,1	15,0	3,92	1,95	8,18	6,03	3,37	4,21	2,19	0,435	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,26	317	4,07	56,8	1,72
80×120×12			12			22,7	17,8	4,00	2,03	8,14	6,06	3,46	4,20	2,25	0,432	323	40,4	3,77	114	19,1	2,24	371	4,04	66,6	1,71
100×150×10	100	150	10	13	6,5	24,2	19,0	4,80	2,34	10,3	7,50	4,10	5,25	2,68	0,442	552	54,1	4,78	198	25,8	2,86	637	5,13	112	2,15
100×150×12			12			28,7	29,6	4,89	2,42	10,2	7,53	4,19	5,24	2,73	0,439	650	64,2	4,76	232	30,6	2,84	749	5,10	132	2,15
100×150×14			14			33,2	26,1	4,97	2,50	10,2	7,56	4,28	5,23	2,77	0,435	744	74,1	4,73	264	35,2	2,82	856	5,07	152	2,14

Masa este calculată pentru dimensiunile nominale, pe baza densităţii de 7,85 kg/dm³

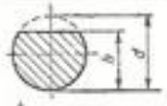
Anexa 11

Eforturi unitare şi deformaţii la răsucire pentru diferite forme de secţiuni

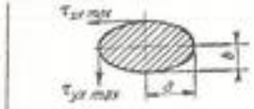
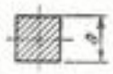
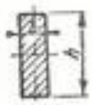
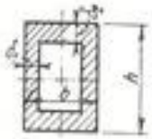
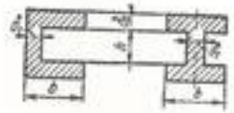
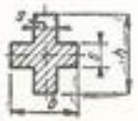
Formule de utilizat: $\tau_{max} = \frac{M_t}{W_d}$; $\Delta\varphi = \frac{M_t l}{G I_d}$; W_d şi I_d coincid cu W_p şi I_p numai la unele secţiuni simple (cerc, inel)

Nr. crt.	Forma şi dimensiunile secţiunii	Valoarea lui W_d pentru calculul eforturilor unitare	Valoarea lui I_d pentru calculul deformaţiilor
1		$W_d = W_p = \frac{\pi d^3}{16}$	$I_d = I_p = \frac{\pi d^4}{32}$
2		$W_d = W_p = \frac{\pi}{16}\frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - k^4)$	$I_d = I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32}(1 - k^4)$
3		$W_d = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4)\frac{1}{k}$ $k = 1 + \frac{4\alpha^2}{1 - \alpha^2}\lambda + \frac{32\alpha^2}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^6)}\lambda^2 + \frac{48\alpha^2(1 + 2\alpha^2 + 3\alpha^4 + 2\alpha^6)}{(1 - \alpha^2)(1 + \alpha^4)(1 - \alpha^6)}\lambda^3 + \frac{64\alpha^2(2 + 12\alpha^2 + 19\alpha^4 + 28\alpha^6 + 18\alpha^8 + 14\alpha^{10} + 3\alpha^{12})}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)(1 - \alpha^6)(1 - \alpha^8)}\lambda^4$	$I_d = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4)\frac{1}{k'}$ $k' = 1 + \frac{16\alpha^2}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)}\lambda^2 + \frac{374\alpha^4}{(1 - \alpha^2)^2(1 - \alpha^4)^2}\lambda^4$
4	Secţiune inelară subţire crestată	$W_d = \frac{(2\pi r\delta)^2}{6\pi r + 1{,}8\delta}$	$I_d = \frac{2}{3}\pi r\delta^3$
5		$W_d = \beta\frac{D^3}{8}$; $I_d = \alpha\frac{D^4}{16}$	

$\frac{d}{D}$	0	0,05	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,50
α	1,57	0,80	0,82	0,81	0,76	0,66	0,52	0,38	0,412
β	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07

6	 $\frac{h}{d} > 0{,}5$	$W_d = \frac{d^3}{8}\frac{2{,}6\frac{h}{d} - 1}{0{,}3\frac{h}{d} + 0{,}7}$	$I_d = \frac{d^4}{16}\left(2{,}6\frac{h}{d} - 1\right)$

Anexa 11 (continuare)

Nr. crt.	Forma şi dimensiunile secţiunii	Valoarea lui W_d pentru calculul eforturilor unitare	Valoarea lui I_d pentru calculul deformaţiilor
7		$W_d = \frac{\pi a b^2}{\frac{\Omega}{r^*}}$; $\tau_{xzmax} = \frac{M_t}{W_d}$; $\frac{\tau_{xzmax}}{\tau_{yzmax}} = \frac{a}{b}$	$I_d = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{A^4}{4\pi^2 I_p}$
8		$W_d = 0{,}208a^3$	$I_d = 0{,}1406a^4$
9	 Secţiune dreptunghiulară subţire $\frac{h}{b} > 4$; $\frac{h}{b} = k$	$W_d = \frac{1}{3}(k - 0{,}63)b^3$	$I_d = \frac{1}{3}(k - 0{,}63)b^4$
10		$W_{d1} = 2\delta_1(h - \delta_2)(b - \delta_1)$ $W_{d2} = 2\delta_2(h - \delta_2)(b - \delta_1)$ În mijlocul laturii h: $\tau_1 = \frac{M_t}{W_{d1}}$ În mijlocul laturii b: $\tau_2 = \frac{M_t}{W_{d2}}$	$I_d = \frac{2\delta_1\delta_2(h - \delta_2)^2(b - \delta_1)^2}{h\delta_2 + b\delta_1 + \delta_2^2 - \delta_1^2}$
11	*Triunghi echilateral*	$W_d = \frac{b^3}{20}$	$I_d = \frac{\sqrt{3}}{80}b^4 = \frac{b^4}{46{,}2}$
12	Hexagon regulat, apotema a	$W_d = 0{,}434aA$ (A = aria)	$I_d = 0{,}532a^2A$
13	Octogon regulat, apotema a	$W_d = 0{,}446aA$ (A = aria)	$I_d = 0{,}520a^2A$
14		$W_d = \frac{h\delta_1^2 + 2b\delta_2^2}{3\delta_1}$	$I_d = \frac{h\delta_1^3 + 2b\delta_2^3}{3}$
15		$W_d = \frac{2}{9}s^2(h + b - s)$	—

Anexa 12

Valorile coeficienților de flambaj φ pentru oțelul OL 37
(după STAS 763/1-71)

λ	Valorile coeficienților φ pentru oțelul OL 37									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,000	0,996	0,992	0,987	0,983	0,979	0,975	0,971	0,967	0,963
10	0,960	0,956	0,952	0,948	0,944	0,941	0,937	0,933	0,930	0,926
20	0,922	0,919	0,915	0,912	0,908	0,904	0,901	0,897	0,894	0,890
30	0,886	0,883	0,879	0,876	0,872	0,868	0,865	0,861	0,857	0,853
40	0,850	0,847	0,843	0,839	0,836	0,832	0,828	0,825	0,821	0,817
50	0,814	0,810	0,806	0,802	0,799	0,795	0,791	0,788	0,784	0,780
60	0,776	0,772	0,769	0,765	0,761	0,757	0,753	0,749	0,745	0,741
70	0,737	0,734	0,729	0,725	0,721	0,717	0,713	0,709	0,705	0,701
80	0,696	0,692	0,688	0,683	0,679	0,674	0,670	0,665	0,660	0,656
90	0,651	0,646	0,641	0,636	0,630	0,625	0,619	0,613	0,607	0,600
100	0,593	0,585	0,577	0,567	0,555	0,545	0,535	0,525	0,515	0,506
110	0,496	0,488	0,479	0,470	0,462	0,454	0,446	0,439	0,431	0,424
120	0,417	0,410	0,403	0,397	0,394	0,384	0,378	0,372	0,367	0,361
130	0,355	0,350	0,345	0,340	0,335	0,330	0,325	0,320	0,315	0,311
140	0,306	0,302	0,298	0,294	0,290	0,286	0,282	0,278	0,274	0,271
150	0,267	0,263	0,260	0,257	0,253	0,250	0,247	0,244	0,241	0,238
160	0,235	0,232	0,229	0,226	0,223	0,221	0,218	0,215	0,213	0,210
170	0,208	0,205	0,203	0,201	0,198	0,196	0,194	0,192	0,190	0,187
180	0,185	0,183	0,181	0,179	0,177	0,175	0,174	0,172	0,170	0,168
190	0,166	0,165	0,163	0,161	0,160	0,158	0,156	0,155	0,153	0,152
200	0,150	0,149	0,147	0,146	0,144	0,143	0,142	0,140	0,139	0,137
210	0,136	0,135	0,134	0,132	0,131	0,130	0,129	0,128	0,126	0,125
220	0,124	0,123	0,122	0,121	0,120	0,119	0,118	0,117	0,116	0,115
230	0,114	0,113	0,112	0,111	0,110	0,109	0,108	0,107	0,106	0,105
240	0,104	0,103	0,103	0,102	0,101	0,100	0,099	0,098	0,098	0,097
250	0,096									

Anexa 13

Coeficienții de flambaj φ pentru lemn și fontă

λ	Lemn	Fontă	λ	Lemn	Fontă
0	1	1	80	0,48	0,26
10	0,99	0,97	90	0,38	0,20
20	0,97	0,91	100	0,30	0,16
30	0,93	0,81	110	0,25	
40	0,87	0,69	120	0,22	
50	0,80	0,57	130	0,18	
60	0,71	0,44	140	0,16	
70	0,61	0,34	150	0,14	

Anexa 14

Rezistențe admisibile pentru oțel, în construcții civile industriale și agricole
(după STAS 763/1-71)

A. Elemente din oțel laminat

Nr. crt.	Solicitarea	Simbolul	Coeficient aplicat în raport cu σ_a	Rezistențele admisibile în daN/cm² pentru OȚELUL LAMINAT LA CALD MARCA:							
				OL37 sau OLT 35		OLT 45		OL 44		OL 52	
				grupurea de inelestei							
				I	II	I	II	I	II	I	II
1	Întindere, compresiune, încovoiere	σ_a	1,00	1 500	1 700	1 600	1 800	1 800	2 100	2 200	2 500
2	Forfecare	τ_a	0,60	900	1 000	—	—	1 100	1 250	1 300	1 500
3	Presiune locală	σ_{la}	—	6 500	7 500	—	—	7 600	9 000	9000	11 000

B. Îmbinări cu şuruburi

Nr. crt.	Tipul şurubului	Solicitarea	Simbolul	Rezistenţele admisibile în daN/cm² pentru şuruburi din: gruparea de caracteristici mecanice 4.6 (STAS 2700/3–70) şi construcţii metalice din OL 37		gruparea de caracteristici mecanice 5.6 (STAS 2700/3–70) şi construcţii metalice din OL 44		gruparea de caracteristici mecanice 6.6 (STAS 2700/3–70) şi construcţii metalice din OL 52	
				gruparea de încărcări					
				I	II	I	II	I	II
1	Şuruburi precise şi semiprecise	forfecare	τ_a	1200	1400	1500	1700	1750	2000
2		presiune pe gaură	σ_{ag}	3000	3400	3600	4000	4200	4800
3		întindere în tijă	σ_{at}	1100	1250	1400	1600	1700	1950
4	Şuruburi brute (grosolane)	forfecare	τ_a	1050	1200	—	—	—	—
5		presiune pe gaură	σ_{ag}	2000	2200	—	—	—	—
6		întindere în tijă	σ_{at}	1100	1250	1400	1600	1700	1950
7	Şuruburi de ancoraj	întindere în tijă	σ_{at}	Rezistenţele admisibile σ_{at} în daN/cm², pentru şuruburi de ancoraj din:					
				OL 37		OL 50			
				gruparea de încărcări					
				I	II	I	II		
				1100	1250	1350	1500		

Anexa 15

Rezistenţe admisibile ale cordoanelor de sudură

(după STAS 763/1-71)

Nr. crt.	Tipul cordonului de sudură	Solicitarea	Simbolul	Coeficientul aplicat în raport cu rezistenţa admisibilă σ_a a materialului pieselor care se sudează	Rezistenţele admisibile în daN/cm² pentru suduri la elemente din oţel marca: OL 37 şi OLT 35		OLT 45		OL 44		OL 52	
					gruparea de încărcări							
					I	II	I	II	I	II	I	II
1	Cordoane de sudură în adîncime (îmbinări cap la cap)	Compresiune	σ_{as}	1,00	1500	1700	1600	1800	1800	2100	2200	2500
2		Întindere: *a)* sudură executată automat, semiautomat şi sudură electrică executată manual la care se aplică un control 100% cu mijloace perfecţionate (Röntgen, gama)	σ_{as}	1,00	1500	1700	1600	1800	1800	2100	2200	2500
		b) sudură executată automat, semiautomat şi sudură electrică executată manual la care se aplică un control cu mijloace obişnuite.	σ_{as}	0,80	1200	1350	1300	1450	1450	1700	1750	2000
3		Forfecare	τ_{as}	0,65	1000	1100	1050	1200	1200	1400	1400	1600
4	Cordoane de sudură în relief (de colţ)	Forfecare	τ_{as}	0,65	1000	1100	1050	1200	1200	1400	1400	1600

Anexa 16

Rezistenţe admisibile pentru lemn de brad în construcţii (informativ)

Felul solicitării	Simbol	Rezistenţe admisibile la construcţii în daN/cm²	
		Definitive	Provizorii şi auxiliare
Încovoiere	σ_{ai}	100	120
Întindere în lungul fibrelor	σ_{at}	70	85
Compresiune în lungul fibrelor	σ_{ac}	100	120
Strivire în lungul fibrelor	σ_{as}	100	120
Compresiune normal pe fibre	$\sigma_{ac\perp}$	15	18
Forfecare în lungul fibrelor provenind din încovoiere	τ_{ai}	20	24
Forfecare în plan normal pe fibre (valoare medie)	$\tau_{a\perp}$	45	55

Pentru secţiuni înclinate, rezistenţa admisibilă la compresiune se calculează cu formula:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{ac}}{1 + \left(\frac{\sigma_{ac}}{\sigma_{ac\perp}} - 1\right) \sin^3 \alpha}.$$

Unghiul α este unghiul dintre direcţia fibrelor şi direcţia efortului.

Rezistenţe admisibile pentru zidării din cărămidă *Anexa 17*

Rezistenţa medie de rupere a cărămizilor, în daN/cm²	Rezistenţa admisibilă la compresiune a zidăriei în daN/cm²		
	Felul mortarului		
	Ciment cu var	Var cu ciment	Var curat
100	8,5	7,5	6,5
80	7,5	6,5	5,5
60	7	6	5
40	6,5	5,5	4

Rezistenţe admisibile pentru zidării din piatră

Felul pietrei	Rezistenţa minimă de rupere a pietrei în daN/cm²	Rezistenţa admisibilă la compresiune a zidăriei în da					
		Felul zidăriei					
		Cuiţeţi	Piatră de talie cu mortar Tip 8		Moloane cu mortar Tip 50	Piatră brută cu	
						Tip 30	
			sloturi	stîlpi		rost eci-mental	opus in-certum
Granit, bazalt, porfir	1 000	60	50	30	30	25	20
Marmură, calcar compact, gresie silicioasă	400	30	25	15	15	12	10
Calcar obişnuit, gresie calcaroasă	120	15	12	10	10	8	
Calcar poros, gresie slabă, tuf vulcanic	80	—	8	6	6	5	

BIBLIOGRAFIE

1. Beleş A. şi Voinea, R. P. *Rezistenţa materialelor*. Vol. II, Bucureşti, Editura tehnică, 1958.
2. Beliaev, N. M. *Sbornik zadaci po soprotivleniiu materialov*. Izdatelistvo Nauka, Moskva, 1955.
3. Buzdugan, Gh. *Rezistenţa materialelor*. Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.
4. Deutsch. I,. *Probleme de rezistenţa materialelor*. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1961.
5. Feodosiev, V. I. *Izbrannie zadaci i voprosi po soprotivleniiu materialov*. Izdatelistvo Nauka, Moskva, 1967.
6. Pleşeriu, E. *Rezistenţa materialelor în probleme şi aplicaţii* (vol. I., *Momente de inerţie*). Litografia Învăţămîntului, Timişoara, 1958.
7. Göldner, H. *Übungsaufgaben aus der Technischen Mechanik, Statik-Dynamik—Festigkeitslehre für Studierende an Technischen Hochschulen*. VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1963.
8. Iţkovici, G. M. şi Vinokurov, A. I. *Sbornik zadaci po soprotivleniiu materialov*. Sudpromgiz, Leningrad, 1962.
9. Ivanov, N. I. *Sbornik zadaci po soprotivleniiu materialov*. Moskva, Gostehteorizdat, 1956.
10. Menge-Zimmermann. *Mechanik-Aufgaben*. II. Teil, Festigkeitslehre, Dr. Max Jänecke Verlagsbuchhandlung, Leipzig, 1940.
11. Mitoliubov, I. N. ş.a. *Posobie k rešeniiu zadaci po soprotivleniiu materialov*. Gosudarstvennoe izdatelistvo, „Visşaia Şkola", Moskva, 1962.
12. Mocanu, D. R. şi Brateş, M. *Calcule de rezistenţă cu specific feroviar*. Vol. I, Bucureşti, Editura căilor ferate, 1957.
13. Mocanu, D. R. ş.a. *Calcule de rezistenţă cu specific feroviar*, Vol. II, Bucureşti, Editura căilor ferate, 1958.
14. Nădăşan, Şt. şi Marinescu, I. *Culegere de probleme de rezistenţa materialelor* Vol. I, Litografia Învăţămîntului, Timişoara, 1958.
15. Ponomariov, S. D. ş.a. *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*. Vol. I, II, III, Bucureşti, Editura tehnică, 1960, 1963, 1964.
16. Rubinin, M. V. *Rukovodstvo k prakticeskim zaniatiiam po soprotivleniiu materialov*. Ciasti I, II, Maşghiz, Moskva, 1953.
17. Rudiţin, M. N. ş.a. *Spravocinoe posobie po soprotivleniiu materialov*. Gosudarstvennoe izdatelistvo B.S.S.R., Minsk, 1958.
18. Snitco, I. C. *Culegere de probleme de rezistenţa materialelor*. Bucureşti, Editura tehnică, 1952.

19. Stan A. şi Grumăzescu, M. *Probleme de mecanică şi rezistenţa materialelor*, Bucureşti, Editura tehnică, 1954.

20. Svetliţkii, A. V. şi Stacenko, I. V. *Sbornik zadaci po teorii kolebanii*, „Vişşaia Şkola", Moskva, 1973.

21. Szabó, L., *Repertorium und Übungsbuch der technischen Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963.

22. Umanskii, A. A. ş.a. *Sbornik zadaci po soprotivleniiu materialov*, Gostekhteorizdat, Moskva, 1955.

23. Wittenbauer, F. *Aufgaben aus der technischen Mechanik*. II. Band, Elastizitäts-und Festigkeitslehre, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1931.

24. Zünkler, B. *Übungen zur Festigkeits- und Elastizitätslehre*. Georg Westermann Verlag, Braunschweig, 1965.

ERATĂ

Pag.	Rîndul	În loc de:	Se va citi:
47	13	$\ldots T_2 \ldots$	$\ldots T_2' \ldots$
98	4	$\ldots \dfrac{M_{max}}{\sigma_a}$	$\ldots \dfrac{M_{max}}{\sigma_a}$
116	11	$L_1 I_2$	$N_1 I_2$
120	14	$\sigma_a \ldots$	$\sigma_a \ldots$
220	5	$a_1 = 1{,}66;$	$a_1^2 = 1{,}66;$
221	4	$\sigma_a \ldots$	$\sigma_a \ldots$
237	11	$k \ldots$	$k^2 \ldots$
419	5 jos	$OP \ldots$	$P \ldots$
571	2 jos	$\sigma_l \ldots$	$\sigma_{tl} \ldots$
Anexa 91	—	Anexa 91	Anexa 19

Tiraj: 10 000 ex. S.P. 65 ex. legate
Coli de tipar 37,5 Planşe: 3 buc.
Hîrtia: Tip. înalt A. Format: 16/70×100
Bun de tipar: 28. XII. 1974
Nr. plan: 5295 Ediţia 1975

Întreprinderea Poligrafică Cluj
Str. Brassai Nr. 5—7
Republica Socialistă România
Comanda Nr. 137/1975